Université de Marseille, Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier,

Master 1, mathématiques et applications, 4eme evaluation, 15 décembre 2021

L'examen contient 2 exercices. Le premier exercice est sur la transformation de Fourier. Le second est sur les opérateurs compacts. Le barème est sur 24 points. Les documents (polycopié du cours, notes personnelles, photocopies de documents) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (Caractérisation de $H^1(\mathbb{R})$, espace $H^s(\mathbb{R})$, barème 15 points)**.**

Pour $1 \le p \le +\infty$ et pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, on note L^p_K l'espace $L^p_K(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^2_{\mathbb{C}}$.

Si $f \in L^1_{\mathbb{C}} \cap L^2_{\mathbb{C}}$ les deux définitions coïncident au sens $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ p.p..

Rappels :

- $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$.
- Si $f_n \to f$ dans L^p_K ($p = 1$ ou 2), la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite qui converge p.p. vers f.
- (Inégalité de Hölder) Si $f \in L^p_K$, $g \in L^q_K$, $1 \le p, q \le +\infty$, $(1/p) + (1/q) = 1$, alors $fg \in L^1_K$ et $\|fg\|_{L^1_K} \le \|f\|_{L^p_K} \|g\|_{L^q_K}$. (Cas particulier important : $p = q = 2$.)

1. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que $\widehat{u_n} \to \mathcal{F}(u)$ et $\widehat{u'_n} \to \mathcal{F}(Du)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – $u_n \to u$ *dans* $H^1(\mathbb{R})$ *implique* $u_n \to u$ *dans* $L^2_{\mathbb{R}}$ *et* $Du_n \to Du$ *dans* $L^2_{\mathbb{R}}$*. Comme la transformée est une isométrie de* $L^2_{\mathbb{C}}$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}$*, que* $Du_n = u'_n$ *p.p. (car* $u_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*) et que* u_n*,* $u'_n \in L^1 \cap L^2$*, on obtient bien que* $\widehat{u_n} \to \mathcal{F}(u)$ *et* $\widehat{u'_n} \to \mathcal{F}(Du)$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}$ *quand* $n \to +\infty$*.*

(b) Montrer que $(i\cdot)\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(Du)$ p.p..
[Utiliser le deuxième item des rappels]

Corrigé – *Comme* $u_n \in C^1_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*,* $\widehat{u'_n} = (i\cdot)\widehat{u_n}$*. On a donc* $\widehat{u_n} \to \mathcal{F}(u)$ *et* $(i\cdot)\widehat{u_n} \to \mathcal{F}(Du)$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}$ *quand* $n \to +\infty$*. On peut donc, après extraction d'une sous suite, supposer que* $\widehat{u_n} \to \mathcal{F}(u)$ *et* $(i\cdot)\widehat{u_n} \to \mathcal{F}(Du)$ *p.p..*
Ceci montre que $(i\cdot)\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(Du)$ *p.p..*

(c) Montrer que $\sqrt{1 + (\cdot)^2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$ et que $\sqrt{1 + (\cdot)^2}\widehat{u_n} \to \sqrt{1 + (\cdot)^2}\mathcal{F}(u)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Comme* $\int_{\mathbb{R}} (1+t^2)|\mathcal{F}(u)(t)|^2 dt = \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} + \|(i\cdot)\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} < +\infty$*, on a bien* $\sqrt{1 + (\cdot)^2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$*.*
Puis, on remarque que $|\sqrt{1+t^2}\widehat{u_n} - \sqrt{1+t^2}\mathcal{F}(u)|^2 = |\widehat{u_n} - \mathcal{F}(u)|^2 + t^2|\widehat{u_n} - \mathcal{F}(u)|^2$ *et donc*

$$\|\sqrt{1+t^2}\widehat{u_n} - \sqrt{1+t^2}\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} = \|\widehat{u_n} - \mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} + \|(i\cdot)\widehat{u_n} - (i\cdot)\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

2. Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\sqrt{1 + (\cdot)^2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$.

(a) Montrer que $\mathcal{F}(u) \in L^1_{\mathbb{C}}$.

Corrigé –
$\mathcal{F}(u) = \sqrt{1 + (\cdot)^2}\mathcal{F}(u)\frac{1}{\sqrt{1+(\cdot)^2}}$*. Comme* $\frac{1}{\sqrt{1+(\cdot)^2}} \in L^2_{\mathbb{R}}$ *et* $\sqrt{1 + (\cdot)^2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$*, on a bien* $\mathcal{F}(u) \in L^1_{\mathbb{C}}$*.*

(b) Montrer que $(\cdot)\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$, $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $Du(-\cdot) = \mathcal{F}((i\cdot)\mathcal{F}(u))$.
[Pour $v \in C^1_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, calculer $\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx$ en utilisant $u(-\cdot) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = \widehat{\mathcal{F}(u)}$ p.p.]

Corrigé – *Comme* $|(\cdot)\mathcal{F}(u)| \leq |\sqrt{1+(\cdot)^2}\mathcal{F}(u)|$, *on a bien* $(\cdot)\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$.
Soit $v \in C^1_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u)(t)e^{ixt}dt)v'(x)dx$
On utilise maintenant Fubini (possible car $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)(t)||v'(x)|dtdx \leq \|\mathcal{F}(u)\|_{L^1_{\mathbb{C}}}\|v'\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} < +\infty$*), cela donne, avec une intégration par parties et le fait que* $\mathcal{F}$ *est une isométrie de* $L^2_{\mathbb{C}}$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} v'(x)e^{ixt}dx)\mathcal{F}(u)(t)dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}(it)v(x)e^{ixt}dx)\mathcal{F}(u)(t)dt$$

$$= -((i\cdot)\mathcal{F}(u) \mid \widehat{v})_{L^2_{\mathbb{C}}} = -(\mathcal{F}((i\cdot)\mathcal{F}(u)) \mid v(-\cdot))_{L^2_{\mathbb{C}}} = -\int \mathcal{F}((i\cdot)\mathcal{F}(u))(x)v(-x)\,dx.$$

Ceci prouve que $Du = \mathcal{F}((i\cdot)\mathcal{F}(u))(-\cdot)$.
On a donc $Du \in L^2_{\mathbb{C}}$ *et ceci donne bien* $u \in H^1(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2_{\mathbb{R}},\ \sqrt{1+(\cdot)^2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}\}$ et que $\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\sqrt{1+(\cdot)^2}\mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}$.

Corrigé – *Les deux questions précédentes donne* $H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2_{\mathbb{R}},\ \sqrt{1+(\cdot)^2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}\}$ *et*
$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \|u\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} + \|Du\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} = \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} + \|\mathcal{F}(Du)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} = \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} + \|(i\cdot)\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}} = \|\sqrt{1+(\cdot)^2}\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2_{\mathbb{C}}}$.

Pour $0 \leq s \leq 1$ on pose $H^s(\mathbb{R}) = \{u \in L^2_{\mathbb{R}},\ (1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}\}$ et, pour $u \in H^s(\mathbb{R})$,
$\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|(1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}$.

4. Soit $0 < s < 1$. Montrer que $H^s(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}$, est un espace de Hilbert.

Corrigé – *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite Cauchy de* $H^s(\mathbb{R})$. *Il existe* $g \in L^2_{\mathbb{C}}$ *tel que* $(1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u_n) \to g$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}$. *Comme* $|\mathcal{F}(u_n - u_m)| \leq (1+(\cdot)^2)^{s/2}|\mathcal{F}(u_n - u_m)|$, *la suite* $(\mathcal{F}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi de Cauchy dans* $L^2_{\mathbb{C}}$. *Comme Fourier est une isométrie, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi de Cauchy dans* $L^2_{\mathbb{C}}$ *et donc dans* $L^2_{\mathbb{R}}$. *Elle converge donc vers* $u \in L^2_{\mathbb{R}}$. *la suite* $(\mathcal{F}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\mathcal{F}(u)$ *dans* $L^2_{\mathbb{C}}$. *En considérant des suites extraites pour avoir la convergence p.p., on a* $g = (1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)$. *Ce qui prouve que* $u \in H^s(\mathbb{R})$ *et* $u_n \to u$ *dans* $H^s(\mathbb{R})$.

5. Soit $1/2 < s \leq 1$.
(a) Soit $u \in H^s(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(u) \in L^1_{\mathbb{C}}$.
[utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz]

Corrigé –
$\mathcal{F}(u) = (1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)\frac{1}{(1+(\cdot)^2)^{s/2}} \in L^1_{\mathbb{C}}$ *car* $(1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$ *et* $\frac{1}{(1+(\cdot)^2)^{s/2}} \in L^2_{\mathbb{R}}$ *(car* $s > 1/2$*).*

(b) Montrer qu'il existe C_s, ne dépendant que de s, tel que, pour tout $u \in H^s(\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty \leq C_s\|u\|_{H^s}$.
Donner une valeur possible de C_s sous la forme $(\int_{\mathbb{R}} g_s(t)dt)^{1/2}$ ou $g_s \in L^1(\mathbb{R})$.

Corrigé – *Comme* $u(-\cdot) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(u))$ *et* $\mathcal{F}(u) \in L^1_{\mathbb{C}}$, *on a* $u(-\cdot) = \widehat{\mathcal{F}(u)}$ *et*

$$\|u\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\mathcal{F}(u)\|_{L^1_{\mathbb{C}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|(1+(\cdot)^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)\|_{L^2_{\mathbb{C}}}\|\frac{1}{1+(\cdot)^2)^{s/2}}\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \leq C_s\|u\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

avec $C_s = (\int_{\mathbb{R}} g_s(t)dt)^{1/2}$, $g_s(t) = \frac{1}{2\pi(1+t^2)^s}$.

Exercice 2 (Opérateur compact, barème 9 points)**.**
On rappelle que $H^1(]0,1[) \subset C([0,1]),\mathbb{R})$. Soit $k \neq 1$, on pose $H = \{u \in H^1(]0,1[), ku(1) = u(0)\}$.

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(]0,1[)$.

Corrigé – *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ t.q. $u_n \to u$ dans $H^1(]0,1[)$. Comme la convergence dans $H^1(]0,1[)$ implique la convergence uniforme sur $[0,1]$ (et donc ponctuelle), on obtient $u(0) = ku(1)$ en passant à la limite sur $u_n(0) = ku_n(1)$.*

Dans la suite on munit H de la norme de $H^1(]0,1[)$ de sorte que H est un espace de Hilbert.

2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in H$, $\|u\|_{L^\infty(]0,1[)} \le C\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$.
   [On pourra commencer par montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in H$, $|u(0)| \le C_1\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$]

   Corrigé – *Si $k = 0$, $u(0) = 0$, $C = 0$ convient. Si $k \neq 0$, $|\frac{k-1}{k}||u(0)| = |u(1) - u(0)| = |\int_0^1 Du(t)dt| \le \|Du\|_{L^2(]0,1[)}$. On peut donc prendre $C_1 = \frac{k}{|k-1|}$. (valable aussi pour $k = 0$.)*
   Puis, pour $x \in [0,1]$, $u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)dt$ et donc
   $$|u(x)| \le |u(0)| + \int_0^1 |Du(t)|dt \le (\frac{k}{|k-1|} + 1)\|Du\|_{L^2(]0,1[)}.$$
   On peut prendre $C = \frac{k}{|k-1|} + 1$.

Pour $u, v \in H$ on pose $a(u,v) = \int_0^1 Du(t)Dv(t)\,dt + \int_0^1 u(t)v(t)\,dt - (\int_0^1 u(t)\,dt)(\int_0^1 v(t)\,dt)$.

3. Montrer que l'application $(u,v) \mapsto a(u,v)$ est un produit scalaire sur H, équivalent au produit scalaire usuel (c'est-à-dire que a est bilinéaire, symétrique et qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\|u\|^2_{H^1(]0,1[)} \le a(u,u) \le \beta\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$).

   Corrigé – *La symétrie de a est immédiate. La linéarité de a par rapport à son premier argument vient de la linéarité de l'intégrale et de la linéarité de la dérivation faible.*
   L'existence de β tel que $a(u,u) \le \beta\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$ est immédiate, il suffit de prendre $\beta = 1$. Il reste à montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in H$, $a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2_{H^1(]0,1[)}$ (ce qui donne que a est un produit saclaire et que ce produit scalaire est équivalent au produit scalaire usuel).
   Pour cela, on remarque que (par Cauchy-Schwarz) $(\int_0^1 u(t)dt)^2 \le \int_0^1 u^2(t)dt$ et donc $a(u,u) \ge \|Du\|^2_{L^2(]0,1[)}$.
   Puis, la question 2 donne $\|u\|_{L^2(]0,1[)} \le \|u\|_{L^\infty(]0,1[)} \le C\|Du\|_{L^2(]0,1[)}$ et donc
   $$\|u\|^2_{H^1(]0,1[)} = \|Du\|^2_{L^2(]0,1[)} + \|u\|^2_{L^2(]0,1[)} \le (1 + C^2)\|Du\|^2_{L^2(]0,1[)}.$$
   Ceci montre que $\alpha = 1/(1/C^2)$ convient.

4. Soit $f \in L^2(]0,1[)$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de
   $$u \in H, \qquad a(u,v) = \int_{\mathbb{R}} f(t)v(t)\,dt \text{ pour tout } v \in H. \tag{1}$$

   Corrigé – *Pour $v \in H$, on pose $S(v) = \int_{\mathbb{R}} f(t)v(t)$. $S \in H'$ car*
   $$|S(v)| \le \|f\|_{L^2(]0,1[)}\|v\|_{L^2(]0,1[)} \le C\|f\|_{L^2(]0,1[)}\|Dv\|_{L^2(]0,1[)} \le C\|f\|_{L^2(]0,1[)}\sqrt{a(v,v)}.$$
   L'existence de l'unicité de u est alors une conséquence du théorème de représentation de Riesz (utilisé ici avec le produit scalaire a).

On note T l'application (de $L^2(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$) $f \mapsto u$ où u est la solution de (1).

5. Montrer que T est un opérateur linéaire autoadjoint compact (de $L^2(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$).

   Corrigé – *Pour $f \in L^2(]0,1[)$, on pose $T_1(f) = u$, où u est la solution de (1). L'opérateur T_1 est linéaire continu de $L^2(]0,1[)$ dans H (plus précisément $\sqrt{a(u,u)} \le C\|f\|_{L^2(]0,1[)}$ et donc $\|T_1\|_{\mathcal{L}(L^2,H)} \le C$ lorsque H est muni de la norme induite par a).*
   On note I l'application $u \mapsto u$ de H dans $L^2(]0,1[)$, l'opérateur I est compact (car H est s.e.v. fermé de $H^1(]0,1[)$).
   L'opérateur $T = I \circ T_1$ est donc compact de $L^2(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$.
   Pour montrer que $T = T^\star$, soient $f, g \in L^2(]0,1[)$. $u = T(f)$ et $v = T(g)$.
   $$(Tf|g)_{L^2(]0,1[)} = (g|u)_{L^2(]0,1[)} = a(v,u) = a(u,v) = (f|v)_{L^2(]0,1[)} = (f|T(g)_{L^2(]0,1[)}.$$
   Ce qui donne bien $T = T^\star$.

6. On suppose que $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et que $u = T(f)$. Montrer que $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et donner l'équation différentielle satisfaite par u.

Corrigé – *On pose $\gamma = \int_0^1 u(x)dx$ et $h = -u + \gamma + f$. Comme $u \in C([0,1]),\mathbb{R})$, $h \in C([0,1]),\mathbb{R})$. Pour tout $v \in C_c^1(]0,1[,\mathbb{R})$,*

$$\int_0^1 Du(t)v'(t)dt = \int_0^1 h(t)v(t)dt.$$

Un lemme vu en cours et en td donne alors que $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et $-u''(x) = h(x) = -u(x) + \int_0^1 u(x)dx + f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.