td1. Conséquences de Hahn-Banach, convergence faible

Exercice 1.1 (Trois applications de Hahn-Banach)**.**

Soit E un espace de Banach réel.

1) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.
2) Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.
3) Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E''$ pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E''$. (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.)

Exercice 1.2 (Hahn-Banach positif)**.**

Soit F un sous espace vectoriel de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et T une application linéaire positive de F dans $\mathbb{R}$ (T positive signifie : $(f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0)$).

1) On suppose que F contient les fonctions constantes. Montrer qu'il existe $\overline{T}$, application linéaire positive de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $\overline{T} = T$ sur F. [On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Hahn-Banach ou se ramener au théorème de Hahn-Banach.]
2) Montrer (en donnant un exemple) que le résultat de la question précécente peut être faux si F ne contient pas les fonctions constantes.

Exercice 1.3 (Pas de théorème de Riesz sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)**.**

Si μ est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$, on définit T_μ sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par : $T_\mu(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. T_μ est donc une application linéaire positive de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Contruire une application linéaire positive, notée T, de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $T \neq T_\mu$ pour toute mesure finie μ sur les boréliens de $\mathbb{R}$. [Utiliser l'exercice 1.2.]

Théorème dû à Riesz : si T est application linéaire positive de $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors une unique mesure une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée μ, telle que $T(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1.4 (Jauge d'un convexe)**.**

Soient E un espace de Banach réel et $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0.

1) Pour $x \in E$, montrer que $\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\} \neq \emptyset$.

   Pour $x \in E$, on pose $p(x) = \inf\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\}$.
2) Soit $x \in E$, montrer que $\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\} =]p(x), +\infty[$.
3) Montrer que $p(ax) = ap(x)$ et $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$ et tout $a > 0$.
4) Soit $x \in E$ Montrer que

   $x \in C$ si et seulement si $p(x) < 1$.

   $x \in \bar{C}$ si et seulement si $p(x) \leq 1$,

Exercice 1.5 (Séparation d'un point et d'un convexe (Hahn-Banach "géométrique")).
Soient E un espace de Banach réel, $C \subset E$ un convexe non vide et $a \in E \setminus \bar{C}$. Dans cet exercice, on se propose de montrer la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &\exists \varphi \in E', \exists \alpha \in \mathbb{R}, \\ &\varphi(a) > \alpha, \ \varphi(x) \leq \alpha, \ \forall x \in C. \end{aligned} \tag{1.1}$$

1) On suppose dans cette question que C est ouvert et $0 \in C$. Montrer (1.1). [Utiliser l'exercice 1.4 et le théorème de Hahn-Banach.]
2) On suppose dans cette question que $0 \in C$. Montrer (1.1). [Se ramener à la question précédente en introduisant le convexe $C_\star = \cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ convenablement choisi.]
3) Montrer (1.1). [Se ramener à la question précédente.]

Exercice 1.6 (Lemme de Mazur).
Soit E un espace de Banach réel.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$ t.q. $x_n \to x$ faiblement dans E, quand $n \to \infty$.

On pose $C_n = \text{Conv}\{x_m, m \geq n\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons convexes des x_m, $m \geq n$).

1) Montrer que $x \in \overline{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [Utiliser le théorème de Hahn-Banach "géométrique".]
2) Montrer qu'il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ t.q. $y_n \in \text{Conv}\{x_m, m \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y_n \to x$ quand $n \to \infty$.

Exercice 1.7 (Minimisation d'une fonction convexe).
Soit E un espace de Banach réel et f une application continue et convexe de E dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$ t.q. $x_n \to x$ faiblement dans E et $f(x_n) \to \inf_E f$, quand $n \to \infty$. Montrer que $f(x) = \inf_E f$.
Montrer en donnant un exemple que ce résultat peut être faux si f n'est pas convexe.

Théorème 1.1 (Hahn-Banach).
Soient E un e.v. réel et p une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que

1) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$, pour tout $u, v \in E$,
2) $p(\lambda u) = \lambda p(u)$, pour tout $u \in E$ et $\lambda > 0$.

Soient F un s.e.v. de E et f une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$ telle $f(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in F$. Alors f se prolonge en une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, encore notée f, telle que $f(u) \leq p(u)$ pour tout $u \in E$.

Exercice 1.8 (Lemme de Zorn).
Dans cette exercice, on démontre le lemme de Zorn et on en déduit le théorème de Hahn-Banach.
Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre notée $\leq$.

hypothèse : On suppose que l'ensemble E, muni de cette relation d'ordre, est inductif, c'est-à-dire que tout partie de E totalement ordonnée admet un majorant.

Objectif : Le but de l'exercice est de montrer que E possède un élément maximal (c'est-à-dire un élément qui n'admet pas de majorant strict). (Ce résultat est le lemme de Zorn.)

On commence par utiliser l'axiome du choix. Pour toute partie P totalement ordonnée de E admettant au moins un majorant strict, on choisit un tel majorant, on note ce majorant $m(P)$ (donc $m(P) \notin P$).

On définit maintenant la notion de “partie finissante” et de “bonne partie”.

Partie finissante : Soit P une partie totalement ordonnée de E et $Q \subset P$. La partie Q est une partie finissante de la partie P si, pour tout $x \in Q$ et $y \in P \setminus Q$, $x \leq y$. La partie Q est une partie finissante stricte de la partie P si de plus $P \setminus Q \neq \emptyset$. (Noter qu'une partie partie finissante stricte a nécessairement au moins un majorant.)

Bonne partie : Soit P une partie totalement ordonnée de E. La partie P est une bonne partie si pour toute partie finissante stricte Q, $m(Q) \in P$ et est le plus petit élément de P majorant Q. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bonnes parties.

1) Soient P_1, P_2 deux bonnes parties. Montrer que l'une des ces deux parties est une partie finissante de l'autre.

   [Considérer la plus grande partie possible étant à la fois finissante de P_1 et finissante de P_2 (en montrant tout d'abord l'existence d'une telle partie).]

2) On pose $P_f = \cup_{P \in \mathcal{B}} P$. Montrer que P_f est une bonne partie et en déduire qu'un majorant de P_f (qui existe par hypothèse puisque P_f est totalement ordonné) est un élément maximal (ceci démontre le lemme de Zorn).

3) Démontrer le théorème de Hahn-Banach (théorème 1.1) en utilisant le lemme de Zorn.

Exercice 1.9 (Séparation d'un point et d'un convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert réel)**.**
Soient H un espace de Hilbert réel, $C \subset H$ un convexe fermé non vide et $a \in H \setminus C$. Dans cet exercice, on se propose de montrer, sans le théorème de Hahn-Banach, qu'il existe $T \in H'$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$T(u) \leq \gamma \text{ pour tout } u \in C, \tag{1.2}$$

$$T(a) > \gamma. \tag{1.3}$$

On note b la projection orthogonale de a sur C (l'existence de b est donnée par le théorème 0.12), c'est-à-dire que $b \in C$ et $\|a - b\| \leq \|a - u\|$ pour $u \in C$.

1) Montrer $(a - b \,|\, b - u) \geq 0$ pour tout $u \in C$. [Soit $u \in C$ et $t \in]0, 1[$. Utiliser $\|a - b\|^2 \leq \|a - v\|^2$ avec $v = tu + (1 - t)b$ et faire tendre t vers 0.]

   Cette question est dans la proposition 0.6.

2) On définit $T \in H'$ par $T(u) = (a - b \,|\, u)$ pour tout $u \in H$. Montrer que $T \in H'$ et qu'il existe γ tel que le couple (T, γ) vérifie (1.2)-(1.3).