td10. Transformée de Fourier dans L^1

Exercice 10.1 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans $L^1_{\mathbb{C}}$).

Soit $H(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} dt, x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, et $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

2) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

3) Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g * h_\lambda(0) \rightarrow \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \rightarrow 0$. [Utiliser la question 1 et le théorème de convergence dominée.]

4) Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0.$$

[On pourra utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)| dx$.]

5) Dédurre de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier

Exercice 10.2 (Une condition donnant $\widehat{f} \in L^1$).

On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1) Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\widehat{g} \in L^1$, $g\widehat{f} \in L^1$ et $\int f\widehat{g} d\lambda = \int g\widehat{f} d\lambda$.

2) Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B * 1_B(t) = (1 - |t|)^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) On pose $\theta_n(t) = (1 - \frac{|t|}{n})^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\widehat{\theta}_1(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

[On pourra remarquer que $\theta_1 = 1_B * 1_B$ avec $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.]

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$\widehat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}.$$

4) Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\widehat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\widehat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique). On utilise la fonction θ_n de la question précédente.

(a) On note $\varphi_n = \theta_n \widehat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \widehat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \widehat{f} d\lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \widehat{\theta}_n(y) dy = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\widehat{f} \in L^1$.

Exercice 10.3 (Transformée de Fourier inverse). Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que la transformée de Fourier de f , notée $\widehat{f}$, est aussi intégrable (pour la mesure de Lebesgue).

1) En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\widehat{f}(-t)) &= \operatorname{Re}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{Im}(\widehat{f}(-t)) &= -\operatorname{Im}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

où $\operatorname{Re}(\xi)$ et $\operatorname{Im}(\xi)$ désignent les parties réelle et imaginaire du nombre complexe ξ .

2) Montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(\widehat{f}(t)e^{itx}) dt \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10.4 (La transformation de Fourier n'est ni stable ni surjective). Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $L_{\mathbb{C}}^1$ l'espace $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $f = 1_{[-a, a]}$.

1) Calculer la transformée de Fourier de f . En déduire que $L_{\mathbb{C}}^1$ n'est pas stable par transformation de Fourier.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = 1_{[-n, n]}$. Calculer $f * g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in L_{\mathbb{C}}^1$ t.q. $\widehat{h}_n = f * g_n$. Montrer que la suite $f * g_n$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans $L_{\mathbb{C}}^1$. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $L_{\mathbb{C}}^1$ dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.