td11. Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$, régularité et comportement à l'infini

Exercice 11.1 (Fourier, série et transformée)**.**
On rappelle que l'espace $\mathcal{S}$ est défini par

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N} \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty\}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ (On rappelle que $\widehat{\varphi}$ est alors aussi dans l'espace $\mathcal{S}$ et que $\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi(-\cdot)$).

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi)$ est absolument convergente (dans $\mathbb{C}$).
Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $f(t)$ par $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi)$.

2) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que f est 2π-périodique.
On rappelle que ceci donne que f est somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que pour tout t dans $\mathbb{R}$ on a
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int},$$
avec $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\widehat{\varphi}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(-n).$$
En déduire que pour tout t dans $\mathbb{R}$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(-n)e^{int}.$$

Exercice 11.2 (Comportement à l'infini de f et régularité en 0 de $\widehat{f}$)**.**
On note $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$.
Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f.
Pour $a > 0$, on note $A_a = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq a\}$.

1) Soit $f \in \mathcal{L}^1$, $f \geq 0$ p.p.. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(t) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}(\widehat{f}\,(t) + \widehat{f}\,(-t))$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\psi(t) \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \psi(0) - \psi(t) = \displaystyle\int f(x)(1 - \cos(xt))dx$.

(b) Soit $a > 0$. Montrer que
$$\int_0^{2/a} \Big(\int f(x)(1 - \cos(xt))dx\Big)dt = \int f(x)\Big(\frac{2}{a} - \frac{1}{x}\sin(2\frac{x}{a})\Big)dx.$$

(c) Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_{A_a} f(x)dx \leq \int f(x)(2 - \frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx$. [On pourra dans l'intégrale de droite utiliser $\mathbb{R} = A_a \cup A_a^c$.]
En déduire (avec les deux questions précédentes) que
$$\int_{A_a} f(x)dx \leq a\int_0^{2/a} (\psi(0) - \psi(t))dt.$$

(d) On suppose que $\widehat{f}$ est de classe C^2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de f, tel que $\displaystyle\int_{A_a} f(x)dx \leq \frac{C}{a^2}$, pour tout $a > 0$.

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables et positives p.p..

On suppose que $\widehat{f}_n$ converge simplement vers une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_n(t) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}(\widehat{f}_n(t) + \widehat{f}_n(-t))$.

On note $\tilde{\psi}$ la limite simple des fonctions ψ_n.

(a) Monter que $\tilde{\psi}$ est continue en 0.

(b) Montrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2/a}(\psi_n(0) - \psi_n(t))dt = \int_0^{2/a}(\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t))dt$.

(d) Montrer que $\displaystyle\int_{A_a} f_n(x)dx \to 0$, quand $a \to +\infty$, uniformément par rapport à n.

Exercice 11.3.
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \geq 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 11.4 (Intégrabilité et limite à l'infini)**.** Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1) On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.

2) On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

3) On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

[On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.]$$

4) On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?