td12. Transformée de Fourier dans L^2 et exercices de révision

Exercice 12.1 (Transformée de Fourier pour f de classe C^2, à support compact).
On note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in C^2_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^2, et qu'il existe K compact de $\mathbb{R}$ t.q. $f = 0$ sur K^c).

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$.

2) Montrer que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$. [On pourra utiliser le fait que $\widehat{f''} = -(\cdot)^2 \widehat{f}$.]

3) Montrer que $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\,\|_{L^2}$.

N.B. Comme $C^2_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, cet exercice permet de définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}$ sans utiliser l'espace $\mathcal{S}_1$.

Exercice 12.2 (Transformée de Fourier du produit de fonctions).
Pour $p \in [1, +\infty]$, On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans L^p.
On note $C^\infty_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, on note $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Si $f \in L^1$, on désigne par $\widehat{f}$ la transformée de f (on a donc $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).
Si $f \in L^2$, on désigne par $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\mathcal{F}(f) \in L^2$).
On rappelle que si $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ p.p.. Dans ce cas, on confond, en général, $\widehat{f}$ et $\mathcal{F}(f)$.

1) (Convolution $L^2 - L^2$). Soit $u, v \in L^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $s \mapsto u(t-s)v(s)$ est intégrable et donc que la fonction $u * v$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ par la formule

$$u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-s)v(s)ds, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que $u * v \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\|u * v\|_\infty \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.

2) Soit $f, g \in C^\infty_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (a) Montrer que f, g, $fg \in L^1 \cap L^2$, puis que $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}(t).$$

   [On pourra, par exemple, utiliser le fait que $f, \widehat{g} \in L^1$ et calculer $\widehat{f} * \widehat{g}(t)$ en utilisant la définition de $\widehat{f}$ et la transformée de Fourier inverse pour $\widehat{g}$.]

3) Soit $f, g \in L^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(t).$$

Exercice 12.3 (Caractérisation des fonctions à valeurs réelles). Soit $d \geq 1$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

1) Soit $f \in L^1$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

2) Soit $f \in L^2$. On désigne par $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\mathcal{F}(f) \in L^2$). Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\mathcal{F}(f)}(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 12.4 (Théorème d'injection de Sobolev)**.**
Soit $d \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Si $f \in L^2$, on note $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f.
Pour $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, on note $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2 \text{ t.q. } (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f) \in L^2\}$ et $\|f\|_{H^s} = \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)\|_{L^2}$.
On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel fermé de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$. Avec cette norme, $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.
Soit $s > \frac{d}{2}$.

1) Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\mathcal{F}(f) \in L^1$. En déduire que $f \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (au sens "il existe $g \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que $f = g$ p.p."; on confond alors f et g).
2) Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et qu'il existe C_s, ne dépendant que de s et d, t.q. :

$$\|f\|_u \leq C_s\|f\|_{H^s} \text{ pour tout } f \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

3) On s'intéresse maintenant au cas $d = 2$.
 (a) Soit $s > 1$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_u \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(s-1)}}\|f\|_{H^s}.$$

 (b) Soit $1 < s < 2$ et $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^1}^{2-s}\|f\|_{H^2}^{s-1}.$$

 [Utiliser l'inégalité de Hölder.]
 (c) On pose $C = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$. Montrer que

$$f \in H^2(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_{H^1} = 1 \ \Rightarrow\ \|f\|_u \leq C\sqrt{\ln(1 + \|f\|_{H^2})}.$$

 [Pour $a > 1$, on pourra chercher le minimum pour $s \in]1, 2[$ de la fonction $s \mapsto \frac{a^{s-1}}{\sqrt{s-1}}$, et distinguer selon les valeurs de a.]

 Soit $\beta > 0$, montrer qu'il existe C_β, ne dépendant que de β, t.q. :

$$f \in H^2(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_{H^1} \leq \beta \ \Rightarrow\ \|f\|_u \leq C_\beta\sqrt{\ln(1 + \|f\|_{H^2})}.$$

Exercice 12.5 ($f \in C_c^\infty$ et $\widehat{f} = 0$ sur un ouvert non vide implique $f = 0$)**.**
Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\widehat{f} = 0$ sur U. Montrer que $f = 0$ sur tout $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que l'application $z = \xi + i\eta \in \mathcal{C} \mapsto \int f(x)e^{-ix(\xi+i\eta)dx}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{C}$.]

Exercice 12.6 (Caractérisation de m par $\widehat{m}$)**.** Soit $d \geq 1$.

1) Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} = \widehat{\mu}$.
 (a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que $\int \widehat{\varphi}dm = \int \widehat{\varphi}d\mu$.
 (b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).
 (c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).
2) Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$.