

td2. Convergence faible, convergence faible-*

Exercice 2.1 (Unicité de la limite).

Soit E est un espace de Banach réel.

- 1) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x, y \in E$ t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E et $x_n \rightarrow y$ faiblement dans E (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $x = y$.
- 2) Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T, S \in E'$ t.q. $T_n \rightarrow T$ $\star$ -faiblement dans E' et $T_n \rightarrow S$ $\star$ -faiblement dans E' (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $T = S$.
- 3) Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T, S \in E'$ t.q. $T_n \rightarrow T$ $\star$ -faiblement dans E' et $T_n \rightarrow S$ faiblement dans E' (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $T = S$.

Exercice 2.2 (Convergence faible et faible- $\star$ impliquent bornée).

Soit E est un espace de Banach réel. Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T \in E'$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x \in E$.

- 1) On suppose que $T_n \rightarrow T$ $\star$ -faiblement dans E' . Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 2) On suppose que $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E . Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 3) On suppose que $T_n \rightarrow T$ dans E' et $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E .
Montrer que $\langle T_n, x_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T, x \rangle_{E', E}$.
- 4) On suppose que $T_n \rightarrow T$ $\star$ -faiblement dans E' et $x_n \rightarrow x$ dans E .
Montrer que $\langle T_n, x_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle T, x \rangle_{E', E}$.

Exercice 2.3 (Dans $l^1(\mathbb{N})$, convergence faible = convergence forte).

On pose :

$$l^\infty(\mathbb{N}) = l^\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} ; \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\},$$

$$l^1(\mathbb{N}) = l^1 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} ; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ on pose $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ on pose $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$.

- 1) Montrer que l^∞ et l^1 sont des espaces de Banach.
- 2) Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$.
On définit $T_y : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$T_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \forall x \in l^1.$$

(Remarquer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ est bien convergente, pour tout $x \in l^1$.)

Montrer que $T_y \in (l^1)'$, et que $\|T_y\|_{(l^1)'} = \|y\|_\infty$.

- 3) Soit $T \in (l^1)'$. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ tel que $T = T_y$.
[On pourra poser $y_n = T(e^{(n)})$, avec $e^{(n)} = (\delta_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$.]
- 4) Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset l^1$ une suite telle que :
 - i) $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i^{(n)} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
 - ii) $\|x^{(n)}\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et trouver une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$\alpha_k < \alpha_{k+1}, \sum_{i=0}^{\alpha_k} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \sum_{i=\alpha_k+1}^{\alpha_{k+1}} |x_i^{(n_k)}| \geq \frac{3}{5}, \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^{\infty} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

- b. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ telle que $T_y(x^{(n_k)}) \geq \frac{1}{5}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ donnée en a.).

- 5) Soient $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset l^1$ et $x \in l^1$. Montrer que $x^{(n)} \rightarrow x$ faiblement dans l^1 (c'est-à-dire $T(x^{(n)}) \rightarrow T(x)$ pour tout $T \in (l^1)'$) si et seulement si $x^{(n)} \rightarrow x$ dans l^1 .

Exercice 2.4 (Convergences forte, faible et faible- $\star$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_n(t) = e^{int} e^{-t^2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

- 1) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
 2) Soit $\psi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{int} \psi(t) dt \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

[Utiliser la continuité en moyenne dans L^1 , c'est-à-dire $\|\psi(\cdot + h) - \psi\|_1 \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.]

- 3) Soit $1 \leq p < \infty$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle faiblement dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$? La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle (fortement) dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$?
 4) On identifie (voir cours) $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ au dual de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.
 (a) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle $\star$ -faiblement dans $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$?
 (b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle (fortement) dans $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$?
 (c) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle faiblement dans $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$?
 [On pourra, par exemple, considérer l'application T de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle T, \varphi \rangle_{C'_b, C_b} = \varphi(0)$ et la prolonger (par Hahn-Banach) sur tout $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.]

Exercice 2.5 (Convergence L^{∞} -faible donne convergence p.p.).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$. On note $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$.

Pour $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose $B(x, h) = \{y \in \Omega \text{ t.q. } |x - y| < h\}$ et on désigne par $|B(x, h)|$ la mesure de Lebesgue de $B(x, h)$. Pour $f \in L^1$, $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose

$$f_h(x) = \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} f(y) dy.$$

On dit que x est un point de Lebesgue de f si $f_h(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \rightarrow 0$.

Si $x \in \Omega$, on pose $F_x = \{f \in L^{\infty} \text{ tel que } x \text{ est un point de Lebesgue de } f\}$.

- 1) Soit $x \in \Omega$. Pour $f \in F_x$ on pose $T_x(f) = \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x)$. Montrer que F_x est un sous espace vectoriel de L^{∞} et que T_x est une application linéaire continue de F_x , muni de la norme de L^{∞} , dans $\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\bar{T}_x \in (L^{\infty})'$ telle que $\bar{T}_x(f) = T_x(f)$ pour tout $f \in F_x$.

Pour la suite de cet exercice, on admet que, si $f \in L^1$, presque tout point x de Ω est un point de Lebesgue de f et on a, pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x)$ (ceci est démontré dans les cours d'intégration).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^{∞} et $f \in L^{\infty}$. On suppose que $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^{∞} , quand $n \rightarrow +\infty$.

- 2) Montrer que $f_n \rightarrow f$ p.p..
 3) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .
 4) Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

Remarque : la convergence faible- $\star$ dans L^{∞} n'implique pas la convergence p.p.. On pourra essayer de construire un exemple.