td3. Séparabilité, Réflexivité

Exercice 3.1 (Espace $L^p(\mathbb{R})$)**.**

1) Soit $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est il séparable ?
2) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est il séparable ?

Exercice 3.2 (Espaces de fonctions continues)**.**

1) L'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est il séparable ?
2) L'espace $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est il séparable ?

Exercice 3.3 (Suite dans le dual d'un espace de Banach non séparable)**.**

1) On note E l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donner une suite bornée du dual de E n'admettant aucune sous suite $\star$-faiblement convergente.
   [On pourra considérer la suite T_n de E' définie par $\langle T_n, f\rangle_{E',E} = f(n)$.
   (Vérifier d'abord que $T_n \in E'$.)]
2) La suite donnée à la question 1 est aussi une suite du dual de $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette suite admet-elle une sous suite $\star$-faiblement convergente ?

Remarque : De la question 1, on peut aussi déduire que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable car nous verrons qu'une suite bornée du dual d'un espace de Banach séparable admet une sous suite $\star$-faiblement convergente.

Exercice 3.4 (Séparabilité de E versus Séparabilité de E')**.**

1) Donner un exemple d'espace de Banach séparable dont le dual n'est pas séparable.
2) Soit E une espace de Banach. On suppose que E' est séparable. Montrer que E est séparable.

Exercice 3.5 (Réflexivité)**.**

1) soient E et F deux espaces de Banach. On suppose qu'ils sont isométriques, c'est-à-dire qu'il existe J linéaire bijective de E dans F et conservant la norme. Montrer que E est réflexif si et seulement si F est réflexif.
2) Soit F un s.e.v. fermé d'un espace de Banach réflexif. Montrer que F est aussi un espace de Banach réflexif.
3) Montrer que l'espace de Banach E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.
4) Soit E un espace de Banach. Montrer que E est réflexif séparable si et seulement si E' est réflexif séparable.
5) Soit F un s.e.v. fermé d'un espace de Banach réflexif séparable. Montrer que F est aussi un espace de Banach réflexif séparable.

Exercice 3.6 (Non réflexité de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)**.**
On note E l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou l'espace $C([-1, 1]), \mathbb{R})$ et on le munit de sa norme naturelle (pour laquelle c'est un espace de Banach).
On définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [-1/n, 1/n],$$
$$f_n(x) = nx + 1 \text{ si } x \in [-1/n, 0],$$
$$f_n(x) = 1 - nx \text{ si } x \in]0, 1/n].$$

On note $F = \{T \in E',$ t.q. $\lim_{n\to+\infty}\langle T, f_n\rangle_{E',E}$ existe et appartient à $\mathbb{R}\}$.

1) Montrer que l'application $T \mapsto \lim_{n\to+\infty} \langle T, f_n\rangle_{E',E}$ est linéaire continue de F dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu'il existe $u \in E''$ t.q. $\|u\|_{E''} = 1$ et, pour tout $T \in F$, $\langle u, T\rangle_{E'',E'} = \lim_{n\to+\infty} \langle T, f_n\rangle_{E',E}$.

3) Montrer que pour tout $f \in E$, il existe $T \in E'$ t.q. $\langle u, T\rangle_{E'',E'} \neq \langle T, f\rangle_{E',E}$ (avec u défini à la question précédente).
[On pourra choisir un point convenable a de $[-1, 1]$ et prendre T défini par $\langle T, f\rangle_{E',E} = f(a)$.]
En déduire que E n'est pas réflexif.

NB : On peut montrer que $F = E'$, mais c'est inutile pour cet exercice. On peut aussi montrer qu'un élément T de E' induit une mesure signée μ sur les boréliens et que $u(T) = \mu(\{0\})$ (cours d'intégration).

Exercice 3.7 (Convergence faible et nonlinéarité)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(]0, 1[)$.
Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que φ croissante et il existe C t.q. $|\varphi(s)| \leq C(|s| + 1)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
On supppose que $u_n \to u$ faiblement dans $L^2(]0, 1[)$ et $\varphi(u_n) \to f$ faiblement dans $L^2(]0, 1[)$.

1) On suppose dans cette question que $u_n \to u$ dans $L^2(]0, 1[)$. Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p..

2) (Question difficile, facultative) Donner un exemple (choisir φ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) pour lequel $\varphi(u) \neq f$.

3) (Astuce de Minty) On suppose dans cette question que $\int \varphi(u_n)u_n\, dx \to \int fu\, dx$.
 (a) Soit $v \in L^2(]0, 1[)$. Montrer que $\int (f - \varphi(v))(u - v) \geq 0$.
 (b) Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p..
 [Choisir $v = u + tw$, avec $w \in L^2$ et $t > 0$, et faire tendre t vers 0.]

4) On suppose dans cette question que $\varphi(u_n) \to f$ dans $L^2(]0, 1[)$. Montrer que $\varphi(u) = f$ p.p..