td4. Réflexivité, compacité faible ou faible- $\star$ des bornés

Rappel du cours : Une suite bornée du dual d'un espace de Banach séparable admet une sous suite $\star$ -faiblement convergente

Exercice 4.1 (suite bornée de L^p).

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), $1 \leq p \leq +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$.
(On note $L^p(\Omega)$ l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.)

- 1) On suppose $1 < p < +\infty$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente.
- 2) On suppose $p = +\infty$. Montrer qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ et une sous suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\int_{\Omega} u_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} u \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in L^1(\Omega).$$

En donnant un exemple (avec $\Omega = \mathbb{R}$), montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut n'avoir aucune sous suite faiblement convergente.

- 3) On suppose $p = 1$. En donnant un exemple (avec $\Omega = \mathbb{R}$), montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut n'avoir aucune sous suite faiblement convergente.

Exercice 4.2 (Suite bornée d'un Banach réflexif). Soient E un Banach réflexif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E . On pose $G = \text{vect}\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $F = \bar{G}$.

- 1) Montrer que F est un espace de Banach réflexif séparable (on pourra admettre qu'un s.e.v. fermé d'un Banach réflexif est encore un Banach réflexif, ceci est démontré dans l'exercice 7.2).
- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente.

Exemple : un exemple d'application de cet exercice est $E = L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$, avec $1 < p < +\infty$ et $(X, \mathcal{T}, m)$ est un espace mesuré.

Exercice 4.3 (Uniforme convexité, cv faible + cv de la norme donne cv).

Soit E un espace de Banach (réel). On suppose que E est uniformément convexe, c'est-à-dire que :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $u \in E$. On suppose que $u_n \rightarrow u$ faiblement (dans E) et $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que $u_n \rightarrow u$.

Exercice 4.4 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Fatou).

Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \rightarrow f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, quand $n \rightarrow +\infty$.

- 1) On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .
- 2) On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

Exercice 4.5 (Cv faible + cv de la norme donne cv, autre preuve dans L^p , $1 < p < +\infty$).

Soit $(X, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq r \leq +\infty$. On note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ et $\|\cdot\|_r$ la norme dans l'espace L^r .

Soient $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et f un élément de L^p .

On suppose que f_n converge faiblement vers f dans L^p .

On pose $q = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $q = +\infty$ si $p = 1$.

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n g dm = \int f g dm$ pour tout $g \in L^q$.

2) On suppose dans cette question que $p = 2$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$.

Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^2 quand $n \rightarrow +\infty$.

On suppose maintenant que $1 < p < +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

3) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|b|^p - |a|^p = p|a|^{p-2}a(b-a) + \int_0^1 p(p-1)(1-t)|a + t(b-a)|^{p-2}(b-a)^2 dt.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)|^p - |f(x)|^p &= p|f(x)|^{p-2}f(x)(f_n(x) - f(x)) \\ &\quad + \int_0^1 p(p-1)(1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2 dt. \end{aligned}$$

4) Montrer que

$$\int_X \left(\int_0^1 (1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2 dt \right) dm(x) \rightarrow 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ on pose $g_n(x) = \int_0^1 (1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2 dt$.

5) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite, encore notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pour ne pas alourdir les notations), telle que $g_n \rightarrow 0$ p.p. quand $n \rightarrow +\infty$.

6) Soit $x \in X$ tel que $g_n(x) \rightarrow 0$ (quand $n \rightarrow +\infty$). Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

7) Si $f_n \rightarrow f$ p.p. et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

[Utiliser l'exercice 4.4.]

8) Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^p (sans extraction de sous suite).

On suppose maintenant que $p = 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$.

9) Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, strictement convexe, de classe C^2 , sous-linéaire (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ telle que $\varphi'(s) \leq \alpha$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui permet de montrer que $\varphi(g) \in L^1$ pour tout $g \in L^1$) et $\liminf_{s \rightarrow +\infty} s^2 \varphi''(s) > 0$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi(f_n) dm = \int \varphi(f) dm$. Montrer que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 quand $n \rightarrow +\infty$.

[On pourra reprendre la méthode utilisée pour $p > 1$ en remplaçant la fonction $s \mapsto |s|^p$ par φ .]

10) (Contre exemple)

En prenant $(X, \mathcal{T}, m) = (]0, 1[, B(]0, 1[), \lambda)$, donner un exemple pour lequel $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$ et $f_n \not\rightarrow f$ dans L^1 (toujours avec l'hypothèse $f_n \rightarrow f$ faiblement dans L^1).