td5. Dualité, transposé, adjoint, compacité

Exercice 5.1 (Isométrie entre L^q et $(L^p)'$, $1 < p < +\infty$, par la réflexivité)**.**
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $1 < p < +\infty$ et $q = p/(p-1)$. On rappelle que l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est réflexif. Montrer que l'application $f \mapsto \varphi(f)$ donné par $\varphi_f(g) = \int fg\ dm$ est une isométrie de $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ dans $(L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$ (en particulier, elle est donc surjective)
[On pourra utiliser la conséquence suivante du théorème de Hahn-Banach : Si F est un s.e.v. fermé de l'espace de Banach B, alors $F \neq B$ si et seulement si il existe $\psi \in B'$, $\psi \neq 0$ et $\psi(u) = 0$ pour tout $u \in F$.]

Exercice 5.2 (Dualité L^1-L^∞)**.**
Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré $\sigma-$fini. Pour $1 \le r \le +\infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$.
Pour $g \in L^\infty$, on note Φ_g l'élément de $(L^1)'$ défini par $\Phi_g(f) = \int fg\, dm$ pour tout $f \in L^1$. (Vérifier que c'est bien un élément de $(L^1)'$.)
L'objet de cet exercice est de démontrer que l'application $g \mapsto \Phi_g$ est une isométrie de L^∞ dans $(L^1)'$ et, en particulier, qu'elle est surjective (ce qui est le point difficile).

1) Montrer que Φ est une injection (linéaire) de L^∞ dans $(L^1)'$ et que $\|\Phi_g\|_{(L^1)'} = \|g\|_{L^\infty}$ pour tout $g \in L^\infty$. (Pour cette question le caractère σ-fini de m est important, un contre exemple est donné dans l'exercice 5.3.)

Il reste maintenant à montrer que Φ est surjective. On se donne donc $T \in (L^1)'$ et il s'agit de montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T = \Phi_g$.

2) On considère dans cette question le cas où $m(E) < +\infty$.
   (a) Montrer que $L^2 \subset L^1$ et que l'injection canonique de L^2 dans L^1 est continue.
   (b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int fgdm$ pour tout $f \in L^2$.
   [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]
   (c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^∞.
   [prendre $f = sgn(g)1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^1)'}\}$.]
   (d) Si $f \in L^1$, montrer que $f_n = f1_{\{|f| \le n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T(f) = \int fgdm$, pour tout $f \in L^1$.
3) On considère maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Montrer qu'il existe $g \in L^\infty$ t.q. $T = \Phi_g$.
   [Utiliser la question 2 pour une suite croissante d'ensembles de mesure fini recouvrant E.]

Exercice 5.3 (Exemple de non injectivité de L^∞ dans $(L^1)'$)**.** On prend $X = \{0\}$ (l'espace X est donc réduit à un seul élément), $T = \mathcal{P}(X)$ et la mesure m définie par $m(\{0\}) = +\infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, m)$ (pour $1 \le p \le +\infty$).

1) Quelle est la dimension des espaces L^1, L^∞ et $(L^1)'$?

Soit φ l'application définie de L^∞ dans $(L^1)'$ par $f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par $\varphi_f(g) = \int fg\ dm$, pour tout $g \in L^1$.

2) L'application φ est-elle injective ? A-t-on $\|\varphi_f\|_{(L^1)'} = \|f\|_{(L^\infty)}$?
3) L'espace L^1 est-il réflexif ?

Exercice 5.4 (Exemple d'opérateur compact)**.**
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset l^\infty(\mathbb{N})$. Soit $1 \le p \le +\infty$. On considère l'opérateur T de $l^p(\mathbb{R})$ dans lui même défini par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) L'opérateur T est-il continu ?

2) L'opérateur T est-il compact ? (La réponse dépend des valeurs de p et de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'objectif est de préciser cette dépendance.)

3) On suppose $p = 2$.

(a) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donner toutes les valeurs propres et toutes les valeurs spectrales de T.

(b) On suppose $a_n \in]-1, 1[$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Donner toutes les valeurs propres et toutes les valeurs spectrales de T.

Exercice 5.5 (Opérateur transposé, continuité et compacité**).**
Soient E, F deux espaces de Banach (réels) et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour $g \in F'$ on définit $T^t g \in E'$ par $\langle T^t g, u\rangle_{E',E} = \langle g, Tu\rangle_{F',F}$.

1) Vérifier que $T^t g$ est bien un élément de E' pour tout $g \in F'$ et que $T^t \in \mathcal{L}(F', E')$.

2) Montrer que $\|T^t\|_{\mathcal{L}(F',E')} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

On suppose maintenant que T est un opérateur compact, c'est-à-dire que de toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite dont l'image par T converge dans F.
On note $B_E = \{u \in E, \|u\|_E \le 1\}$.

3) Montrer que $T(B_E)$ est précompacte, c.à.d. que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I \subset B_E$ tel que $\mathrm{card}(I) < +\infty$ et

$$T(B_E) = \{T(u), u \in B_E\} \subset \cup_{u\in I} B_F(Tu, \varepsilon),$$

où $B_F(Tu, \varepsilon) = \{v \in F, \|v - Tu\|_F < \varepsilon\}$.

Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on choisit I_p conformément à la question 3 avec $\varepsilon = 1/p$ et on pose $I = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} I_p$ (de sorte que I est dénombrable). Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de F'.

4) Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour cette sous suite, encore notée $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\langle T^t g_n, u\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $u \in I$. [*Utiliser le procédé diagonal.*]

Pour les deux questions suivantes on considère cette sous suite.

5) Montrer que la suite $(\langle T^t g_n, u\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $u \in E$.

6) Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que $T^t g_n \to f$ dans E'.

7) Déduire des questions précédentes que T^t est un opérateur compact.