td6. Valeurs spectrales, valeurs propres, opérateurs adjoints, opérateurs compacts

Exercice 6.1 (T compact implique $T - \lambda I$ non compact)**.**
Soit E un espace de Banach réel de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(E, E)$.
Soit $\lambda \neq 0$, montrer que $(T - \lambda I)$ n'est pas un opérateur compact.
[On pourra, par exemple, utiliser la proposition 5.3.]

Exercice 6.2 (Opérateur compact non nécessairement autoadjoint)**.**
Soit H un espace de Hilbert réel de dimension infinie et $T \in \mathcal{K}(H, H)$.
Dans les questions suivantes, on se limite à $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Soit $\lambda \in vp(T)$, $\lambda \neq 0$.
Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(T - \lambda I) < +\infty$ et que $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ est une s.e.v. fermé de H.

2) Soit $\lambda \in vp(T)$, $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $\lambda \in vp(T)$.

3) Montrer que
(a) $0 \in \sigma(T)$,
(b) si $\sigma(T)$ n'est pas un ensemble fini, alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ avec $\lambda_{n+1} < \lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

[Pour les trois questions, s'inspirer des preuves des théorèmes 6.1 et 6.2.]

Exercice 6.3 (Alternative de Fredholm)**.**
Démontrer la proposition 6.2

Exercice 6.4 ($T^{\star\star} = T$)**.**
Soit H un espace de Hilbert réel et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Montrer que $(T^\star)^\star = T$.

Exercice 6.5 (Surjectif non injectif, injectif non surjectif)**.**
On prend ici $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et on définit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ par

$$\text{Pour } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ T(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{avec } y_0 = 0,\ y_n = x_{n-1} \text{ pour } n \geq 1.$$

1) Calculer $T^\star(x)$ pour tout $x \in \lambda^2(\mathbb{N})$.

2) Donner $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{Ker}(T^\star)$, $\mathrm{Im}(T^\star)$.

3) A-t-on T injectif ?, surjectif ?, $T^\star$ injectif ?, surjectif ?

4) A-t-on $\mathrm{Ker}(T)^\perp = \mathrm{Im}(T^\star)$?, $\mathrm{Ker}(T^\star)^\perp = \mathrm{Im}(T)$?