td8. Exemple de décomposition spectrale

NB : Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Exercice 8.1 (Une fonction à dérivée nulle est constante p.p.)**.**
Soit $u \in L^1_{loc}(]0,1[)$ telle que $Du = 0$, c'est-à-dire telle que $\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$.

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = a$ p.p..

[Suggestion : Soit $\varphi_0 \in C_c^\infty(]0,1[)$ telle que $\int_0^1 \varphi_0(y)dy = 1$.
Pour $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$ on pose $\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)dy - (\int_0^1 \psi(t)dt) \int_0^x \varphi_0(y)dy$. Montrer que $\psi \in C_c^\infty(]0,1[)$ et utiliser $\int_0^1 u(x)\psi'(x)dx = 0$.]

Exercice 8.2 (Régularité en dimension 1)**.** Soit $f \in L^2(]0,1[)$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[), \\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)\,dt = \int_0^1 f(t)v(t)\,dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{8.7}$$

On suppose maintenant que $f \in C([0,1])(\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, pour tout $x \in [0,1]$. On note u la solution de (8.7).

2) Montrer que, pour tout $\varphi \in C_c(]0,1[)$,

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)\,dt = \int_0^1 c\varphi(t)\,dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).

[S'inspirer de la méthode de l'exercice 8.1.]

3) Déduire de la question 2 que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Exercice 8.3 (Décomposition spectrale en dimension 1)**.**
On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (8.7).
On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (8.7), noter que $H_0^1(]0,1[) \subset E$).

1) Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E.
2) Soit $\lambda \in vp(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
3) Montrer que $vp(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\ k \in \mathbb{N}^\star\}$ et $\sigma(T) = vp(T) \cup \{0\}$.
4) Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0,\ \text{quand } n \to \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier.)

5) Soit $\mu \in \mathbb{R}^\star$. En utilisant le fait que T est compact, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$\begin{aligned}
&u \in H_0^1(]0,1[),\\
&\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[).
\end{aligned}$$