td9. Un opérateur linéaire compact autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R})$

L'objectif est cet exercice est de construire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ (cette base est liée à la mécanique quantique...)
Rappel du cours :

— L'espace $H^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ ayant une dérivée faible dans $L^2(\mathbb{R})$.

— Si $u \in H^1(\mathbb{R})$, la classe de fonctions u possède un représentant continu, on identifie (comme d'habitude) u avec ce représentant continu et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)\,dt.$$

Partie I (résultats liminaires)

On pose $H = \{u \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $(x \mapsto x\,u(x)) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Si $u, v \in H$, on pose $(u|v)_H = \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_R x^2u(x)v(x)dx$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)_H$ est un produit scalaire sur H.
   Dans la suite on munit H de ce produit scalaire.
2) Soit A une partie bornée de H.
   (a) Montrer que $\{u(0),\, u \in A\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ [On pourra commencer par remarquer que $|u(0)| \le |u(x)| + \|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}$, pour tout $x \in [-1, 1]$].
   (b) Soit K un compact de $\mathbb{R}$, montrer que $\{u_{|_K},\, u \in A\}$ est une partie relativement compacte de $C(K, \mathbb{R})$.
   (c) Montrer que A est une partie relativement compacte de $L^2(\mathbb{R})$ [Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, On pourra montrer qu'il existe une sous suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $u_n \to u$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, quand $n \to \infty$, puis montrer que $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$].

   Noter que l'on a ainsi montré que l'application $u \mapsto u$ est (linéaire) compacte de H dans $L^2(\mathbb{R})$.
3) Montrer que H, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)_H$, est un espace de Hilbert.
4) Soit $u \in H$. Montrer que $u(x) \to 0$, quand $x \to \pm\infty$.

Partie II (construction d'un opérateur linéaire autoadjoint compact dans $L^2(\mathbb{R})$)

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on cherche $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solution du problème suivant :

$$-u''(x) + x^2u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{9.17}$$
$$u(x) \to 0, \text{ quand } x \to \pm\infty. \tag{9.18}$$

On dit que u est solution faible de (9.17)-(9.18) si u est solution de

$$u \in H, \tag{9.19}$$
$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} x^2u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H. \tag{9.20}$$

L'espace H est défini dans la partie I.

1) Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul u solution de (9.19)-(9.20)

2) Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ (où u est, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la solution de (9.19)-(9.20)) est linéaire autoadjoint compact de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
3) Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la solution de (9.19)-(9.20) appartient à $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est solution de (9.17)-(9.18) au sens classique.

partie III (recherche des v.p. et fonctions propres de T)

On cherche, dans cette partie, les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur T défini dans la partie II.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ t.q. $Tf = \lambda f$. On pose $u = Tf$.

1) Montrer que $\lambda > 0$. On pose, dans la suite, $\mu = \frac{1}{\lambda}$.
2) Montrer que $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $u = Tf$), que u vérifie $-u''(x) + x^2 u(x) = \mu u(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $u(x) \to 0$, quand $x \to \pm\infty$.
3) Soit $v \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $-v''(x) + x^2 v(x) = \mu v(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une série entière, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, de rayon de convergence égal à $+\infty$, entièrement déterminée (de manière explicite) par a_0 , a_1 et μ, t.q. $v(x) = e^{-x^2/2}(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que, si v est non identiquement nulle, on a alors :
   $(v(x) \to 0$, quand $x \to \pm\infty) \Rightarrow \mu \in \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$.
4) Déduire de la question précécente qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu = 2k + 1$, et montrer que $u(x) = ae^{-x^2/2} h_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (avec un certain $a \in \mathbb{R}$) où h_k est un polynôme de degré k, “unitaire” (c.a.d. s'écrivant sous la forme $x^k + q(x)$, où $q(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à k), que l'on peut calculer explicitement.
   Montrer que, pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bien choisie, la suite de fonctions $(a_n e^{-(\cdot)^2/2} h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
   Les polynômes h_n, $n \in \mathbb{N}$, s'appellent “polynômes" de Hermitte.