Universités d'Aix-Marseille 1, 2 et 3

EXAMEN SESSION 2 - ANALYSE DE FOURIER

MASTER 1 - MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS - 2006-07

Mercredi 13 juin 2007

Dans toute l'épreuve, on adopte la convention pour tout $p \in [1, \infty[$, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dm_n(x)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

où $dm_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dx$. On rappelle que la transformée de Fourier pour une fonction f dans l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_n(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ dm_n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On rappelle aussi que pour $s \geq 0$, l'espace de Sobolev H^s est défini par

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}); \xi \mapsto |\xi|^s \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\},$$

sa norme associée est donnée par

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\xi \mapsto |\xi|^s \hat{f}(\xi)\|_2.$$

Exercice 1. Soit $n \geq 2$.

1. Soit $f \in \mathscr{S}_n$. Pour $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on pose
$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(t, y)\ dm_1(t) \quad \text{et} \quad h(y) = f(0, y).$$
   (*a*) Montrer que $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{C})$.
   (*b*) Montrer que $g \in \mathscr{S}_{n-1}$.
   (*c*) Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$,
$$\mathcal{F}_{n-1}(g)(\eta) = \mathcal{F}_n(f)(\xi) \quad \text{avec } \xi = (0, \eta).$$
   (*d*) Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_n(f)(t, \eta)\ dm_1(t) = \mathcal{F}_{n-1}(h)(\eta) \quad \text{pour tout } \eta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$
   [*On pourra utiliser la question précédente.*]
2. Soit $s, \overline{s} \in \mathbb{R}$ avec $s > \frac{1}{2}$ et $0 \leq \overline{s} < s - \frac{1}{2}$.
   (*a*) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de s, $\overline{s}$ et n) telle que
$$\|f(0, \cdot)\|_{H^{\overline{s}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}_n.$$
   (*b*) Montrer qu'il existe un opérateur linéaire continu, noté γ, de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{\overline{s}}(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$,
$$\gamma f = f(0, \cdot) \ \ p.p. \quad \text{(pour la mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}^{n-1}).$$
   On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que, si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ telle que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ et $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2 (Échantillonnage)**.** On se place ici en dimension $n = 1$. Soit $a > 0$. On note $\chi_{[-a,a]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-a, a]$.

1. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. On définit $\tau_y(f)(x) = f(x-y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de $\mathcal{F}(\tau_y(f))$ en fonction de $\hat{f}$.
2. (a) Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{a}\,\chi_{[-a,a]}$. On note $\phi_a = \mathcal{F}(\frac{1}{a}\,\chi_{[-a,a]})$. Montrer que $\mathcal{F}(\hat{\phi}_a) = \phi_a$.
   (b) Soit $\mathcal{H}_\pi = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \hat{f}(\xi) = 0 \text{ pour } |\xi| > \pi\}$. Montrer que $\mathcal{H}_\pi$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\tau_y(\phi_\pi) \in \mathcal{H}_\pi$. On pourra calculer $\mathcal{F}(\tau_y(\phi_\pi))$ en utilisant la question 1.
3. (a) On pose $\psi_k = \tau_k(\phi_\pi)$ Montrer que la famille $\{\psi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est orthogonale dans $\mathcal{H}_\pi$. Calculer $\|\psi_k\|_2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{H}_\pi$. Montrer que
   $$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|_2}.$$
   On précisera en particulier en quel sens cette série est convergente. Cette formule s'appelle "formule d'échantillonnage".