Universités d'Aix-Marseille 1, 2 et 3

EXAMEN SESSION 1 - ANALYSE DE FOURIER

MASTER 1 - MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS - 2006-07

Mercredi 10 janvier 2007 - 14h – 17h

Dans toute l'épreuve, on adopte la convention pour tout $p \in [1, \infty[$, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dm_n(x)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

où $dm_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}dx$. On rappelle que la transformée de Fourier pour une fonction f dans l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ dm_n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 1. Soit $n \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ avec la mesure dm_n.

1. Soit $f \in \mathscr{S}_n$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.
2. Soit $f \in L^1$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.
3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. On rappelle que pour une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ radiale, c'est-à-dire que $\phi(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on a pour tout $R > 0$ (éventuellement $R = \infty$)

$$\int_{B(0,R)} \phi(x) dm_n(x) = \sigma_n \int_0^R r^{n-1}\psi(r)dr,$$

où $B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R\}$ ($B(0, R) = \mathbb{R}^n$ si $R = \infty$) et σ_n est une constante ne dépendant que de n.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leq \frac{A}{(1+|x|^2)^n}$ pour une constante $A > 0$.

1. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et donner l'expression de $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ et $M > 0$ tels que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|^{n+\alpha}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Le but de cette question est de montrer que

$$|f(x + h) - f(x)| \leq c|h|^\alpha, \quad x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

   (a) Montrer que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ grâce à (**??**). En déduire que $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, donner l'expression de $f(x+h)-f(x)$ en fonction d'une intégrale faisant intervenir $\hat{f}$.
   (c) Montrer que pour $h, \xi \in \mathbb{R}^n$ on a $|e^{i\xi\cdot h} - 1| \leq |\xi||h|$.
   (d) En remarquant que $\mathbb{R}^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leq \frac{1}{|h|}\} \cup \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \geq \frac{1}{|h|}\}$, montrer (**??**).
3. Que peut-on dire si (**??**) est vérifié pour $\alpha = 1$?