Universités d'Aix-Marseille 1, 2 et 3

PARTIEL D'ANALYSE DE FOURIER

MASTER 1 - MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS - 2006-07

Mercredi 8 novembre 2006 - 16h – 18h

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale.

Dans toute l'épreuve, on adopte la convention pour tout $p \in [1, \infty[$, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dm_n(x) \Big)^{\frac{1}{p}},$$

où $dm_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dx$. On rappelle que la transformée de Fourier pour une fonction f dans l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ dm_n(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On note $f \star g$ la convolution entre les deux fonctions f et g, c'est-à-dire

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

Exercice 1. On se place dans cet exercice en dimension 1.

1. Montrer que pour tout $\psi \in \mathscr{S}_1$, on a
$$\|\psi'\|_2 = \|\xi \mapsto \xi \hat{\psi}(\xi)\|_2.$$
2. Soit $\varphi \in \mathscr{S}_1$ telle que $\|\varphi\|_2 = 1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que
$$\int_{\mathbb{R}} \Big(x\varphi'(x)\overline{\varphi(x)} + x\overline{\varphi'(x)}\varphi(x) \Big) dm_1(x) = -1$$
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer alors que
$$\|x \mapsto x\varphi(x)\|_2 \|\varphi'\|_2 \geq \frac{1}{2}.$$
4. Déduire des questions 1 et 3 que
$$\Big(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \Big) \geq \frac{\pi}{2}.$$
5. Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité de la question 4 si et seulement si φ est de la forme
$$\varphi(x) = \alpha \exp(-\tfrac{\alpha^4 x^2}{4}), \quad x \in \mathbb{R},$$
avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
6. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\xi_0 \in \mathbb{R}$, on a
$$\Big(\int_{\mathbb{R}} (x-x_0)^2 |\varphi(x)|^2 dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\xi_0)^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \Big) \geq \frac{\pi}{2}.$$
Indication : On pourra remplacer dans ce qui précède (questions 2 à 4) φ par la fonction $x \mapsto e^{-ix\xi_0}\varphi(x+x_0)$.

Exercice 2. 1. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) Montrer que $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Montrer alors que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\ dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\ dm_n.$$

2. On se place maintenant en dimension 1. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On note 1_B la fonction qui vaut 1 sur B et 0 ailleurs. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1_B \star 1_B(x) = (1 - |x|)^+ = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}.$$

3. Soit $n \geq 1$. On note $\theta_n(x) = (1 - \frac{|x|}{n})^+$. Déduire de la question précédente l'expression de $\widehat{\theta}_n$. Montrer que

$$\widehat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On pourra remarquer que $\theta_n(x) = \theta_1(\frac{x}{n})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(y) \in [0, +\infty[$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et donc que le théorème d'inversion s'applique.

(i) Pour $n \geq 1$, on note $\varphi_n = \theta_n \hat{f}$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(\varphi_n(y))_{n \geq 1}$ est une suite croissante qui converge vers $\hat{f}(y)$.

(ii) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta_n(x)dx$ est indépendante de $n \geq 1$.

(iii) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)dy\right)_{n \geq 1}$ est majorée.

(iv) Montrer alors que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)dy = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)dy$.