Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Analyse de Fourier, TD 2, Octobre 2006

Exercice 1 (Fourier sur $L^1 \cap L^2$)

Soit $d \geq 1$. La transformée de Fourier a d'abord été définie pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de f, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, est notée $\hat{f}$ (elle appartient à $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$). Puis, en remarquant que $\mathcal{S}_d \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ pour tout $f \in \mathcal{S}_d$, on a pu définir (grâce à la densité de $\mathcal{S}_d$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) la transformée de Fourier de f lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on la note $\mathcal{F}(f)$ (et on a $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^d)$).

Montrer que $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ p.p. si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2 ($f \in C_c^\infty$ et $\hat{f} = 0$ sur un ouvert non vide implique $f = 0$)

Soit $d \geq 1$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{f} = 0$ sur U. Montrer que $f = 0$ sur tout $\mathbb{R}^d$. [On pourra se limiter au cas $d = 1$ et commencer par montrer que l'application $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto \int f(x) e^{-ix(\xi + i\eta)dx}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{C}$.]

Exercice 3 (Multiplication $C^\infty - \mathcal{D}'$)

Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On définit l'application ψT de C_c^∞ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\psi T(\phi) = \langle T, \psi\phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1. Montrer que ψT est bien définie et appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. On suppose ici que $k \in \mathbb{N}$ et $T = \delta_0^{(k)}$. Montrer que $\psi T = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \psi^j(0)(-1)^j \delta_0^{(k-j)}$.

Exercice 4 (Dérivée classique et dérivée distribution)

Soit $m \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\})$. On suppose qu'en tout point x_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, f admet une limite à droite et une une limite à gauche notée $f_d(x_i)$ et $f_g(x_i)$. On suppose aussi que la dérivée classique de f (qui existe en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$) appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. On note g cette dérivée classique de f.

1. Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
2. On note Df la dérivée au sens des distributions de f (on a donc identifié f avec la distribution qu'elle représente). Montrer que

$$Df = g + \sum_{i=1}^{m} (f_d(x_i) - f_g(x_i))\delta_{x_i}.$$

Exercice 5 (Distribution à support ponctuel)

Soit $d \geq 1$ et $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution dont le support est réduit à $\{0\}$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ t.q., pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$,

$$|\langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\, |\alpha| \leq N} \sup_{|x| \leq 1} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

[On se donne une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\phi = 1$ sur la boule de centre 0 et de rayon 1 et $\phi = 0$ hors de la boule de centre 0 et de rayon 2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\phi_n(x) = \phi(nx)$. On pourra commencer par remarquer que $\langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle F, \varphi\phi_2 \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$.]

2. On suppose, dans cette question, que $N = 0$, où N est l'entier trouvé à la question précédente.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi(0) = 0$. Montrer que $\langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$. [On pourra remarquer que $\langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle F, \varphi \phi_n \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.]

(b) Montrer qu'il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $F = c_0 \delta_0$.

3. On ne suppose plus que $N = 0$ (où N est l'entier trouvé à la question 1).

   (a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $D^\alpha \varphi(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq N$. Montrer qu'il existe c_n t.q. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ et :
   $$x \in B_{\frac{1}{n}},\ |\alpha| \leq N \Rightarrow |D^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{c_n}{n^{N-|\alpha|}}.$$
   En déduire que $\langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$.

   (b) Montrer qu'il existe $C_\alpha \in \mathbb{R}$ (pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ t;q. $|\alpha| \leq N$) t.q.
   $$F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta_0.$$

Exercice 6 (Convolution $C_c^\infty - \mathcal{D}'$)

Soit $d \geq 1$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $F \star \psi(x)$ par :
$$F \star \psi(x) = \langle F, \psi(x - \cdot) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

1. On suppose, dans cette question, que F est représentée par une fonction appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, encore notée F, montrer que
$$F \star \psi(x) = \int F(y)\psi(x-y)dy, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

2. Montrer que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, montrer que $D^\alpha(F \star \psi) = (D^\alpha F) \star \psi = F \star (D^\alpha \psi)$.

4. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\varphi \star (\psi(-\cdot)) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que
$$\int (F \star \psi(x))\varphi(x)dx = \langle F, \varphi \star (\psi(-\cdot)) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$