Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Analyse de Fourier, TD 3, Octobre 2006

Exercice 1 (Transformée de Fourier d'une mesure)
Soit $d \geq 1$ et m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}^d$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-it\cdot x}$ appartient à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$.

   On définit $\hat{m}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ par la formule:

$$\hat{m}(t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-it\cdot x} dm(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

2. Si m a une densité, notée f, par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire $m = f\lambda_d$), montrer que $\hat{m} = \hat{f}$.
3. Soit μ une autre mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\hat{m} = \hat{\mu}$. Montrer que $m = \mu$. [On pourra introduire la mesure $m - \mu$ et montrer tout d'abord que $\int \varphi d(m - \mu) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_d$.]
4. On suppose maintenant que $\hat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et exprimer cette densité à partir de $\hat{m}$.

Exercice 2 (Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'_d$ versus L^2)
Soit $d \geq 1$. Pour $f \in L^2 = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, on note T_f l'élément de $\mathcal{S}'_d$ défini par :

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{S}_d.$$

(En pratique, on "confond" f et T_f, ce qui peut s'expliquer en remarquant que, pour $f, g \in L^2$, $T_f = T_g \Rightarrow f = g$ p.p.)

Montrer que $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$, pour tout $f \in L^2$.

Exercice 3 (Distributions tempérées)
Soit $d \geq 1$.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que T est à support compact. Montrer que T est une distribution tempérée (c'est-à-dire que T se prolonge, de manière unique, en un élément de $\mathcal{S}'_d$).

   On déisigne par $\mathcal{L}^1_{loc}$ l'ensemble des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. L'espace L^1_{loc} est alors l'espace $\mathcal{L}^1_{loc}$ quotienté par la relation déquivalence "= p.p.". (Comme d'habitude on confond alors un élément de $\mathcal{L}^1_{loc}$ avec la classe déquivalence à laquelle il appartient.)

   On dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}$ est tempérée si la distribution qu'elle définit est une distribution tempérée,

2. Soit $f \in L^1_{loc}$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{Z}$ t.q. $\int (1 + |x|)^N |f(x)|\, dx < \infty$. Montrer que f est tempérée.
3. On se limite maintenant au cas $d = 1$. Soit $a \in \mathbb{C}$. On pose $f(x) = e^{ax}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est tempérée si et seulement si $a \in i\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Fonctions à croissance lente)

Soit $d \geq 1$. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. On dit que ψ est "à croissance lente" si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe $N(\alpha) \in \mathbb{N}$ et $C_\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{N(\alpha)}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ à croissance lente. Montrer que $\psi\phi \in \mathcal{S}_d$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}_d$.
2. Soit $F \in \mathcal{S}'_d$ et $\psi \in \mathcal{S}_d$. Montrer que l'on peut définir $F \star \psi$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, en posant $F \star \psi(x) = \langle F, \psi(x - \cdot) \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d}$. Montrer que $F \star \psi$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et est à croissance lente. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_d$. montrer que
$$\int (F \star \psi) \varphi \, dx = \langle F, \psi \star \varphi(-\cdot) \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d}.$$

Exercice 5 (Opérations dans $\mathcal{S}'_d$)

Soit $d \geq 1$ et $F \in \mathcal{S}'_d$.

1. Pour $y \in \mathbb{R}^d$, on définit $\tau_y F \in \mathcal{S}'_d$ par $\langle \tau_y F, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d} = \langle F, \tau_{-y} \varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d}$. Si $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est à croissance lente, on définit $\psi F \in \mathcal{S}'_d$ par $\langle \psi F, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d} = \langle F, \psi\varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d}$.

   Pour $y \in \mathbb{R}^d$, montrer (avec les notations du cours) que $\mathcal{F}(\tau_y F) = e_{-y} \mathcal{F}(F)$ et que $\tau_y \mathcal{F}(F) = \mathcal{F}(e_y F)$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Montrer que $\mathcal{F}(D_\alpha F) = (\cdot)^\alpha \mathcal{F}(F)$ et que $\mathcal{F}((-\cdot)^\alpha F) = D_\alpha(\mathcal{F}(F))$.
3. Soit $\psi \in \mathcal{S}_d$ Montrer que $\mathcal{F}(F \star \psi) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(\psi) \mathcal{F}(F)$. (Attention : la notation est ici légérement différente du cours.)

Exercice 6 (Distribution à support compact)

Soit $d \geq 1$. On note $\mathcal{E}'$ l'espace de distributions à support compact (c'est le dual de $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, muni d'une topologie "convenable".)

1. Soit $F \in \mathcal{E}'$. On a déjà vu que $T \in \mathcal{S}'_d$ (donc $\hat{F}$ est bien définie). Montrer que $\hat{F}$ est à croissance lente, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$:
$$\hat{F}(t) = (2\pi)^{-d/2} \langle F, e_{-t} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}.$$
2. On note δ_0 l'élément de $\mathcal{E}'$ défini par $\langle \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} = \varphi(0)$. Calculer la transformée de Fourier de δ_0 et de ses dérivées.

Exercice 7 (Théorème de Liouville)

Soit $d \geq 1$ et P un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ dont le seul zero sur $\mathbb{R}^d$ est 0.

1. Soit $F \in \mathcal{S}'_d$. On suppose que $P(D)F = 0$. Montrer que le support de $\hat{F}$ est inclus dans $\{0\}$. En déduire que F est un polynôme.
2. Soit f une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $P(D)f = 0$ (on a ici confondu f avec la distribution qu'elle représente). Montrer que f une constante (ceci est le théorème de Liouville si $P(D) = \Delta$ ou $\partial_x + i\partial_y$).