Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Analyse de Fourier, TD 4, Novembre 2006

Soit $d \geq 1$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. On note aussi L^1_{loc} l'ensemble des (classes de) fonctions f t.q. $f 1_K \in L^1$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ (de sorte que $L^p \subset L^1_{loc}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$).

Soit $f \in L^1_{loc}$. On rappelle que l'on confond f et l'élément T_f de $\mathcal{D}'$ défini par $T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int f\varphi dx$ (pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$). Si T_f se prolonge en un élément de $\mathcal{S}'_d$ (ce prolongement est alors unique), on confond aussi f avec ce prolongement.

Exercice 1 (Caratérisation de H^s, $s \geq 0$)
Soit $f \in \mathcal{S}'_d$ ($d \geq 1$). On rappelle que, pour $s \in \mathbb{R}$, on définit $H^s(\mathbb{R}^d)$ par :

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{S}'_d \text{ t.q. } \hat{f} \in L^1_{loc} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty\}.$$

1. Montrer que $L^p \subset \mathcal{S}'_d$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\mathcal{S}_d \subset \mathcal{S}'_d$.
2. Montrer que $L^1_{loc} \not\subset \mathcal{S}'_d$.
3. Soit $s \geq 0$. Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty\}$.

Exercice 2 (Quelques propriétés de H^s)
Soit $d \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $H^t = H^t(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_d \subset H^s$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_d$ est dense dans H^s.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Montrer D^α est une application linéaire continue de H^s dans $H^{s-|\alpha|}$.

Exercice 3 (Caractérisation de H^s pour $s \in \mathbb{N}$)
Soit $d \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Il a été vu en cours que :

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \ D^\alpha f \in L^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ |\alpha| \leq k\}.$$

Montrer que la norme de H^k est équivente à la norme

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|^2_{L^2}.$$

(Cette norme est aussi induite par un produit scalaire.)

Exercice 4 (Théorème d'injection de Sobolev)
Soit $d \geq 1$. On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel fermé de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, muni de la norme $\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$. Avec cette norme, $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $C_0^k = \{f \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}); \ D^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ |\alpha| \leq k\}$. On munit C_0^k de la norme :

$$\|f\|_{u,k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_u.$$

1. Soit $s > \frac{d}{2}$.
   (a) Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\hat{f} \in L^1$. En déduire que $f \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

(b) Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et qu'il existe C_s, ne dépendant que de s et d, t.q. :

$$\|f\|_u \leq C_k \|f\|_{H^s} \text{ pour tout } f \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s > k + \frac{d}{2}$.
   (a) Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$. Montrer que $\mathcal{F}(D^\alpha f) \in L^1$. En déduire que $f \in C_0^k$.
   (b) Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et qu'il existe $C_{k,s}$, ne dépendant que de s, k et d, t.q. :

$$\|f\|_{u,k} \leq C_{k,s} \|f\|_{H^s} \text{ pour tout } f \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

3. Montrer $\cap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

Exercice 5 (Compacité de H^s dans L^2_{loc})

Soit $d \geq 1$. On rappelle le résultat suivant (théorème de Kolmogorov, cours d'intégration) :

Soit A une partie bornée de L^2 t.q. $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^2} \to 0$, quand $h \to 0$, uniformément par rapport à $f \in A$. Alors A est relativement compacte dans L^2_{loc}, c'est-à-dire que de toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ on peut extraire une sous suite, encore notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^2$ t.q. $f_n 1_K \to f 1_K$ dans L^2, quand $n \to \infty$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$.

Soit $s > 0$. Montrer que toute partie bornée de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est relativement compacte dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 6 (Exemple d'opérateur dans H^s)

Soit $d \geq 1$.

1. Montrer que $(1 + |\xi|^2)^s (1 + |\eta|^2)^{-s} \leq 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|}$, pour tout ξ, $\eta \in \mathbb{R}^d$ et tout $s \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Montrer que $\phi \in \mathcal{S}'_d$.
3. Soit $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. On suppose que $\hat{\phi} \in L^1_{loc}$ et qu'il existe $a > 0$ t.q. :

$$\int (1 + |\xi|^2)^{\frac{a}{2}} |\hat{\phi}(\xi)| d\xi < \infty.$$

   Montrer que l'application $f \mapsto \phi f$ est linéaire continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout s t.q. $|s| \leq a$.
4. Soit $\phi \in \mathcal{S}_d$. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ l'application $f \mapsto \phi f$ est elle linéaire continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$?