Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Analyse de Fourier, TD 5, Décembre 2006

On note toujours $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Exercice 1 (Régularité pour une équation elliptique, un exemple simple)
Soit $d \geq 1$. On s'intéresse ici à l'équation

$$u - \Delta u = f \tag{1}$$

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et que $u \in \mathcal{S}'_d$ est solution de (1) au sens des distributions, c'est-à-dire que :

   $$\langle u, \varphi - \Delta\varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d}, \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

   Montrer que $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant (1) au sens des distributions (on rappelle que, pour $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\langle v, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d} = \langle v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int v(x)\varphi(x)dx$).

   On suppose sur $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. En déduire que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

3. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ vérifiant (1) en tout point de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

4. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $u \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (ou $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$) vérifiant (1) au sens des distributions, c'est-à-dire que :

   $$\int u(x)(\varphi(x) - \Delta\varphi(x))dx = \int f(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

   Montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

Exercice 2 (Unicité pour une équation elliptique, un exemple simple)
Soit $d \geq 1$. On s'intéresse maintenant à l'unicité pour l'équation (1).

1. Soit $f \in \mathcal{S}'_d$ et $u_1, u_2 \in \mathcal{S}'_d$ deux solutions (1) au sens des distributtions. Montrer que $u_1 - u_2$ est solution de (1) (au sens des distributions) avec $f = 0$. Montrer que $u_1 = u_2$.

2. Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}_d, \mathbb{R})$ une fonction à croissance lente (voir le td 3) t.q. $u(x) - \Delta u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

3. Donner un exemple de fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ non nulle et t.q. $u(x) - \Delta u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. [On pourra commencer par le cas $d = 1$.]

Exercice 3 (Le Laplacien n'a pas de valeurs propres dans $L^2(\mathbb{R}^d)$)
Soit $d \geq 1$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ t.q. $-\Delta u = au$ au sens des distributions. Montrer que $u = 0$ p.p..

2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $-\Delta u = au$ au sens des distributions (ce qui est ici équivalent à $-\Delta u(x) = au(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$).

3. Soit $u \in \mathcal{S}'_d$ t.q. $-\Delta u = 0$ au sens des distributions. Montrer que u est un polynôme, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme P t.q.

   $$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'_d, \mathcal{S}_d} = \int P(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{S}_d.$$

Exercice 4 (Quelques rappels sur la Masse de Dirac)

Soit $d \geq 1$. On note δ la distribution définie par $\langle \delta, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \varphi(0)$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

1. Montrer que δ se prolonge (de manière unique) en un élément de $\mathcal{S}'_d$ (encore noté δ).
2. Que vaut $\hat{\delta}$?
3. Pour quel s a t-on $\delta \in H^s(\mathbb{R}^d)$?

Exercice 5 (Régularité locale pour une équation elliptique)

Soit $d \geq 1$ et $P(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On a donc $m \in N$ et $c_\alpha \in \mathbb{C}$ pour tout α. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^d$ t.q. $c_\alpha \neq 0$ et $|\alpha| = m$. Le degré de l'opérateur est donc m. *Le symbole principale* de $P(D)$ est défini comme

$$P_m(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = m} c_\alpha \xi^\alpha.$$

On dit que $P(D)$ est *elliptique* si $P_m(\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

1. Donner un exemple d'opérateur elliptique.
2. Montrer que $P(D)$ est elliptique si et seulement si il existe $C, R > 0$ t.q. $|P(\xi)| \geq C|\xi|^m$ pour $|\xi| \geq R$.
3. On suppose que $P(D)$ est elliptique, $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $P(D)u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d)$.
4. On suppose que $P(D)$ est elliptique, et que $u \in \mathcal{D}'$.
   (a) Soit $s \in \mathbb{R}$ t.q. $v = P(D)u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $v\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$). Montrer que $u \in H^{s+m}_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
   (b) On suppose que $P(D)u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
5. Retrouver ainsi les résultats du premier exercice de cette feuille.