

Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Analyse de Fourier, TD 1, Septembre 2007

Exercice 1 (Suites de Cauchy dans $\mathcal{S}_d$)

Soit E un espace vectoriel sur K , avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille de semi-normes sur E . On rappelle les deux définitions suivantes :

- Une partie O de E est un ouvert de E , muni de la famille $\mathcal{P}$, si pour tout $u \in O$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ t.q. $\cap_{i=0}^n \{v, p_i(v - u) \leq \varepsilon\} \subset O$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est de Cauchy pour $\mathcal{P}$ si pour tout ouvert O de E , contenant 0, il existe n_0 t.q. :

$$p, q \geq n_0 \Rightarrow u_p - u_q \in O.$$

On rappelle aussi qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble et d'une famille de parties de cet ensemble, appelée "famille des ouverts". Cette famille peut être définie à partir d'une norme, d'une distance, d'une famille de semi-normes etc...

1. Soit d une distance sur E , invariante par translation, induisant sur E les mêmes ouverts que $\mathcal{P}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\mathcal{P}$ si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour d . (Ceci peut être faux sans l'hypothèse d'invariance par translation, comme le montre l'exercice 2.)
2. On suppose que E , muni de la topologie induite par $\mathcal{P}$, est séparé. Donner sur E une distance invariante par translation induisant sur E les mêmes ouverts que ceux donnés par $\mathcal{P}$.
3. Soit $d \geq 1$. On prend ici $E = \mathcal{S}_d$ (vu en cours) et pour $\mathcal{P}$ la famille de semi-normes vue en cours. Montrer que $\mathcal{S}_d$ est complet (i.e. que toute suite de Cauchy est convergente). [On pourra commencer par montrer le résultat suivant : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f_n \rightarrow f$ et $f'_n \rightarrow g$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g = f'$.]

Exercice 2 (la complétude n'est pas une notion topologique)

Soit φ une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$.

1. Montrer que d_1 et d_2 induisent la même topologie sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les mêmes ouverts).
2. On suppose ici φ a une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas complet avec la distance d_2 (on rappelle qu'il est coimplet avec la distance d_1). [On pourra donner explicitement une suite de Cauchy non convergente.]

Exercice 3 (Caractérisation de $\mathcal{S}_d$)

Soit $d \geq 1$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathcal{S}_d$,
2. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \mapsto x^\beta D^\alpha f(x)$ est bornée,
3. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, la fonction $x \mapsto D^\alpha(x^\beta f(x))$ est bornée.

Exercice 4 (Quelques propriétés de $\mathcal{S}_d$)

1. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}_d \subset L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d)$. A-t-on densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{S}_d$ (pour la topologie de $\mathcal{S}_d$) et densité de $\mathcal{S}_d$ dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d)$ (pour la topologie de $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d)$) ?
2. Soit $f, g \in \mathcal{S}_d$ et P un polynôme.

- (a) Montrer que toutes les dérivées de f sont dans $\mathcal{S}_d$.
- (b) Montrer que $Pf \in \mathcal{S}_d$ et que $gf \in \mathcal{S}_d$.
3. Le polynôme P peut s'écrire $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha$ (avec un certain $m \in \mathbb{N}$). Montrer que $P(D)f = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.

Exercice 5 (la convolution est une opération interne dans $\mathcal{S}_d$)

Soit $d \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{S}_d$. Montrer que $f \star g \in \mathcal{S}_d$.

Exercice 6 (Petit lemme...)

Soit $d \geq 1$ et $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\int \hat{f}(x)g(x)dx = \int f(x)\hat{g}(x)dx$.

Exercice 7 (Inversion partielle dans L^1 de la transformée de Fourier)

Soit $d \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ (on rappelle que en général $\hat{f} \notin L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$). On va démontrer dans cet exercice que $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ p.p., c'est-à-dire :

$$f(t) = \int \hat{f}(x)e^{ixt}dm_d(x), \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

On rappelle (voir cours) que $m_d = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\lambda_d$.

On prend ci dessous $d = 1$ (pour simplifier...). Soit $H(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)e^{itx}dt, x \in \mathbb{R}.$$

$$1. \text{ Montrer que } h_\lambda(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}, \text{ et } \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f \star h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\hat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

3. Soit g une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0; montrer que $g \star h_\lambda(0) \rightarrow \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \rightarrow 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\|f \star h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow 0.$$

[Utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)|dx$.]

5. Dédire de ce qui précède le résultat annoncé (c'est-à-dire que $f = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ p.p. si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$).

Une conséquence de ce résultat est l'injectivité de la transformée de Fourier dans L^1 . En effet, soit $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\widehat{f} = \widehat{g}$. On a alors, par linéarité, $\widehat{f - g} = 0$ et donc $\widehat{f - g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. En appliquant le résultat démontré dans cet exercice, on a donc $f = g$ p.p..