TD6. Loi des grands nombres. Convergence en loi. TCL

Exercice 1: Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d positives telle que $\mathbb{E}(|\log(X_1)|) < +\infty$. Montrez que le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 1}(X_1 \dots X_n)z^n$ est presque sûrement constant. Calculez R lorsque X_1 suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2: Quelques fonctions caractéristiques.
Calculez les fonctions caractéristiques des lois suivantes :

1. la loi exponentielle de densité $\mathbb{1}_{x\geq 0}\exp(-x)$;
2. la loi exponentielle symétrique de densité $\dfrac{1}{2}\exp(-|x|)$;
3. la loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$;
4. la loi uniforme sur $[-a,a]$;
5. la loi gaussienne standard.

Exercice 3: Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a avec $X_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$ et $np_n \to \lambda > 0$. Montrez que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 4: Soit X une variable de Cauchy, et $(X_n)_{\nu\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d de même loi que X. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrez que $\dfrac{S_n}{n}$ converge en loi, mais pas en probabilité.

Exercice 5: Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d de densité $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\ \mathbb{1}_{|x|\leq 1}$. On pose $\xi_n = \max(X_1,\cdots,X_n)$.

1. Montrez que ξ_n tend vers 1 p.s. quand $n\to\infty$.
2. Montrez que $\sqrt{n}(1-\xi_n)$ converge en loi et donner l'expression de la densité de la loi limite.

Exercice 6: Théorème Central limite.

1. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\left|e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2}\right| \leq C\min(t^2, |t|^3)\,.$$
2. Soit $(X_n)_{\nu\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d telle que $E(X_1)=0$ et $E(X_1^2)=1$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrez que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $X\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 7: Soit $(\eta_n)_{\nu\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d telle que $E(\eta_1)=0$ et $E(\eta_1^2)=1$. Pour tout $n\geq 1$, on pose
$$Y_n = \eta_n + \frac{1}{n+1}\eta_{n+1} + \frac{1}{n+2}\eta_{n+2}\,;\ S_n\sum_{i=1}^{n} Y_i\,.$$
Montrez que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n\to\infty$ et trouvez sa limite.

Exercice 8: Convergence en loi et convergence des moments.

1. Montrez que $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(it)^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^l}{l!}$
2. Soit X une variable aléatoire telle que $E(e^{\lambda|X|}) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$. Soit (X_n) une suite de v.a ayant des moments de tous ordres. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X_n^k) \to E(X^k)$. Montrez que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. On pourra d'abord montrer que si l est pair,

$$\overline{\lim} \left| E(e^{itX_n}) - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) \right| \leq \frac{|t|^l}{l!} E(X^l)$$

Exercice 9: On suppose que les $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sont indépendantes et que pour tout n, $X_n \sim N(0,1)$. On pose $U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_{2i+1}}{X_{2i+2}}$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Montrez que $\frac{U_n}{V_n}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ et précisez sa loi limite.