Université de Provence
Master de Mathématiques 2006-2007

Probabilités : devoir No 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut démontrer le théorème suivant:

Theorem 0.1 *Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X si et seulement si il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.*

a. Montrez que si Y est de la forme $Y = f(X)$ pour une certaine fonction mesurable f alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

corrigé

On rappelle que la tribu engendrée par X est $\tau(X) = \{X^{-1}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$. Comme f est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne), on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \tau(X)$. Ce qui prouve que T est $\tau(X)$-mesurable.

A partir de maintenant, on suppose Y $\tau(X)$-mesurable.

b. On suppose qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$Y = \sum_j a_j 1_{A_j} \,. \tag{1}$$

On suppose aussi que $\cup_j A_j = \Omega$. Montrez que, pour tout j, $A_j \in \tau(X)$ et qu'il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$.

corrigé

Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme les A_i sont disjoints deux à deux, $a_i \neq a_k$ si $i \neq k$ et $\cup_i A_i = \Omega$, on a $A_j = Y^{-1}(\{a_j\})$. Comme $\{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et Y est τ-mesurable, on en déduit que $A_j \in \tau(X)$. (On rappelle aussi que $\tau(X) \subset \mathcal{A}$ car X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.)

Pour tout i, il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A_i = X^{-1}(B_i)$ (car $A_i \in \tau(X)$). Comme les A_i sont disjoints deux à deux, on a, si $i \neq j$, $B_i \cap B_j \cap \operatorname{Im}(X) = \emptyset$ (avec $\operatorname{Im}(X) = \{X(\omega),\, \omega \in \Omega\}$). On peut donc supposer les B_i disjoints deux à deux en remplaçant chaque B_i $(i > 0)$ par $B_i \setminus \cup_{j<i} B_j$.

On pose $f = \sum_i a_i 1_{B_i}$. La fonction f est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\omega \in \Omega$, il existe i t.q. $\omega \in A_i$ (car $\Omega = \cup_i A_i$), on a donc $X(w) \in B_i$ et donc $f(X(\omega)) = a_i = Y(\omega)$. Ce qui donne bien $f(X) = Y$.

Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par: $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[.]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

c. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $0 \leq nx - [nx] < 1$ et donc $0 \leq x - \phi_n(x) < \frac{1}{n}$. Ce qui prouve que $\phi_n(x) \to x$ quand $n \to \infty$.

On pose $Y_n = \phi_n(Y)$.

d. Montrez que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.

corrigé

On remarque tout d'abord que ϕ_1 est borélienne. En effet, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\phi_1^{-1}(\{p\}) = [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\phi_1^{-1}(B) = \cup_{p \in \mathbb{Z} \cap B} [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $x \mapsto nx$ est continue, c'est une application borélienne. Par composition (et produit par $(1/n)$), on en déduit que la fonction ϕ_n est borélienne. On montre alors que Y_n est $\tau(X)$-mesurable, comme à la question a car, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y_n^{-1}(B) = Y^{-1}(\phi_n^{-1}(B)) \in \tau(X)$.

---

e. Terminez la preuve du théorème.

corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme l'ensemble des valeurs prises par Y_n est au plus dénombrable, on peut appliquer la question b. On obtient l'existence de $f_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, t.q. $Y_n = f_n(X)$.

On note A l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. A est donc aussi l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est de Cauchy. On en déduit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A peut s'écrire :

$$A = \cap_{n\in\mathbb{N}^\star} \cup_{N\in\mathbb{N}^\star} \cap_{p,q\geq N} (f_p - f_q)^{-1}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]).$$

On pose maintenant $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. La fonction f est borélienne car f est limite simple des fonction boréliennes $f_n 1_{A^c}$ quand $n \to \infty$.

Enfin, si $\omega \in \Omega$, on a $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$. La question c donne que $Y_n(\omega) = \phi_n(Y(\omega)) \to Y(\omega)$. On a donc $X(\omega) \in A$ et donc $f_n(X(\omega)) \to f(X(\omega))$. Ceci donne $Y(\omega) = f(X(\omega))$. On a bien montré que $Y = f(X)$ avec f borélienne.

Maintenant on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique.
On notera P_X la loi de X.

f. Soient f et g deux fonctions mesurables telles que $Y = f(X) = g(X)$. Montrez que

$$P_X(f = g) = 1\,.$$

corrigé

Soit $B = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)\}$. On a $B = (f - g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $\omega \in \Omega$, on a $f(X(\omega)) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ et donc $X(\omega) \in B$. Ceci prouve que $X^{-1}(B) = \Omega$ et donc que $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = 1$, c'est-à-dire $P_X(f = g) = 1$.
