Université de Provence
Master de Mathématiques 2006-2007

Probabilités : examen de janvier 2007

Barême indicatif : Exercice 1 - 4 pts, Exercice 2 - 4 pts, Exercice 3 - 6 pts, Exercice 4 - 6 pts.

Exercice 1

Soit (ε_j) une suite de variables aléatoires i.i.d. ne prennant que les valeurs $+1$ et -1. On pose $p = P(\varepsilon_j = 1)$ et $q = 1 - p = P(\varepsilon_j = -1)$ et on suppose que $p < \frac{1}{2}$. Soit $u > 1$ un nombre réel. On définit la suite aléatoire (X_n) par la relation de récurrence:

$$X_{n+1} = X_n u^{\varepsilon_n} \text{ et } X_0 = 1\,.$$

a. Montrez qu'il existe une valeur de u telle que $E(X_1) = 1$.

A partir de maintenant on suppose que u est tel que $E(X_1) = 1$. On cherche à décrire le comportement limite de la suite (X_n).

b. Quelle est la limite presque sûre de la suite (X_n)?

c. Que peut-on dire de la convergence L^1?

Exercice 2: propriété de Markov

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ trois sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes conditionellement à $\mathcal{D}$ si, pour toutes variables aléatoires bornées X et Y où X est $\mathcal{B}$ mesurable et Y est $\mathcal{C}$ mesurable alors

$$E(XY|\mathcal{D}) = E(X|\mathcal{D})E(Y|\mathcal{D})\,.$$

Soient ε_1, ε_2 et X_0 trois variables aléatoires réelles indépendantes. Soient f et g deux fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $X_1 = f(X_0, \varepsilon_1)$ et $X_2 = g(X_1, \varepsilon_2)$.

a. Soit ψ une fonction mesurable bornée. On note

$$\bar{\psi}(z) = \int \psi(g(z, x_2))dm_2(x_2)\,,$$

où m_2 est la loi de ε_2.

Exprimez $E(\psi(X_2)|\tau(X_1))$ en fonction de $\bar{\psi}$.

b. Montrez que les tribus $\tau(X_0)$ et $\tau(X_2)$ sont indépendantes conditionellement à $\tau(X_1)$.

Exercice 3: inégalités maximales

Dans cet exercice on considèrera une sous martingale positive (X_n) telle que $X_0 = 0$.
Soit G une fonction convexe croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que $G(0) = 0$. On note g sa dérivée à droite. On rappelle que

$$G(y) - G(x) \geq g(x)(y - x)$$

pour tous y, x.
On pose

$$H_n = G(X_n^*) - (X_n^* - X_n)g(X_n^*)\,,$$

où

$$X_n^* = \sup_{0\le k\le n} X_k\,.$$

a. Montrez que
$$(X_{n+1}^* - X_{n+1})g(X_{n+1}^*) = (X_{n+1}^* - X_{n+1})g(X_n^*)\,.$$

b. En déduire que $H_{n+1} - H_n \ge (X_{n+1} - X_n)g(X_n^*)$.

c. On suppose que $E(|H_n|) < \infty$ pour tout n. Montrez que $E(H_n) \ge 0$.

On choisit maintenant un réel $K > 0$ et $G(x) = (x-K)^+$.

d. Déduire de la question c. que
$$KP(X_n^* \ge K) \le E(X_n)\,.$$

Exercice 4

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes toutes de même loi telle que $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.
On pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{2^j}$$

Partie A.

a. Soient $z \in \mathbb{R}$ et n entier tels que $\sin(\frac{z}{2^n}) \neq 0$. Montrez que

$$\Pi_{j=1}^{n} \cos(\frac{z}{2^j}) = \frac{\sin(z)}{2^n \sin(\frac{z}{2^n})}$$

Indication: exprimez le produit $\cos(x)\sin(x)$ *en fonction de* $\sin(2x)$.

b. Soit $z \in \mathbb{R}^*$. Montrez que le produit $\Pi_{j=1}^{\infty} \cos(\frac{z}{2^j})$ converge et calculez sa limite en fonction de z.

Soit $z \in \mathbb{R}$. On pose $L_n(z) = E[e^{izS_n}]$.

c. Montrez que $L_n(z)$ converge quand n tend vers $+\infty$ et calculez la limite.

On notera $L(z) = \lim_{n\to+\infty} L_n(z)$.

Partie B.

a. Montrez que S_n converge presque surement quand n tend vers $+\infty$. On notera Y sa limite.

b. Utilisez les résultats de la partie A pour calculer la fonction caractéristique de la loi de Y, $\phi_Y(z) = E[e^{izY}]$. En déduire la loi de Y. Vous veillerez à justifier avec soin vos réponses.
