Université de Provence
Master de Mathématiques 2006-2007

Probabilités : examen de juin 2007.

Barême indicatif : Exercice 1 - 3 pts, Exercice 2 - 8 pts, Exercice 3 - 10 pts.
Tous les documents sont interdits.

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espace de probabilités.

a. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On supposera Z intégrable. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $E(Z\,1_A) \leq \varepsilon$ pour tout événement $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \leq \delta$.

b. Soit (X_n) une suite de v.a. qui converge en probabilités vers une v.a. X. On suppose que, pour tout n et presque sûrement, on a $|X_n| \leq Z$ où Z est une v.a. intégrable. Montrez que $|X| \leq Z$ presque sûrement et que X_n converge aussi vers X dans L^1.

Exercice 2: distance en variation totale

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Soient X et Y deux v.a. On définit la *distance en variation totale* entre X et Y par

$$d_{VT}(X,Y) = \sup_u |E(u(X)) - E(u(Y))|\,,$$

où le sup est calculé sur les fonctions mesurables $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\|u\|_\infty = \sup_x |u(x)| = 1$.

a. Démontrez l'inégalité triangulaire

$$d_{VT}(X,Z) \leq d_{VT}(X,Y) + d_{VT}(Y,Z)\,,$$

pour tout choix de v.a. X, Y, Z.

b. Montrez que

$$d_{TV}(X,Y) = 2 \sup_{A \subset \mathbb{R}} |P(X \in A) - P(Y \in A)|\,,$$

où le sup est calculé sur les sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$.

c. On suppose que X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on note $p_n = P(X = n)$ et $q_n = P(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrez que

$$d_{TV}(X,Y) = \sum_n |p_n - q_n|\,.$$

d. On suppose que les lois de X et Y ont chacune une densité que l'on notera f et g respectivement. Exprimez la distance en variation totale entre X et Y en fonction des densités f et g en vous inspirant de la question précédente.

On considère maintenant une suite de v.a. (X_n).

e. Montrez que si $d_{VT}(X_n, X) \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ alors la suite (X_n) converge en loi vers X.

f. Montrez que la réciproque est fausse: il existe une suite de v.a. (X_n) qui converge en loi vers X telle que la distance en variation totale entre X_n et X ne tende pas vers 0.

Exercice 3:

Soit (Y_n), une sous martingale positive dans une certaine filtration $(\mathcal{B}_n)$ et telle que $Y_0 = 0$. Soit (c_n) une suite décroissante de nombres réels positifs. On rappelle la notation

$$(\Delta Y)_k = Y_k - Y_{k-1} \,.$$

Question de cours: rappelez ce qu'est la décomposition de Doob de (Y_n).
Première partie
On suppose que Y_n est intégrable pour tout n. Démontrez l'inégalité de Hajek-Renyi-Chow:

$$P(\max_{1\leq k\leq n} c_k Y_k \geq x) \leq \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} c_k E(Y_k - Y_{k-1})\,,$$

pour tout $x > 0$.
On vous suggère pour cela de considérer le processus suivant:

$$Z_n = c_n Y_n - \sum_{k=1}^{n} c_k E((\Delta Y)_k | B_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (c_{k-1} - c_k) Y_{k-1}\,,$$

et de définir le temps d'arrêt $T = \min\{k\,;\, c_k Y_k \geq x\}$.
Seconde partie
Soit (M_n) une martingale dans la filtration $(\mathcal{B}_n)$.
On pose $Y_k = \frac{1}{k}(\Delta M)_k$ et $W_n = \sum_{k=1}^n Y_n$.
Soit $r \in [1,2]$. On fait l'hypothèse suivante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E(|(\Delta M)_k|^r)}{k^r} < \infty\,.$$

On souhaite en déduire que $\frac{1}{n}M_n$ converge vers 0 p.s.
On rappelle le lemme de Kronecker: soit (y_n) une suite réelle telle que la série $\sum \frac{y_n}{n}$ converge alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

a. Rappelez comment on montre que $\frac{1}{n}M_n$ converge vers 0 p.s. dans le cas $r = 2$.

b. On suppose que $r = 1$. Montrez qu'alors la série $\sum Y_k$ est presque sûrement absolument convergente et en déduire que $\frac{1}{n}M_n$ converge vers 0 p.s.

c. Montrez, pour tout $r \in [1,2]$, pour tous m, n et tout $x > 0$ on a

$$P(\max_{1\leq k\leq n} |W_{m+k} - W_m| \geq x) \leq \frac{1}{x^r} E(|W_{n+m} - W_m|^r)\,.$$

d. Traiter le cas $r \in]1,2[$.
