Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**

Master Mathématiques et Applications, 1ère année **Module de Probabilités**

Examen du 10/01/2008

Documents autorisés : Notes personnelles, 10 pages maxi.

Exercice 1 Soit X et Y deux v. a. r. de carré intégrables, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$. On rappelle et on introduit les définitions

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]^2\right) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]\right) \\ \mathrm{Var}^{\mathcal{G}}(X) &= \mathbb{E}^{\mathcal{G}}\left([X-\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)]^2\right) \\ \mathrm{Cov}^{\mathcal{G}}(X,Y) &= \mathbb{E}^{\mathcal{G}}\left([X-\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)][Y-\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(Y)]\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Var}(X+Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)\right],$$

   et que de même

$$\mathrm{Cov}^{\mathcal{G}}(X,Y) = \mathrm{Cov}^{\mathcal{G}}(Y,X) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Var}^{\mathcal{G}}(X+Y) - \mathrm{Var}^{\mathcal{G}}(X) - \mathrm{Var}^{\mathcal{G}}(Y)\right].$$

2. Montrer que $\mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)][\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)-\mathbb{E}(X)]\right) = 0$.
3. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}^{\mathcal{G}}(X)] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)\right)$ *Indication : on pourra élever au carré l'identité $X - \mathbb{E}(X) = X - \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) + \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) - \mathbb{E}(X)$ et utiliser la question précédente.*
4. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Cov}^{\mathcal{G}}(X,Y)\right) + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X), \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(Y))$.

Exercice 2 Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ des v. a. r. indépendantes et identiquement distribuées, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que $\mathbb{E}[|X_1|^3] < \infty$. On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

1. Montrer que pour tout $1 \le i \le n$, les v. a. $\overline{X}$ et $X_i - \overline{X}$ sont non corrélées (i. e. de covariance nulle).
2. Montrer que si en outre $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^3] = 0$, alors les v. a. $\overline{X}$ et S^2 sont non corrélées.
3. Montrer que si la loi commune des X_i est une loi de Gauss, alors les v. a. $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes. *Indication : on commencera par montrer que les v. a.*

$$Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad et \quad Z = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ X_1 - \overline{X} \\ \cdots \\ X_n - \overline{X} \end{pmatrix}$$

   sont des vecteurs aléatoires gaussiens, et on examinera la matrice de covariance de Z.

Problème Dans ce problème, on ne considère que des v. a. réelles, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A toute v. a. r. U, on associe sa fonction de répartition $F_U(x) = \mathbb{P}(U < x)$.

On se donne des v. a. r. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ et des nombres réels $\{a_n, b_n,\ n \geq 1\}$ avec $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$. On suppose ($U_n \Rightarrow U$ veut dire "U_n converge en loi vers U")

- a $X_n \Rightarrow X$, $Y_n := a_n X_n + b_n \Rightarrow Y$ quand $n \to \infty$.
- b Les fonctions de répartition de X et de Y sont continues.
- c X est de carré intégrable.

1. Montrer qu'il existe $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ tels que
$$0 < F_X(x_1) < F_X(x_2) < 1, \quad \text{et} \quad 0 < F_Y(y_1) < F_Y(y_2) < 1.$$
2. Montrer que que pour tout x, y dans $\mathbb{R}$,
$$F_{X_n}\left(\frac{y - b_n}{a_n}\right) \to F_Y(y) \text{ et } F_{Y_n}(a_n x + b_n) \to F_X(x)$$
3. Montrer que si $x_n \to x$ et $y_n \to y$, quand $n \to \infty$, alors $F_{X_n}(x_n) \to F_X(x)$ et $F_{Y_n}(y_n) \to F_Y(y)$, y compris lorsque x ou y vaut $\pm\infty$.
4. Déduire des questions précédentes que les suites
$$\frac{y_1 - b_n}{a_n},\ \frac{y_2 - b_n}{a_n},\ a_n x_1 + b_n,\ a_n x_2 + b_n,\ 1/a_n,\ a_n,\ b_n$$
sont bornées.
5. Soit (a, b) et (a', b') deux points d'accumulation de la suite (a_n, b_n). Montrer que $a > 0$, $a' > 0$, $aX + b$ et $a'X + b'$ ont même loi. Déduire des égalités des espérances et des variances que $a = a'$ et $b = b'$. Conclure que la suite (a_n, b_n) converge.
6. Montrer par un contre–exemple que le résultat précédent peut êre mis en défaut si la suite a_n n'est pas de signe constant (on pourra proposer un exemple avec $b_n = 0$, $X_n = X$ de loi symétrique autour de l'origine).