Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**

Master Mathématiques et Applications, 1ère année **Module de Probabilités**

Examen du 25/06/2008

Documents autorisés : Notes personnelles, 10 pages maxi.

Toutes les v. a. ci–dessous sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soit X un vecteur aléatoire de dimension 2, tel que $E(\|X\|^2) < \infty$. On définit $a = \mathbb{E}(X)$.

1. Montrer que si la matrice de covariance Σ de X est dégénérée, alors X prend p. s. ses valeurs dans une droite passant par le point a (on considèrera un vecteur $u \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tel que $\Sigma u = 0$, donc aussi $\langle \Sigma u, u \rangle = 0$ et on calculera $\mathbb{E}(\langle X - a, u \rangle^2)$).
2. En déduire que si la loi de X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, alors la matrice de covariance de X est de rang 2 (i. e. inversible).

Exercice 2 On se donne des v. a. $X_1, \ldots, X_n$ i. i. d., de loi $N(m, \sigma^2)$. On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

1. Quelle est la loi de la v. a. r. $\overline{X}$?
2. Quelle est la loi de la v. a. r. $n\Sigma^2/\sigma^2$?
3. Montrer que le v. a. de dimension $n+1$ $(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})'$ est un vecteur aléatoire gaussien. Préciser la première ligne et la première colonne de la matrice de covariance de ce vecteur aléatoire.
4. Montrer que $\overline{X}$ et le vecteur aléatoire $(X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})'$ sont indépendants. En déduire que les deux v. a. r. $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.

Problème Dans ce problème on considèrera des v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ uniquement.

1. Soit X une v. a. r. de loi exponentielle de paramètre λ, i. e. telle que $\mathbb{P}(X > x) = \exp(-\lambda x)$, $x > 0$.
   a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ en fonction de λ.
   b) Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une collection de v. a., X_n étant exponentielle de paramètre λ_n. Montrer que cette collection est tendue si et seulement si $\inf_n \lambda_n > 0$.

2. Soit X une v. a. de loi Gamma(a, λ), $a, \lambda > 0$, c'est à dire une v. a. dont la loi admet la densité sur $\mathbb{R}_+$
$$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1}, \quad \text{où } \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx.$$
   On remarquera (par intégration par parties) que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.
   a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$.
   b) Montrer que pour toute v. a. X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, pour tout $M > 0$, $\mathbb{P}(X > M) \leq \mathbb{E}(X)/M$. En déduire que pour qu'une suite de v. a. r. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ soit tendue, il suffit que $\sup_n \mathbb{E}(X_n) < \infty$.
   c) Montrer que si la loi de X_n est la loi $\Gamma(n, n)$, alors la suite X_n est tendue, et en fait $X_n \to 1$ en probabilité.
   d) On suppose maintenant que la loi de X_n est la loi $\Gamma(n^{-1}, n^{-1})$. Montrer qu'à nouveau la suite X_n est tendue. Montrer que
$$\int_0^\infty e^{-x/n} x^{-1+n^{-1}} dx \geq e^{-1} \int_0^1 x^{-1+n^{-1}} dx \to \infty, \quad \text{quand } n \to \infty.$$
   En déduire que pour tout $0 < a < b < \infty$, $\mathbb{P}(a \leq X_n \leq b) \to 0$ quand $n \to \infty$. Déduire de ce résultat et de la tension de la suite $\{X_n,\ n \geq 1\}$ que la masse de Dirac en $x = 0$ est le seul point d'accumulation possible des lois des $\{X_n,\ n \geq 1\}$, et donc que $X_n \to 0$ en probabilité, quand $n \to \infty$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n)$. Pourquoi n'y a–t–il pas contradiction entre ces divers résultats ?

Rappel Une suite $\{X_n,\ n \geq 1\}$ de v. a. r. est *tendue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous–ensemble compact K_ε de $\mathbb{R}$ tel que
$$\mathbb{P}(X_n \notin K_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1.$$