Master Mathématiques et Applications, 1ère année
Module Intégration et Probabilités

Examen du 14/01/2009
Documents autorisés : Notes personnelles, 10 pages maxi.

Exercice 1 Soit X et Y deux v. a. r. de carré intégrables, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}(Y|X) = X$.

1. Déduire de l'hypothèse que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y^2|X) \geq X^2$ p. s.
2. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes
   - (i) $\mathbb{E}(Y^2|X) = X^2$ p. s.
   - (ii) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2)$.
   - (iii) $Y = X$ p. s.

Exercice 2 Soit $X_0 = 0$ et X_n, $n \geq 1$ des v. a. r. de carré intégrable. On pose pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. On suppose que la suite $\{X_n\}$ est une martingale, au sens où $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall n \geq 0$.

1. Montrer que si $k \neq \ell$,
$$\mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(X_\ell - X_{\ell-1})] = 0.$$
(On pourra introduire le conditionnement par $\mathcal{F}_{j-1}$, où $j = \sup(k, \ell)$).
2. En déduire que
$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2].$$
3. On suppose maintenant que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[(X_n)^2] < \infty$. En déduire que la suite $\{X_n\}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et que si X désigne sa limite dans cet espace,
$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2].$$

Problème Dans ce problème, on ne considère que des v. a. réelles, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

A. Soit X une v. a. de loi de Cauchy, i. e. de densité égale à

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

On admettra que $\int_{\mathbb{R}} p_X(x)dx = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X^+) = \mathbb{E}(X^-) = \mathbb{E}(X^2) = +\infty$.
2. Montrer que si $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(|X| > n) \geq \frac{1}{n\pi}.$$
(On pourra utiliser le fait que si $x^2 \geq 1, \frac{2}{1+x^2} \geq \frac{1}{x^2}$).
3. Montrer que si la loi de Y est la loi exponentielle symétrique, i. e. de densité
$$p_Y(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|),$$
alors la fonction caractéristique de Y est la fonction intégrable
$$\varphi_Y(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$
4. En déduire que la fonction caractéristique de X est donnée par
$$\varphi_X(u) = \exp(-|u|).$$
(On pourra utiliser la formule de la transfomée de Fourier inverse, qui énonce que
$$p_Y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\varphi_Y(u)du.)$$
5. Pourquoi les deux fonctions caractéristiques de X et de Y prennent–elles leurs valeurs dans $\mathbb{R}$?

B. On se donne maintenant $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des v. a. r. indépendantes et toutes de loi de Cauchy. Pour $n \geq 1$, on pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Calculer la fonction caractéristique et préciser la loi de Z_n.
2. En déduire que Z_n converge en loi quand $n \to +\infty$, vers une loi que l'on précisera.
3. Montrer que si la suite $\{Z_n\}$ convergeait p. s. vers une limite finie, alors
$$\frac{X_n}{n} = Z_n - \frac{n-1}{n}Z_{n-1}$$
tendrait p. s. vers 0. Déduire alors de la question **A** 2 et du Lemme de Borel Cantelli que $\{Z_n\}$ ne converge pas p. s. vers une limite finie.
4. Montrer que
$$Z_{2n} - Z_n = \frac{Y_n + Y_n'}{2},$$
où Y_n et Y_n' sont deux v. a. r. indépendantes, chacune de loi de Cauchy. En déduire que la suite $\{Z_n\}$ ne converge pas en probabilité.