Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Mesures et Probabilités, TD 1, Septembre 2008

Exercice 1 (Exemple de tribu engendrée)

Dans les cas suivants, déterminer la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On rappelle que l'espace d'arrivée est toujours (sauf indication contraire !) $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne (la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ sera toujours notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$).

1. (Cas d'un lancer de dé.) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$, et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon.
2. (Cas de n tirages à pile ou face.) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k-ième tirage (X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$).
3. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $X(\omega)$ est la partie fractionnaire de ω, c'est-à-dire $X(\omega) = \omega - [\omega]$.

Exercice 2 (limites sup et inf d'ensembles)

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{q\geq n} A_q$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{q\geq n} A_q$.

1. Montrer que $P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir $(E, \mathcal{A}, P)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$) pour lequel
$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) < \liminf_{n\to\infty} P(A_n) < \limsup_{n\to\infty} P(A_n) < P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
3. (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < \infty$.
Montrer que $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Exercice 3 (Fonctions constantes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire (réelle). Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ t.q., pour tout $C \in \mathcal{C}$, $P(C) = 0$ ou 1. Montrer que si X est $\mathcal{C}$-mesurable (c'est-à-dire si $\tau(X) \subset \mathcal{C}$), X est presque sûrement constante.

Exercice 4 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. positive sur cet espace. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t < X(\omega)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$- mesurable
2. Montrer que
$$\int X dP = \int_0^{+\infty} P(\{X > t\}) dt = \int_0^{+\infty} P(\{X \geq t\}) dt.$$
On rappelle que $\{X > t\} = \{\omega \in E;\ X(\omega) > t\}$. [On pourra utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 5 (Une caractérisation de l'intégrabilité)

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. (réelle). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{|X| > n\}$ et $B_n = \{n < |X| \leq n+1\}$.

1. Montrer que : $\displaystyle\int |X| dP < +\infty \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} n\, P(B_n) < +\infty \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < +\infty.$

2. Soit $p \in]1,+\infty[$, montrer que $|X|^p$ est une v.a. et que : $\displaystyle\int |X|^p dP < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, P(B_n) < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{p-1}\, P(A_n) < +\infty$.

Exercice 6 (Sur l'équi-intégrabilité)

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A |X_n| dP \to 0$, quand $P(A) \to 0$ (avec $A \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP = 0,$
2. $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

Exercice 7 (Tribu et partition)

Soit Ω un ensemble. On appelle partition de Ω une famille finie ou dénombrable de parties non vides de Ω et disjointes deux à deux et dont l'union est égale à Ω. Les éléments d'une partition sont appelés atomes.

1. Soit $a = \{A_i\,;\, i \in I\}$ une partition de Ω et soit $\tau(a)$ la tribu engendrée par a. Montrer que

$$\tau(a) = \{\bigcup_{j\in J} A_j \text{ où } J \subset I\}\,.$$

   En déduire qu'une v.a. réelle est $\tau(a)$-mesurable si et seulement si elle est constante sur tous les atomes de a.

   Une partition a est dite plus fine qu'une partition b si tous les atomes de b s'écrivent comme union d'atomes de a.

2. Montrer que si a est plus fine que b et si b est plus fine que a alors a et b sont égales.
3. Montrer que si a et b sont deux partitions telles que $\tau(a) = \tau(b)$ alors a et b sont égales.

   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Une partition a est mesurable si ses atomes sont des éléments de $\mathcal{A}$. On a alors $\tau(a) \subset \mathcal{A}$.

4. Donner une base hilbertienne de $L^2(\Omega, \tau(a), P)$ construite à partir des atomes de a. En déduire l'expression de la projection orthogonale d'une variable aléatoire X appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur le sous espace $L^2(\Omega, \tau(a), P)$.

Exercice 8 (Inégalité de Jensen)

Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(E, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Montrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire :

$$\int f(X) dP \geq f(\int X dP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]