Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Théorie de la mesure et probabilités, TD 6, Novembre 2008

Exercice 1 (Limite de Gaussiennes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, X une v.a.r. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes. On suppose que X_n tend en loi vers X, quand $n \to \infty$. Montrer que X est est gaussienne.

Exercice 2 (Petite remarque sur la convergence en loi)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi (quand $n \to \infty$). Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en loi (quand $n \to \infty$).

Exercice 3 (Convergence étroite et convergence contre une fonction discontinue)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi (quand $n \to \infty$).

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ t.q. $P_X(\{a\}) = 0$. Montrer que $P[X_n \geq a] \to P[X \geq a]$, quand $n \to \infty$.
2. Montrer (en donnant un exemple) que le résultat de la question 1 peut être faux si $P_X(\{a\}) > 0$.
3. (Généralisation de la question 1.) Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée, continue en tout point différent de a. On suppose que $P_X(\{a\}) = 0$, montrer que $E(\varphi(X_n)) \to E(\varphi(X))$, quand $n \to \infty$.

Exercice 4 (Convergence en loi, uniforme intégrabilité et convergence L^1)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. intégrables et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi (quand $n \to \infty$).

1. On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable, c'est-à-dire que :
$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP = 0.$$
Montrer que X est intégrable et que $E(X_n) \to E(X)$ quand $n \to \infty$.
2. On suppose que X est intégrable, $E(X_n) \to E(X)$ quand $n \to \infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \geq 0$ p.s..
   (a) Montrer que $X \geq 0$ p.s..
   (b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.
3. On suppose que X est intégrable. Montrer l'équivalence entre les deux propriéés suivantes :
   (a) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable,
   (b) $\|X_n\|_1 \to \|X\|_1$, quand $n \to \infty$.
4. On suppose que X est intégrable et que $X_n \to X$ en probabilité quand $n \to \infty$. Montrer l'équivalence entre les deux propriéés suivantes :
   (a) $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, quand $n \to \infty$,
   (b) $\|X_n\|_1 \to \|X\|_1$, quand $n \to \infty$.

Exercice 5 (Convergence en loi, toujours...)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi (quand $n \to \infty$).

1. Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que la suite $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Montrer que $\varphi(X)$ est intégrable et que $E(\varphi(X_n)) \to E(\varphi(X))$ quand $n \to \infty$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sauf en a. On suppose que $P_X[\{a\}] = 0$ et que la suite $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Montrer que $\varphi(X)$ est intégrable et que $E(\varphi(X_n)) \to E(\varphi(X))$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6 (Application de la loi forte des grands nombres)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a.r.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ et de moyenne finie. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose $N_t(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{i=1}^n T_i(\omega) < t\}$. Montrer que N_t/t converge p.s., quand $t \to \infty$, et donner sa limite. [Cet exercice “modélise” le problème suivant : Des catastrophes se produisent à des instants de la forme $T_1, T_1 + T_2, T_1 + T_2 + T_3 \dots$ où les T_j sont des v.a.r.i.i.d de moyenne finie. Le nombre N_t est le nombre de catastrophes avant l'instant t. On cherche la limite de N_t/t.]

Exercice 7 (Minoration d'une espérance conditionnelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et Y est une v.a.r. positive. Soit U une v.a.r. positive, $\mathcal{B}-$mesurable et t.q. pour toute v.a.r. positive $\mathcal{B}-$mesurable Z on ait $E(YZ) \geq E(UZ)$. Montrer que $E(Y|B) \geq U$ p.s..

Exercice 8 (Quelques propriétés des martingales)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire d'une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de v.a.r. (c'est-à-dire un processus réel). On suppose que X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous martingale. Montrer que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Montrer que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ pour tout $m \geq 0$.

3. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et que $\varphi(X_n)$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $\varphi(X_n)$ est une notation pour désigner $\varphi \circ X_n$). Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous martingale.

Exercice 9 (Séries de Fourier et martingales)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$X \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \Rightarrow X^+ \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P).$$

$(L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) = L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P).)$

On prend maintenant $\Omega =]0, 1[$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(]0, 1[)$ et $P = \lambda$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0, 1[)$). On pose $H = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on définit $e_p \in H$ par $e_p(x) = \exp(2i\pi px)$ pour $x \in]0, 1[$. On rappelle que $\{e_p, p \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H. pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = ev\{e_p, -n \leq p \leq n\}$ (c'est un s.e.v. fermé de H).

Soit $X \in H$. On sait que $X_n \to X$ dans H, quand $n \to \infty$, avec $X_n = P_{V_n}X$ où P_{V_n} désigne l'opérateur de projection orthogonale sur V_n (X_n est donc une somme partielle de la série de Fourier de X).

1. Montrer que $P_{V_n}(X_{n+1}) = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, monter qu'il n'existe pas de sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ t.q. $V_n = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$. [On pourra, par exemple, commencer par remarquer que V_n est formé de fonctions analytiques.]

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $\mathcal{B}_n = \tau(e_p, -n \leq p \leq n)$. A-t-on $V_n \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}_n, P)$ ou $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}_n, P) \subset V_n$?