Examen du 25/06/2008

Documents autorisés : Notes personnelles, 10 pages maxi.

Toutes les v. a. ci–dessous sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soi $X_1, \ldots, X_n$ des v. a . r. indépendantes, telles que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{E}(|X_k|^3) < \infty$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^3\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^3).$$

Exercice 2 On se donne des v. a. $X_1, \ldots, X_n$ i. i. d., de loi $N(m, \sigma^2)$. On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

1. Quelle est la loi de la v. a. r. $\overline{X}$?
2. Quelle est la loi de la v. a. r. $n\Sigma^2/\sigma^2$?
3. Montrer que le v. a. de dimension $n+1$ $(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})'$ est un vecteur aléatoire gaussien. Préciser la première ligne et la première colonne de la matrice de covariance de ce vecteur aléatoire.
4. Montrer que $\overline{X}$ et le vecteur aléatoire $(X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})'$ sont indépendants. En déduire que les deux v. a. r. $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes.

Problème **A** Soit $X \simeq N(\mu, \sigma^2)$. On pose $Y = e^X$. Montrer que Y est une v. a. r. à valeurs positives, de densité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction de y donnée par

$$\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[\log y - \mu]^2}{2\sigma^2}\right).$$

On dit que la loi de Y est la *loi lognormale de paramètres* μ *et* σ^2.

B *Transformée de Mellin* Soit X une v. a. r. à valeurs positives. On définit sa transformée de Mellin comme la fonction $\theta \to T_X(\theta)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_{T_X} = \{\theta \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(X^\theta) < \infty\}$ par

$$T_X(\theta) = \mathbb{E}\left(X^\theta\right).$$

1. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. à valeurs positives indépendantes et $\theta \in \mathcal{D}_{T_X} \cap \mathcal{D}_{T_Y}$, alors $\theta \in \mathcal{D}_{T_{XY}}$ et
$$T_{XY}(\theta) = T_X(\theta) T_Y(\theta).$$
2. Montrer que si $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathbb{E}(X^{a\theta}) < \infty$, alors
$$T_{bX^a}(\theta) = b^\theta T_X(a\theta).$$
3. Montrer que si $\psi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ})$, $t \in \mathbb{R}$ (ψ_Z est la transformée de Laplace de la loi de Z), alors
$$T_X(\theta) = \psi_{\log X}(\theta).$$

C *Transformée de Mellin de la loi lognormale*

1. Trouver la transformée de Mellin d'une v. a. r. Y de loi lognormale de paramètres μ et σ^2.
2. Calculer les moments de Y (i. e. $\mathbb{E}(Y^k)$, $k = 1, 2, \ldots$).
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.