Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**
Master Mathématiques et Applications, 1ère année **Module de Probabilités**

Devoir à rendre le lundi 3/11/2008

Exercice

1. A tout nombre réel x, on associe sa partie positive $x^+ = \sup(x,0)$ et sa partie négative $x^- = \sup(-x,0)$. Donc $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.
   - a. Montrer que si $x, y \geq 0$, $(x-y)^+ \leq x$.
   - b. Montrer que pour tout réel x, $|x| = 2x^+ - x$.
2. Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ uns suite de v. a. non négatives ($X_n \geq 0$ p. s. $\forall n \geq 1$), telles que $X_n \to X$ p. s. quand $n \to \infty$. On suppose en outre que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ quand $n \to \infty$, et que $\mathbb{E}(X_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X) < \infty$.
   - a. Montrer que $X_n \geq 0$ p. s.
   - b. Montrer que $\mathbb{E}[(X - X_n)^+] \to 0$ quand $n \to \infty$ (on utilisera 1.a.).
   - c. Montrer $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (on utilisera 1.b.).
   - d. *Question subsidiaire* Montrer que tout ce qui précède reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de convergence p. s. de X_n vers X par la convergence en probabilité.

Problème On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

1. Montrer que pour tout $c > 0$ la fonction

$$f_c(x) = \frac{c}{\pi(x^2+c^2)},\ x \in \mathbb{R}$$

   est la densité d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$, appelée loi de Cauchy de paramètre c.
2. Montrer que si X est une v. a. r. de loi de Cauchy de paramètre c, alors X n'est pas intégrable, et $\mathbb{E}[X^2] = +\infty$.
3. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes et de même loi, telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, alors

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{Var}(X).$$

4. Soit Z une v. a. r. de loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$, i. e. de densité

$$\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que la fonction caratéristique de la v. a. r. Z est donnée par

$$\varphi_Z(u) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+u^2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

   (On se rappellera que $\int_a^b \exp(zx)dx = z^{-1}(e^{za} - e^{zb})$, $\forall z \in \mathbb{C}$).

5. Déduire du résultat précédent que la fonction caratéristique de la v. a. r. X de loi de Cauchy de paramètre c est donnée par la formule

$$\varphi_X(u) = \exp(-c|u|), \quad u \in \mathbb{R}.$$

6. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes, respectivement de loi de Cauchy de paramètre c, et de loi de Cauchy de paramètre c', alors la loi de $X+Y$ est la loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.
7. Montrer que si la loi de X est la loi de Cauchy de paramètre c, et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la loi de αX est la loi de Cauchy de paramètre $|\alpha|c$.
8. Montrer que si X et Y sont deux v. a. r. indépendantes, toutes deux de loi de Cauchy de pramètre c, alors $\frac{X+Y}{2}$ a la même loi. Pourquoi ce résultat entraîne–t–il que $\mathbb{E}[X^2] = +\infty$?