Université de Provence **Centre de Mathématiques et d'Informatique**

Master Mathématiques et Applications, 1ère année **Module de Probabilités**

Exercices sur la convergence en loi

Exercice 1 Soit X_n et Y_n, $n \geq 1$ des v. a. r. Montrer que si $X_n \to 0$ en probabilité, et la suite $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ est tendue, alors $X_n Y_n \to 0$ en probabilité.

Exercice 2 Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite tendue de vecteurs aléatoires de dimension d, et $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ une suite tendue de vecteurs aléatoires de dimension k. Montrer que la suite

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix},\ n \geq 1 \right\}$$

de vecteurs aléatoires de dimension $d + k$ est tendue. (on pourra d'abord considérer le cas $d = k = 1$).

Exercice 3 Dans cet exercice, $\{X_n,\ n \geq 1\}$ et X sont des vecteurs aléatoires de dimension d. Montrer que si $X_n \to X$ en probabilité, alors $X_n \to X$ en loi, que la réciproque est fausse en général, mais que par contre si $X_n \to X$ en loi et si $X = x$ p. s. (i. e. $\mathbb{P}_X = \delta_x$), alors $X_n \to x$ en probabilité.

Exercice 4 Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ et X des vecteurs aléatoires de dimension d, $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ et Y des vecteurs aléatoires de dimension k.

1. Montrer que $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en loi, il n'y a aucune raison pour que $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ en loi, ni que (cas $d = k$) $X_n + Y_n \to X + Y$ en loi.
2. Montrer que si $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to y$ en probabilité, alors $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}$ en loi.

Exercice 5 Dans cet exercice, $\{X_n,\ n \geq 1\}$ et X sont des vecteurs aléatoires de dimension d, $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ et Y des vecteurs aléatoires de dimension k.

1. Montrer que si $X_n \to X$ en loi et $\Phi \in C(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^k)$, alors $\Phi(X_n) \to \Phi(X)$ en loi (en tant que vecteurs aléatoires de dimension k).
2. Montrer que si $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ en loi et $d = k$, alors $X_n + Y_n \to X + Y$ en loi, et que dans le cas $d = 1$, $k \geq 1$, $X_n Y_n \to XY$ en loi.

Exercice 6 Dans cet exercice, $\{X_n,\ n \geq 1\}$ et X sont des vecteurs aléatoires de dimension d, $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ des vecteurs aléatoires de dimension k, $y \in \mathbb{R}^k$. On suppose que

$$X_n \to X \text{ en loi,}$$
$$Y_n \to y \text{ en probabilité.}$$

Déduire des deux exercices précédents que

1. si $d = k$, $X_n + Y_n \to X + y$ en loi ;
2. si $d = 1$ ou $k = 1$, $X_n Y_n \to Xy$ en loi.