Universités de Marseille, Master 1 de mathématiques
Mesure et Probabilités, TD 5, Novembre 2009

On désigne par $\mathbb{E}(X)$ ou par $E(X)$ l'espérance de la v.a. X.

Exercice 1 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée. Montrer que $\text{sign}(X)$ et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec $\text{sign}(X)$ et X^2.

Exercice 2 (Somme de v.a. gaussiennes indépendantes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m, s^2)$ $(m, \mu, s, \sigma \in \mathbb{R})$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$.

Exercice 3 (Construction de v.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle)

soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilités et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, cela a été vu en cours.) On pose $Y = SX$.

1. Montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Montrer que Y et X sont dépendantes.
3. Montrer que $\text{cov}(Y, X) = 0$.
4. Montrer que le v.a. (X, Y) n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra utiliser l'une des 2 méthodes suivantes : chercher $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $aX + bY$ ne soit pas une v.a. gaussienne ou bien utiliser un résultat du cours que nous reverrons à l'exercice 4, question 2(b).]

Exercice 4 (Vecteurs gaussiens)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1. (Question vue en cours) On suppose que $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^d a_i X_i$ suit une loi gaussienne pour tout $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$). On note m la moyenne de X et D la matrice de covariance de X. Montrer que la loi de X est de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}^d$) si et seulement si D est inversible.
2. On suppose ici que $d = 2$.
   (a) On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$.
   (b) On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
3. On suppose toujours $d = 2$. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes.]
4. (Question vue en cours) On suppose que X est un vecteur gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux. Montrer que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.

Exercice 5 (Matrice des moments d'ordre deux et matrice de covariance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité. Soit X un vecteur aléatoire de dimension d ($d \geq 1$), dont toutes les coordonnées (notées X_i, $i = 1, \ldots, d$) sont supposées être de carré intégrable. On rappelle que la matrice des moments d'ordre 2 du v. a. X est la matrice $\mathbb{E}(XX')$, dont le terme (i, j) est le réel $\mathbb{E}(X_i X_j)$, et la matrice de covariance de X, notée $\mathrm{Cov}(X)$, est la matrice $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)'] = \mathbb{E}(XX') - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)'$, dont le terme (i, j) est la covariance des v. a. r. X_i et X_j. (La notation X' désigne le transposé du vecteur X.)

1. (Question vue en cours) Montrer que les matrices $\mathbb{E}(XX')$ et $\mathrm{Cov}(X)$ sont autoadjointes et semi–définie positives.
2. Montrer que si A est une matrice $k \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^k$, $Y = AX + b$, alors $\mathbb{E}(Y) = A\mathbb{E}(X) + b$ et $\mathrm{Cov}(Y) = A\mathrm{Cov}(X)A'$.
3. (Question vue en cours) Montrer que si $u \in \mathbb{R}^d$, $u'\mathrm{Cov}(X)u = \mathrm{Var}(< X, u >)$ (avec $< X, u >= X \cdot u = \sum_{i=1}^{d} u_i X_i$).
4. (Question vue en cours) Montrer que si $\mathrm{Cov}(X)$ n'est pas inversible, alors le v.a. X prend p. s. ses valeurs dans un sous–espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension inférieure ou égale à $d - 1$, et que la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ (cette loi n'est pas à densité dans $\mathbb{R}^d$).
5. Montrer que si trois points x, y et z de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas alignés, tout v.a. X de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$ a une matrice de covariance non dégénérée.

Exercice 6 (Covariance d'une somme de v.a.i.)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $\mathrm{Cov}(X + Y) = \mathrm{Cov}(X) + \mathrm{Cov}(Y)$.

Exercice 7 (Calcul de π)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ deux suites de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon,}$$

et

$$Z_n = 4\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la loi de X_n.
2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge en probabilité vers π.
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Chebyshev, donner, en fonction de α et ε, une valeur de $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q.
$$n \geq n_0 \Rightarrow P[|Z_n - \pi| > \varepsilon] \leq \alpha.$$

Exercice 8 (Suite de v.a.r.i.i.d. de Poisson)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $E[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique Φ_X de X.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.
   (a) Soit $n > 1$. Déduire de la première question la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$.
   (b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer
   $$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to \infty.$$