Université de Marseille, M2-Centrale
EDP, Examen du 3 novembre 2010

Exercice 1 (Pour le concours d'entrée à l'Ecole Centrale)

Soit φ une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}+$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\beta > 1$ t.q.

$$0 \le x < y \Rightarrow \varphi(y) \le C\frac{\varphi(x)^\beta}{y-x}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\varphi(a) = 0$. [On pourra montrer l'existence d'une suite strictement croissante $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ t.q. $\varphi(a_k) \le \frac{1}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\lim_{k\to\infty} a_k < +\infty$. Pour cela, on pourra montrer qu'il existe a_0 t.q. $\varphi(a_0) \le 1$ puis, par récurrence, définir a_{k+1} par $\frac{C}{a_{k+1}-a_k}\frac{1}{2^{k\beta}} = \frac{1}{2^{k+1}}$.]

Exercice 2 (Solutions bornées d'un problème elliptique)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$. Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \ge \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.

Si B est une partie borélienne de $\mathbb{R}^N$, on note mes(B) le mesure de Lebesgue N-dimensionnelle de A (c'est-à-dire la "surface" si $N = 2$ et le volume si $N = 3$).

1. Soit $F \in L^2(\Omega)^N$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega F(x)\cdot\nabla v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{1}$$

   Soit $p > N$. On suppose pour la suite de l'exercice que $F \in L^p(\Omega)^N$ (On rappelle que $L^p(\Omega)^N \subset L^2(\Omega)^N$ car $p > 2$) et on note u l'unique solution de (1).

   Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction S_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{l} S_k(s) = 0 \text{ si } -k \le s \le k, \\ S_k(s) = s - k \text{ si } s > k, \\ S_k(s) = s + k \text{ si } s < -k. \end{array}\right.$$

   On rappelle que si $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $S_k(v) \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla S_k(v) = 1_{A_k}\nabla v$ p.p., avec $A_k = \{|v| > k\}$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, Montrer que

$$\alpha \| |\nabla S_k(u)| \|_{L^2(\Omega)} = \alpha\left(\int_{A_k}\nabla u(x).\nabla u(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\| |F| \|_{L^p(\Omega)}. \tag{2}$$

   [On pourra prendre $v = S_k(u)$ dans (1) et utiliser l'inégalité de Hölder.]

3. On pose $1^\star = \frac{N}{N-1}$. On rappelle qu'il existe C_1 ne dépendant que de N t.q.

$$\|w\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \le C_1\|w\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = C_1\| |\nabla w| \|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit $k, h \in \mathbb{R}_+$ t.q. $k < h$. Montrer que

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq (\int_{A_h} |S_k(u(x)|^{1^\star})^{\frac{1}{1^\star}} \leq C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \||\nabla S_k(u)|\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(A_k)^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe C_2 ne dépendant que de C_1, α, F et p t.q.

$$(h-k)\text{mes}(A_h)^{\frac{N-1}{N}} \leq C_2 \text{mes}(A_k)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

4. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\text{mes}(A_a) = 0$). [On pourra poser $\varphi(k) = \text{mes}(A_k)^{\frac{N-1}{N}}$ et utiliser l'exercice 1.]

5. Montrer qu'il existe C_3 ne dépendant que de Ω et p t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \||F|\|_{L^p(\Omega)}.$$

Exercice 3 (Continuité séquentielle de L^2-faible dans H_0^1)

On prend ici les hypothèses de l'exercice 2. Pour $f \in L^2(\Omega)$, on sait qu'il existe une unique solution au problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note u la solution de (4) et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (4) avec f_n au lieu de f. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

2. Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$).

3. Montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx \to \int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx.$$

[Utiliser le fait que $\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x)dx = \int_\Omega f_n(x)u_n(x)dx$ et passer à la limite sur le terme de droite de cette égalité.]

4. Montrer que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra considérer $\int_\Omega A(x)\nabla(u_n - u)(x) \cdot \nabla(u_n - u)(x)dx$.]

Exercice 4 (Existence par Schauder)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), $g \in L^2(\Omega)$, a une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et h une fonction continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- $0 < \alpha = \inf_{s\in\mathbb{R}} a(s) \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s) = \beta < +\infty$,
- il existe $\delta \in [0, 1[$ et $C_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $|h(s, \xi)| \leq C_1(1 + |s|^\delta + |\xi|^\delta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

1. Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $h(\overline{u}, \nabla\overline{u}) \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe un unique u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(\overline{u}(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega h(\overline{u}(x), \nabla\overline{u}(x))v(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{5}$$

Dans la suite, on note T l'application qui à $\overline{u}$ associe u, unique solution de (5). L'application T est donc de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. (Estimation sur u) Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\overline{u})$. Montrer qu'il existe C_2 ne dépendant que Ω, α, g et C_1 t.q.

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2(1 + \|\overline{u}\|^\delta_{H_0^1(\Omega)}).$$

[On pourra prendre $v = u$ dans (5).]

En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q.

$$\|\overline{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R.$$

3. (Continuité de T) Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ et $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. On suppose que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). On pose $f_n = h(\overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$, $f = h(\overline{u}, \nabla\overline{u})$, $u_n = T(\overline{u}_n)$ et $u = T(\overline{u})$.

   (a) Montrer que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$.

   (b) Montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_\Omega a(\bar{u}_n(x))\nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x)dx \to \int_\Omega a(\bar{u}(x))\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx$.

   En déduire que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra s'inspirer de l'exercice 3.]

4. (Compacité de T) Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $f_n = h(\overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$ et $u_n = T(\overline{u}_n)$. Montrer qu'il existe une sous suite de la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$ t.q.

   - $f_n \to f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$,
   - $a(\overline{u}_n) \to b$ p.p..

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$. [On pourra raisonner comme dans l'exercice 3.]

5. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = T(u)$ (et donc u solution de (5) avec $\overline{u} = u$).