

Université de Marseille, M2-Centrale
EDP, Equations elliptiques linéaires, octobre 2010

Exercice 1 (Régularité en dimension 1)

$f \in L^2(]0, 1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt &= \int_0^1 f(t)v(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{aligned} \quad (1)$$

On suppose maintenant que $f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \subset L^2(]0, 1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0, 1]$. Soit u la solution de (1). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt \text{ avec un certain } c \in \mathbb{R} \text{ convenablement choisi (et indépendant de } \varphi).$$

En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0, 1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Exercice 2 (Décomposition spectrale en dimension 1)

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0, 1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (1).

On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (1), noter que $H_0^1(]0, 1[) \subset E$). On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E .

1. Soit $\lambda \in VP(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0, 1], \mathbb{R}) \cap C^2(]0, 1[, \mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0, 1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
2. Montrer que $VP(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\sigma(T) = VP(T) \cup \{0\}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)dt$. Montrer que :

$$\|f - \sum_{p=1}^n c_p \sin(p\pi \cdot)\|_2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

(Comparer avec les séries de Fourier. . . , demander à votre enseignant favori comment modifier (1) pour retrouver les séries de Fourier.)

4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :

$$\begin{aligned} u &\in H_0^1(]0, 1[), \\ \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu \int_0^1 u(t)v(t)dt &= \int_0^1 f(t)v(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \end{aligned}$$

Exercice 3 Problème elliptique à coefficients non bornés

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} = a > 0$. On pose $H^1(p, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } D_i u \in L_{loc}^1(\Omega) \text{ et } p D_i u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}\}$.

On rappelle que $D_i u$ désigne la dérivée, au sens des distributions, de u dans la direction x_i , la variable de $\mathbb{R}^N$ étant notée $x = (x_1, \dots, x_N)^t$.

Pour $u \in H^1(p, \Omega)$, on définit $\|u\|$ par $\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \|p D_i u\|_2^2$, avec $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

1. (Etude de l'espace fonctionnel.)

(a) Montrer que $H^1(p, \Omega) \subset H^1(\Omega)$.

(b) Montrer que $H^1(p, \Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert. [On pourra remarquer qu'une suite de Cauchy dans $H^1(p, \Omega)$ est aussi de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.]

On pose $H_0^1(p, \Omega) = H^1(p, \Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

2. (Espace fonctionnel, suite.) Montrer que $H_0^1(p, \Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(p, \Omega)$.

3. (solution faible.) Soit $h \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe un et un seul u t.q.

$$u \in H_0^1(p, \Omega), \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} p^2(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} h(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(p, \Omega). \quad (3)$$

4. (Précisions...)

(a) On suppose ici que $p^2 \in L_{loc}^1(\Omega)$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(p, \Omega)$.

(b) On prend maintenant $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$. Donner un exemple de fonction p (avec $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et t.q. $\inf\{p(x), x \in \Omega\} > 0$) pour lequel $C_c^\infty(\Omega) \cap H_0^1(p, \Omega) = \{0\}$ (cette question est plus difficile).

Exercice 4 Problème de Neumann

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), faiblement lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L_{loc}^1 dont les dérivées (au sens des distributions) sont nulles est nécessairement constante (c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p.).

1. (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H , la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.

[On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C , ne dépendant que Ω , t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]

2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a \int_{\Omega} u(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla u(x) dx, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (4)$$

[On pourra considérer $T|_H$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \dots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de

$$u \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx = a \int_{\Omega} v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5)$$

3. (Existence et unicité.)

- (a) Si $a \neq 0$, montrer que (5) n'a pas de solution.
- (b) Si $a = 0$, montrer que (5) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H .
- (c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$, $F \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (5) est aussi dans $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, montrer que $-\operatorname{div}(A \nabla u) = -\operatorname{div} F$, dans Ω , et que $A \nabla u \cdot \mathbf{n} = F \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω .

4. (Dépendance par rapport aux paramètres.) On suppose $a = 0$ et on note u la solution (appartenant à H) de (5). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H$ est la solution de (5) avec A_n au lieu de A et F_n au lieu de F (et $a = 0$). On suppose que

- $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,\dots,N}$ vérifie, pour tout n , les mêmes hypothèses que A avec un α indépendant de n ,
- $(a_{i,j}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $i, j = 1, \dots, N$,
- $a_{i,j}^{(n)} \rightarrow a_{i,j}$ p.p., quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $i, j = 1, \dots, N$,
- $F_n \rightarrow F$ dans $L^2(\Omega)^N$, quand $n \rightarrow \infty$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H , puis que $u_n \rightarrow u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ (quand $n \rightarrow \infty$) et enfin que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

5. (Régularité H^2 par la technique des réflexions, cette question est indépendante de la précédente.) On suppose que $a = 0$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On note u la solution (appartenant à H) de (5). On suppose que $N = 2$ et que $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On pose $\Omega_s =]-1, 1[\times]0, 1[$. On définit A , f et u sur Ω_s en posant $a_{i,j}(x_1, x_2) = a_{i,j}(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $i = j$, $a_{i,j}(x_1, x_2) = -a_{i,j}(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $i \neq j$, $f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$. Montrer que u est solution de (5), avec Ω_s au lieu de Ω .

En utilisant ainsi plusieurs réflexions, montrer (en se ramenant au théorème de régularité locale vu en cours) que $u \in H^2(\Omega)$ dans le cas $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$.

Exercice 5 (Modélisation d'un problème de contact)

On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\}$, $I =]-1, 1[$ ($\subset \mathbb{R}$), et $\Omega = B \setminus [-1, 1] \times \{0\}$ (Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$). On note $\partial B = \bar{B} - B$. On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$ et $x \cdot y$ le produit scalaire correspondant de x et y ($\in \mathbb{R}^2$).

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^\infty(I)$ t.q. $g \geq 0$ p.p. (sur I). On s'intéresse au problème suivant.

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u(x) = 0, x \in \partial B, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^-), x \in I, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) = g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-)), x \in I. \quad (9)$$

1. (Recherche d'une formulation faible)

On suppose, dans cette question, que f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et g une fonction continue sur I . On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{(x, y), y > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{(x, y), y < 0\}$. Soit $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $u|_{\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$ et $u|_{\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$. Noter alors que toutes les expressions dans (6)-(9) ont bien un sens. On a, par exemple, $u(x, 0^+) = \lim_{y \rightarrow 0, y > 0} u(x, y)$.

Montrer que u est solution "classique" de (6)-(9) (c'est-à-dire vérifie (6) pour tout $x \in \Omega$, (7) pour tout $x \in \partial B$ et (8),(9) pour tout $x \in I$) si et seulement si u vérifie:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0, \forall x \in \partial B, \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \\ \int_I g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-))(v(x, 0^+) - v(x, 0^-)) dx &= \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

pour tout $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $v|_{\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$, $v|_{\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$ et $v(x) = 0$ pour tout $x \in \partial B$. Noter que dx désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue (1 ou 2 dimensionnelle).

2. (Construction de l'espace fonctionnel) On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\rho(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, et d'intégrale 1 (sur $\mathbb{R}^2$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n^2 \rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) (Trace sur ∂B , sans "cartes locales") Soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour $n > 5$, on pose $u_n(x) = \int_{\Omega} u(y) \rho_n(x(1 - \frac{1}{n}) - y) dy$, pour $x \in D$, avec $D = \{x \in B, \frac{3}{2} < |x| < 2\}$. Montrer que $u_n \in C^\infty(\overline{D})$, et que $u_n \rightarrow u|_D$, dans $H^1(D)$, quand $n \rightarrow \infty$.

En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu γ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2([0, 2\pi])$ t.q. $\gamma(u)(\theta) = u(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ p.p. en $\theta \in]0, 2\pi[$ si $u \in H^1(\Omega)$ et u est continue sur $\overline{B} \setminus [-1, 1] \times \{0\}$.

(b) Montrer qu'il existe γ_+ [resp. γ_-] linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(I)$ t.q. $\gamma_+(u)(x) = u(x, 0^+)$ [resp. $\gamma_-(u)(x) = u(x, 0^-)$] p.p. en $x \in I$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u|_{\Omega_+}$ est continue sur $\overline{\Omega_+}$ [resp. $u|_{\Omega_-}$ est continue sur $\overline{\Omega_-}$].

3. (Coerci(tivité))

On pose $H = \text{Ker } \gamma$ (où γ est défini à la question précédente).

Montrer qu'il existe C t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. [On pourra, par exemple, remarquer que $u|_{\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$ et $u|_{\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$]

4. (Existence et unicité de solutions faibles)

On rappelle que $H = \text{Ker } \gamma$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de (11).

$$\begin{cases} u \in H, \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_I g(x)(\gamma_+ u(x) - \gamma_- u(x))(\gamma_+ v(x) - \gamma_- v(x)) dx \\ = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \forall v \in H. \end{cases} \quad (11)$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (11) avec g t.q. $g(y) = n$, pour tout $y \in I$. Montrer que $u_n \rightarrow u$ (en un sens à préciser), quand $n \rightarrow \infty$, où u est la (unique) solution (faible) de $-\Delta u = f$ dans B , $u = 0$ sur ∂B .

Exercice 6 (De Fourier à Dirichlet...)

Soient $\sigma \geq 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, y) + \sigma u(0, y) &= g(y), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

1. Donner une définition de solution “classique” de (12) et de solution “faible” de (12).
2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (12).
3. Montrer que si $g = 0$ presque partout, la solution faible de (12) (trouvée à la question précédente) appartient à $H^2(\mathbb{R}_+^N)$.
4. Toujours lorsque $g = 0$ presque partout, on note u_n la solution forte associée à $\sigma = n$. Montrer que u_n converge dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ vers u solution faible de :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + u(x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \\ u(0, y) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Exercice 7 (Equation de Schrödinger)

Soit $N \geq 1$. On note Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (en fait, les résultats de cet exercice restent vrais si Ω un ouvert borné “assez régulier” de $\mathbb{R}^N$).

Pour $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (14)$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette première question la condition aux limites :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (15)$$

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on dit que (u_1, u_2) est solution faible du problème (14)-(15) si

$$\begin{aligned} u_1 &\in H_0^1(\Omega), \quad u_2 \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} u_2(x) \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} f_1(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_2(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx - \int_{\Omega} u_1(x) \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} f_2(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (16)$$

- (a) Montrer que le problème (16) admet une et une seule solution. [Utiliser l'espace $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.]
- (b) Montrer que le problème (14)-(15) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les équations (14) sont satisfaites *p.p.* sur Ω . [Utiliser, en particulier, la question précédente et un théorème de régularité vu en cours. Ne pas oublier de montrer aussi l'unicité.]

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

- (c) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution de (16), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

2. On considère dans cette deuxième question la condition aux limites :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (17)$$

où n désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieure à Ω .

Pour résoudre le problème (14)-(17), on va introduire un paramètre, $n \in \mathbb{N}^*$, destiné à tendre vers l'infini.

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 + \frac{1}{n}u_1 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 + \frac{1}{n}u_2 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (18)$$

avec la condition aux limites (17).

On dit que (u_1, u_2) est solution faible du problème (18)-(17) si

$$\begin{aligned} u_1 &\in H^1(\Omega), \quad u_2 \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} (u_2(x) + \frac{1}{n}u_1(x))\varphi(x) dx &= \int_{\Omega} f_1(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla u_2(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx + \int_{\Omega} (\frac{1}{n}u_2(x) - u_1(x))\varphi(x) dx &= \int_{\Omega} f_2(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Noter aussi que (u_1, u_2) est solution faible du problème (14)-(17) si (u_1, u_2) est solution de (19) en remplaçant $\frac{1}{n}$ par 0.

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le problème (19) admet une et une seule solution, que l'on note $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$ dans la suite.
- (b) Montrer que :

$$\|u_1^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En déduire que les suites $(u_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(u_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

- (c) Montrer qu'il existe une et une seule solution au problème (19) obtenu en remplaçant $1/n$ par 0, c'est à dire une et une solution faible au problème (14)-(17). [Pour l'existence, utiliser les suites $(u_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(u_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la question précédente et faire tendre n vers $+\infty$. Montrer ensuite l'unicité.]

- (d) Montrer que le problème (14)-(17) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega)$, les équations (14) sont satisfaites *p.p.* sur Ω et les équations (17) sont satisfaites *p.p.* (pour la mesure de Lebesgue $N-1$ -dimensionnelle) sur $\partial\Omega$ en utilisant l'opérateur "trace" (vu en cours) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour donner un sens à $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}$.

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

- (e) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution faible de (14)-(17), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

3. De manière similaire, résoudre le problème (14) avec la condition aux limites :

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exercice 8 (A la limite de H^{-1})

Partie I, décomposition dans $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

1. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $\varphi(u)$ la fonction (de Ω dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u(x))$. Montrer que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et que $D_i \varphi(u) = \varphi'(u) D_i u$ *p.p.* pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ (où $\varphi'(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \varphi'(u(x))$). [Reprendre la méthode vue en cours.]

On définit maintenant φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s, \text{ pour } 0 \leq s \leq 1, \\ \varphi(s) &= -\frac{s^2}{2} + 2s - \frac{1}{2}, \text{ pour } 1 < s \leq 2, \\ \varphi(s) &= \frac{3}{2}, \text{ pour } 2 < s, \\ \varphi(s) &= -\varphi(-s), \text{ pour } s < 0. \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, On définit φ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_k(s) = k\varphi(\frac{s}{k})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(s) \rightarrow s$ et $\varphi'_k(s) \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow \infty$ et que $|\varphi_k(s)| \leq |s|$, $\varphi'_k(s) \leq 1$.
3. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\varphi_k(u) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et que $\varphi_k(u) \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $k \rightarrow \infty$.
4. En déduire que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = u_1 + u_2$ et $\|u_2\|_{H_0^1} \leq \varepsilon$.

Partie II, Inégalité de Trudinger-Möser

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On admet qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω , t.q.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\sqrt{q}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \forall q \in [1, \infty[.$$

(Noter que cette inégalité a été démontrée en T.D. avec q au lieu de $\sqrt{q}$.)

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ et $a > 0$, ne dépendant que de C (donné ci dessus) t.q. $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ et $\|e^{\sigma u^2}\|_{L^1(\Omega)} \leq a$. [Développer e^s en puissances de $s \dots$]
2. En utilisant la partie I (et la question précédente), Montrer que $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\sigma > 0$. En déduire que $e^{\sigma u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, tout $\sigma > 0$ et tout $p \in [1, \infty[$.

Partie III, sur la résolution du problème de dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f\sqrt{|\ln(|f|)|} \in L^1(\Omega)$.

1. (Preliminaire.) Soit $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, ne dépendant que de σ , t.q.

$$st \leq \alpha e^{\sigma s^2} + \beta t \sqrt{|\ln t|} + \gamma t, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+^*.$$

[On pourra, par exemple, remarquer que $st \leq \max\{\beta t \sqrt{|\ln t|}, se^{(s^2/\beta^2)}\}$ puis choisir β et conclure.]

2. Montrer que $fu \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et que l'application $T : u \mapsto \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Partie IV, contre-exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $0 \in \Omega$ et on se donne $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ t.q. $B_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\delta\} \subset \Omega$.

1. Soit $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u(x) = (\ln|x|)^{\gamma}$ p.p. sur B_{δ} . [On pose $v(x) = (\ln|x|)^{\gamma}$. On rappelle qu'on a vu en T.D. que $v \in H^1(B_{2\delta})$. Il n'est pas demandé de redémontrer ce résultat.]
2. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^{\theta} \in L^1(\Omega)$ et $fu \notin L^1(\Omega)$ pour certains $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^{\theta} \in L^1(\Omega)$ et t.q. il n'existe pas $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Exercice 9 (Décomposition de Hodge)

Soient Ω un ouvert borné connexe faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $f \in (L^2(\Omega))^N$.

Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_{\Omega} g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.

On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega =]0, 1]^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)$ -dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

Exercice 10 (Problème de Stokes)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $f = (f_1, \dots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On rappelle que u est solution du problème de Stokes si:

$$u = (u_1, \dots, u_N)^t \in H, \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v = (v_1, \dots, v_N)^t \in H. \quad (20)$$

On se propose ici de montrer qu'il existe une et une seule solution de (20) par une méthode de pénalisation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème suivant:

$$u = (u_1, \dots, u_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N, \quad \int_{\Omega} (\nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) + n(\operatorname{div} u(x)) D_i v(x)) dx = \int_{\Omega} f_i(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (21)$$

1. Montrer que (20) admet au plus une solution.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution à (21). [Utiliser le lemme de Lax-Milgram sur $(H_0^1(\Omega))^N$.] On note, dans la suite, $u^{(n)}$ cette solution.
3. Montrer que la suite $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^N$ et que la suite $(\sqrt{n} \operatorname{div} u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.
4. Montrer que, après extraction éventuelle d'une sous suite, $u^{(n)} \rightarrow u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \rightarrow \infty$, où u est solution de (20). En déduire (avec la question 1) que (20) admet une unique solution, notée u , et que $u^{(n)} \rightarrow u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \rightarrow \infty$ (sans extraction de sous suite).

Exercice 11 (Conditions aux limites de Vencel)

Notations et Rappels du cours

On note $H_p^1(0, 2\pi) = \{u \in H^1([0, 2\pi]); u(0) = u(2\pi)\}$ (on rappelle que, si $u \in H^1([0, 2\pi])$, u admet toujours un représentant continu sur $[0, 2\pi]$ et on identifie u avec ce représentant continu).

Soit $B = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. On rappelle qu'il existe une application $\gamma : H^1(B) \rightarrow L^2(\partial B)$, linéaire, continue et t.q. $\gamma(u) = u$ p.p. sur ∂B si $u \in H^1(B) \cap C(\overline{B}, \mathbb{R})$.

Si $w \in L^2(\partial B)$, on définit $j(w) \in L^2([0, 2\pi])$ par $j(w)(\theta) = w(\cos \theta, \sin \theta)$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$. L'application j est donc une isométrie de $L^2(\partial B)$ sur $L^2([0, 2\pi])$, de sorte que $\tilde{\gamma} = j \circ \gamma$ est linéaire continue de $H^1(B)$ dans $L^2([0, 2\pi])$.

On pose $H = \{u \in H^1(B); \tilde{\gamma}(u) \in H_p^1(0, 2\pi)\}$. On munit H du produit scalaire $(u/v)_H = (u/v)_{H^1(B)} + (\tilde{\gamma}(u)/\tilde{\gamma}(v))_{H_p^1(0, 2\pi)}$.

Partie I (Préliminaire d'analyse fonctionnelle)

1. Montrer que $H_p^1(0, 2\pi)$ est une espace de Hilbert.
2. Montrer que H est une espace de Hilbert.

Partie II (Conditions aux limites de Vencel)

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, on définit r et θ par $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ t.q. $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0), \mathbb{R})$, on pose $u_r(x, y) = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ et $u_\theta(x, y) = -y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. (Dans la suite, on pose $u_{\theta\theta} = (u_\theta)_\theta$, si $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$.)

Pour f et g données, on s'intéresse au problème :

$$-\Delta u(x, y) + u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in B, \quad (22)$$

$$u_r(x, y) - u_{\theta\theta}(x, y) + u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \partial B. \quad (23)$$

Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on appelle “solution faible” de (22)-(23) une solution du problème suivant :

$$u \in H, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \int_B \left(\sum_i D_i u(z) D_i v(z) + u(z) v(z) \right) dz + \int_0^{2\pi} (D\tilde{\gamma}(u)(\theta) D\tilde{\gamma}(v)(\theta) + \tilde{\gamma}(u)(\theta) \tilde{\gamma}(v)(\theta)) d\theta \\ = \int_B f(z) v(z) dz + \int_0^{2\pi} j(g)(\theta) j(\gamma(v))(\theta) d\theta, \quad \forall v \in H. \end{aligned} \quad (25)$$

1. Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution de (24)-(25).
2. (Question plus difficile) On retire, dans cette question, “uv” dans la 1ère intégrale de (25). Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe encore une et une seule solution de (24)-(25).
3. Soient $f \in C(\overline{B}, \mathbb{R})$ et $g \in C(\partial B, \mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$. Montrer que u est solution au sens “classique” de (22)-(23) (c.a.d. vérifie (22) pour tout $(x, y) \in \overline{B}$ et (23) pour tout $(x, y) \in \partial B$) si et seulement si u est solution faible de (22)-(23).
4. Pour $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on note $T(f, g) = (u, \gamma(u)) \in L^2(B) \times L^2(\partial B)$, où est l'unique solution faible de (22)-(23). Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $L^2(B) \times L^2(\partial B)$ dans lui-même.