Université de Marseille, M2-Centrale
Equations elliptiques non linéaires, octobre 2010

Exercice 1 (Existence par Schauder)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \leq a(x,s) \leq \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0,1[$ t.q. $|f(\cdot,s,p)| \leq C(d + |s|^\delta + |p|^\delta)$ p.p., pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Montrer qu'il existe un et un seul u solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{1}$$

[On pourra construire une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et utiliser le théorème de Schauder.]

Exercice 2 (Existence par minimisation)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $a \in L^\infty(\Omega)$.
- Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \leq a$ p.p..
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0,1[$ t.q. $|f(\cdot,s)| \leq C|s|^\delta + d$ p.p., pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$, on pose $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$.

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F(\cdot,u) \in L^1(\Omega)$.

   Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx - \int_\Omega F(x,u(x))dx$.
2. Montrer que $E(u) \to +\infty$ quand $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.
3. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

4. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2}$$

Exercice 3 (Minimisation avec contrainte)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) et $p \in]1, \frac{N+2}{N-2}[$. On cherche une solution non nulle au problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u = |u|^{p-1}u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3}$$

1. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on pose $E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$ et $F(v) = \int_\Omega |v|^{p+1}dx$. On pose aussi $A = \{v \in H_0^1(\Omega),\ F(v) = 1\}$. Montrer qu'il existe $u \in A$ t.q. $u \geq 0$ p.p. et $E(u) \leq E(v)$ pour tout $v \in A$.

2. Montrer qu'il existe u non nulle, $u \geq 0$ p.p., solution faible de (3).

Exercice 4 (Opérateur de Leray-Lions)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1, +\infty[$ vérifiant (avec $p' = p/(p-1)$):

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- (Coercivité) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha(x, s, \xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- (Croissance) Il existe $d \in L^{p'}(\Omega)$ et $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|a(\cdot, s, \xi)| \leq C(d + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$ p.p., pour tout $s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.
- (Monotonie) $(a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)\cdot(\xi - \eta) > 0$ pour tout $(s, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$, et p.p. en $x \in \Omega$.

Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Montrer qu'il existe u solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x))\cdot\nabla v(x)dx = \langle f, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array}\right. \tag{4}$$

[Reprendre la démonstration du cours.]