Université de Marseille, M2-Centrale
EDP, Espaces de Sobolev, septembre 2010

Exercice 1 (Exemple de dérivée)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N, |x_i| < 1, i = 1, \ldots, N\}$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $u(x) = 0$ si $x \notin \Omega$.

1. Pour $i = \{1, \ldots, N\}$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ ne dépend que des valeurs prises par φ sur le bord de Ω.
2. Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2 (Une fonction de dérivée nulle est constante)

Soit $u \in L^1_{loc}(]0,1[)$ t.q. $Du = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.)

Exercice 3 (Espace de Sobolev en 1d)

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.
   (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $u(x) = C + \int_0^x Du(t)dt$, pour presque tout $x \in]0,1[$. En déduire que $u \in C([0,1], \mathbb{R})$ (au sens qu'il existe $v \in C([0,1], \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p. sur $]0,1[$, en identifiant u et v, on peut donc dire que $W^{1,p}(]0,1[) \subset C([0,1], \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)}$.
   (c) Si $p > 1$, Montrer que u est une fonction höldérienne d'exposant $1 - (1/p)$.
2. Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $w \in L^p(]0,1[)$ t.q. $u(x) = u(0) + \int_0^x w(t)dt$, pour tout $x \in]0,1[$. Montrer que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $Du = w$.

Exercice 4 (Généralisation de l'exercice 2)

Soient $N \geq 1$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < 1\}$ et $u \in L^1_{loc}(B)$.

1. On suppose que $D_i u = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p.. (u est donc la fonction constante égale à a.) [On pourra, par exemple, raisonner ainsi :

   Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de noyaux régularisants, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1, \ \rho \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1, \\ &\text{et, pour } n \in \mathbb{N}^\star, \ x \in \mathbb{R}^N, \ \rho_n(x) = n^N \rho(nx). \end{aligned} \tag{1}$$

   On pose $u_\varepsilon(x) = u$ si $|x| \leq 1 - \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ sinon. Puis, on pose $u_{\varepsilon,n} = u_\varepsilon \star \rho_n$.

   Montrer que $u_{\varepsilon,n} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et que, si $1/n < \varepsilon$, $u_{\varepsilon,n}$ est constante sur la boule de centre 0 et de rayon $1 - 2\varepsilon$. Puis, conclure. . .]

2. On suppose que $D_i u$ est une fonction continue, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$ (au sens “il existe $v \in C^1(B, \mathbb{R})$ t.q. $u = v$ p.p.”). [On pourra, par exemple, reprendre l'indication de la 1ère question et raisonner ainsi : Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$u_{\varepsilon,n}(y) - u_{\varepsilon,n}(x) = \int_0^1 \nabla u_{\varepsilon,n}(ty + (1-t)x) \cdot (x-y) dt,$$

et que pour z dans la boule de centre 0 et rayon $1 - 2\varepsilon$ on a $\nabla u_{\varepsilon,n}(z) = \int_B \nabla u(\overline{z}) \rho_n(z - \overline{z}) d\overline{z}$. En déduire que pour presque tout $x, y \in B$, on a

$$u(y) - u(x) = \int_0^1 \nabla u(ty + (1-t)x) \cdot (x-y) dt.$$

Montrer alors que u est continue et que la formule précédente est vraie pour tout $x, y \in B$. Conclure enfin que $u \in C^1(B, \mathbb{R})$.]

3. On reprend ici la 1ère question en remplaçant B par un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Montrer que u est constante sur chaque composante connexe de B. (Comme d'habitude, u constante signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $u = a$ p.p..)

Exercice 5 (Non généralisation de l'exercice 3)

Soit $\Omega = \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < 1, i = 1, 2\}$, $\gamma \in]0, 1/2[$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = (\ln(|x|))^\gamma$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. En déduire que $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Exercice 6 (Trois applications de Hahn-Banach)

Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.

2. Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.

3. Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E$” pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E$”. (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E$”.)

Exercice 7 (Séparabilité de L^p si $1 \leq p < \infty$)

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $1 \leq p < \infty$. Montrer que $L^p(\Omega)$ est séparable.

Exercice 8 (Réflexivité de L^p si $1 < p < \infty$)

Soient (X, T, m) un espace mesuré σ-fini et $1 < p < \infty$, montrer que $L^p(X, T, m)$ est un espace de Banach réflexif.

Exercice 9 (Séparabilité et réflexivité d'un s.e.v. fermé)

Soient E un espace de Banach (réel) et F un s.e.v. fermé de E. Montrer que :

1. E séparable $\Rightarrow$ F séparable.

2. E réflexif $\Rightarrow$ F réflexif.

Exercice 10 (Fonctions lipschitziennes)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction liptschitzienne. Montrer que $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

N.B.: Réciproquement, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors u est lipschitzienne (au sens : il existe $v : \Omega \to \mathbb{R}$ lipschitzienne t.q. $u = v$ p.p.).

Exercice 11 (Inégalités de Sobolev pour $p > N$)

L'objet de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Sobolev pour $p > N$.

Si $x \in \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, on note $x = (x_1, \bar{x})$, avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$. On note $H = \{(t, (1 - |t|)a)$, $t \in]-1, 1[$, $a \in B_{N-1}\}$, où $B_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^{N-1}, |x| < 1\}$. (On rappelle que $|\cdot|$ désigne toujours la norme euclidienne.)

Soit $N < p < \infty$.

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(1, 0) - u(-1, 0)| \leq C_1 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(H)}. \tag{2}$$

   [On pourra commencer par écrire $u(1, 0) - u(0, a)$ comme une intégrale utilisant convenablement $\nabla u(t, (1 - t)a)$ pour $t \in]0, 1[$, et intégrer pour $a \in B_{N-1}$ pour comparer u(1,0) et sa moyenne sur B_{N-1}. On pourra se limiter au cas $N = 2$, pour éviter des complications inutiles.]

2. Soit $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$|u(x) - u(y)| \leq C_2 \|(|\nabla u|)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} |x - y|^{1 - \frac{N}{p}}. \tag{3}$$

   [Après, éventuellement, une rotation et une translation, on peut supposer que $x = (b, 0)$ et $y = (-b, 0)$. Se ramener alors à (2).]

   Pour $\alpha \in]0, 1]$ et K sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$, on note

$$C^{0,\alpha}(K) = \{u \in C(K, \mathbb{R}),\ \|u\|_{L^\infty(K)} < \infty \text{ et } \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty\},$$

   et, si $u \in C^{0,\alpha}(K)$,

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(K)} + \sup_{x,y \in K,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

   Noter que $C^{0,\alpha}(K)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

3. Soit $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{4}$$

   [Cette question est plus délicate... Il faut utiliser (3) et le fait que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.]

4. (Injection de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$.) Montrer que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_4 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C_4 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{5}$$

5. (Injection de Sobolev dans Ω.) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), à frontière lipschitzienne. Montrer que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, et qu'il existe $C_5 \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de Ω, N et p, t.q.

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_5 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{6}$$

Exercice 12 (Inégalités de Sobolev pour $p \leq N$)

1. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.
   (a) On suppose ici $N = 1$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.
   (b) Par récurrence sur N, montrer que $\|u\|_{N/(N-1)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{1/N} \ldots \|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{1/N}$.
   (c) Montrer qu'il existe C_N ne dépendant que de N t.q. $\|u\|_{N/(N-1)} \leq C_N \| \, |\nabla u| \, \|_1$.
   (d) Soit $1 \leq p < N$. Montrer qu'il existe $C_{N,p}$ ne dépendant que N et p t.q. $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p$, avec $p^\star = (Np)/(N-p)$.

2. Soit $1 \leq p < N$. Montrer que $\|u\|_{p^\star} \leq C_{N,p} \| \, |\nabla u| \, \|_p$, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($C_{N,p}$ et $p^\star$ sont donnés à la question précédente). En déduire que l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$.

3. Soit $p = N$. Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

4. On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne. Pour $1 \leq p < N$, Montrer que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [p, p^\star]$ ($p^\star = (Np)/(N - p)$). Montrer que l'injection de $W^{1,N}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue pour tout $q \in [N, \infty[$ (Pour $N = 1$, le cas $q = \infty$ est autorisé).

Exercice 13 (Noyau de l'opérateur "trace")

Soient $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $1 \leq 1 < \infty$ et $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ l'opérateur "trace" (vu en cours).

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\gamma = W_0^{1,p}(\Omega)$.

2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Montrer que $\gamma u = u$ p.p. (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle) sur $\partial\Omega$.

Exercice 14 (prolongement H^2)

Soient $N \geq 1$, $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra s'inspirer de la démonstration faite en cours de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$].

2. Montrer qu'il existe un opérateur P linéaire continu de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$ [On pourra chercher P sous la forme $Pu(x_1, y) = \alpha u(-x_1, y) + \beta u(-2x_1, y)$, pour $x_1 \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$].

3. On prend maintenant $p = \infty$. A-t-on $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{2,\infty}(\Omega)$? Existe-t-il un opérateur P linéaire continu de $W^{2,\infty}(\Omega)$ dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tel que $Pu = u$ p.p. dans Ω, pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$? (justifier vos réponses...).