Université de Marseille, M2-Centrale
Problème de Stokes, octobre 2010

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, c'est-à-dire à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega, \\ &\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Noter que la première équation de (1) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N;\ \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (1) un couple (u, p) solution de

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ p \in L^2(\Omega), \\ &\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int p(x) \operatorname{div} v(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx \\ &\qquad\qquad \text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \tag{2}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u, p) de (1) est solution de (2).

Partie I, existence et unicité de u

Montrer que, si (u, p) est une solution classique de (1), u est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx,\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \tag{3}$$

On montre dans cete pemière partie que (3) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2), u est alors l'unique solution de (3).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^d$.
2. Montrer que (3) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]
3. Soit (u, p) une solution de (2). Montrer que u est l'unique solution de (3).

Soit u la solution de (3). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de A. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de F dans E. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de E défini par

$$(A^\star g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^\star)^\perp$.
   (On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E,\ (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)
2. Montrer que $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A^\star}$.

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 1 *Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω.

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \mathrm{div}\, u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans E quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω.
   (a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.
   (b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. [Utiliser le lemme 1.]
   (c) Montrer que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}A^\star$ et que $\mathrm{Ker}A = H$.
3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx.$$

   On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (3).
   (a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \mathrm{Im}A^\star$.
   (b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2).
4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (3)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..