Université de Marseille
Master de Mathématiques, 2ème année, CEPS, mars 2021
Simulation numérique des équations de Saint-Venant

1 Introduction

On s'intéresse au système des équations de Saint-Venant à une dimension d'espace, c'est-à-dire au système suivant :

$$\partial_t h(x,t) + \partial_x(hu)(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$\partial_t(hu)(x,t) + \partial_x(hu^2 + \frac{g}{2}h^2)(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

L'intensité de la gravité est prise égale à 1, c'est-à-dire que $g = 1$.
On rappelle que l'inconnue $h(x,t)$ est la hauteur de la colonne d'eau située au point x à l'instant t et l'inconnue $u(x,t)$ est la vitesse de cette colonne d'eau (située au point x à l'instant t).
La fonction h prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ et la fonction u prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
Il est pratique d'introduire deux nouvelles inconnues :

— la quantité de mouvement, $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $q = hu$,

— la célérité des ondes, $c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^\star$, définie par $c = \sqrt{gh}$.

On note alors

$$U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} u \\ 2c \end{bmatrix},\ p = \frac{gh^2}{2} \text{ et } D = \Big\{ \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, h > 0 \Big\}.$$

En définissant $F : D \to \mathbb{R}^2$ par $F(U) = \begin{bmatrix} q \\ \dfrac{q^2}{h} + \dfrac{g}{2}h^2 \end{bmatrix}$, le système (1)-(2) s'écrit aussi

$$\partial_t U(x,t) + \partial_x(F(U))(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Au système (1)-(2), on ajoute une condition initiale

$$h(x,0) = 1,\ u(x,0) = 0,\ x < 1, \tag{4}$$

$$h(x,0) = h_d,\ u(x,0) = 0,\ x > 1, \tag{5}$$

Deux choix différents de h_d seront considérés, $h_d = 0.01$ et $h_d = 0.4$. Le système (1)-(2) avec la condition initiale (4)-(5) admet une unique solution entropique. L'objectif est de construire cette solution entropique sur l'intervalle $]0,2[$ en espace et $]0,0.42[$ en temps (la construction de la solution entropique est rappelée en section 2) et de la comparer avec la solution donnée par trois schémas numériques, le schéma de Rusanov et le schéma VFRoe avec et sans correction entropique (section 3). Dans le cas du schéma VFRoe avec correction entropique, on regardera aussi si la correction entropique a été active et si oui pour quelle onde.

2 Construction de la solution exacte

La solution exacte que nous cherchons est la solution du problème de Riemann avec la discontinuité initiale située en $x = 1$ (au lieu de $x = 0$ comme cela est décrit usuellement). La solution du problème de Riemann (avec la discontinuité initiale située en $x = 0$) pour les équations de Saint-Venant est complètement donnée dans ce document :
https ://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/master2.d/M2edp.pdf
Nous rappelons cette construction ici dans le cas qui nous intéresse (qui consiste en une 1-détente suivie par un 2-choc, selon la terminologie des systèmes hyperboliques), en tenant compte du fait que la discontinuité initiale est située en

$x = 1$ et non en $x = 0$. Mais, il est vivement conseillé de consulter le document ci-dessus pour comprendre comment on obtient cette solution.
On considère le système (1)-(2) avec condition initiale

$$h(x,0) = h_g,\ u(x,0) = u_g,\ x < 1, \tag{6}$$
$$h(x,0) = h_d,\ u(x,0) = u_d,\ x > 1. \tag{7}$$

$u_g, u_d \in \mathbb{R}$, $h_g, h_d \in \mathbb{R}_+^\star$. On suppose que $g = 1$ et on pose $c_g = \sqrt{h_g}$ et $c_d = \sqrt{h_d}$.
La condition $u_d - u_g < 2(c_g + c_d)$ est nécessaire pour la résolution de ce problème afin que h prenne ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ (c'est la condition de "non apparition du vide"). Elle est, bien sûr, satisfaite avec les données qui nous intéresse dans ce document.
On pose $S = \sqrt{\frac{(h_g-h_d)(h_g^2-h_d^2)}{2h_gh_d}}$ On rappelle comment est la solution du problème de Riemann selon la condition initiale :

1. Si $2|c_g - c_d| \le u_d - u_g$, la solution est formée de 2 detentes,
2. si $2|c_g - c_d| > u_d - u_g$, $u_g - u_d < S$, $h_d \le h_g$, la solution est formée d'une 1-détente suivie par un 2-choc,
3. si $2|c_g - c_d| > u_d - u_g$, $u_g - u_d < S$, $h_d > h_g$, la solution est formée d'une 1-choc suivie par un 2-détente,
4. si $2|c_g - c_d| > u_d - u_g$, $u_g - u_d \ge S$, la solution est formée d'une 1-choc suivie par un 2-choc.

Ici, $u_g = u_d = 0$ et $h_d < h_g = 1$, nous sommes donc dans le cas 2, c'est-à-dire d'une 1-détente suivie par un 2-choc.
Nous continuons maintenant avec ces valeurs pour la condition initiale.
On commence par calculer l'état intermédiaire, c'est-à-dire entre la 1-détente et le 2-choc. Il est noté $h_\star$, $u_\star$.
Pour $z > 1$, on pose $\varphi(z) = \sqrt{(1-1/z)(z^2-1)}$ et pour $h > h_d$, $\phi(h) = \sqrt{\frac{h_d}{2}}\varphi(h/h_d) + 2\sqrt{h}$. La valeur $h_\star$ est alors l'unique valeur entre h_d et 1 telle que $\phi(h_\star) = 2$. L'algorithme de Newton permet de calculer $h_\star$.
Puis, on obtient $u_\star = \sqrt{\frac{h_d}{2}}\varphi(\frac{h_\star}{h_d})$.
Il est possible maintenant de calculer la solution exacte à l'instant $T > 0$ (nous prendrons $T = 0.42$ dans les tests numériques).
La relation de Rankine-Hugoniot permet de trouver la vitesse du choc, notée σ, et la position du choc à l'instant T, notée p_T :

$$\sigma = \frac{h_\star u_\star}{h_\star - h_d},\ \ p_T = 1 + \sigma T.$$

Les formules $d_d = 1 + (u_g - \sqrt{h_g})T = 1 - T$ et $d_f = 1 + (u_\star - \sqrt{h_\star})T$ donnent le début et la fin de la détente.
On a donc

$$\begin{aligned} &h(x,T) = 1,\ u(x,T) = 0 \text{ si } x < d_d,\\ &h(x,T) = h_\star,\ u(x,T) = u_\star \text{ si } d_f < x < p_T,\\ &h(x,T) = h_d,\ u(x,T) = 0 \text{ si } p_T < x. \end{aligned}$$

Il reste à calculer la solution dans la détente, c'est-à-dire pour $d_d < x < d_f$. Ceci se fait en utilisant le 1-invariant de Riemann (c'est-à-dire $u + 2c$).
Pour $d_d < x < d_f$, on a $x = \alpha T + 1$, avec $-1 = u_g - \sqrt{h_g} < \alpha < u_\star - \sqrt{h_\star}$. On a alors $h(x,T) = ((2-\alpha)/3)^2$ et $u(x,T) = (2/3)(\alpha + 1)$.

3 Schémas numériques

Les trois schémas considérés sont des schémas de volumes finis à 3 points. On note δ le pas d'espace et μ_n le pas de temps (il peut être variable), Ils s'écrivent, pour $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\delta}{\mu_n}(U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}) + F_{i+1/2}^{(n)} - F_{i-1/2}^{(n)} = 0,$$

avec $F_{i+1/2}^{(n)} = G(U_i^{(n)}, U_{i+1}^{(n)})$. Les trois schémas diffèrent par le choix de fonction G, appelée "flux numérique". L'inconnue discrète $U_i^{(n)}$ est la valeur approchée recherchée de $U(x_i, t_n)$ avec $x_i = i\delta + \delta/2$ et $t_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j$. Les valeurs de $U_i^{(0)}$ sont données par (4)-(5).

Pour avoir la solution sur l'intervalle $]0, 2[$ en espace, on se donne $N = 2N_r$ (par exemple $N_r = 200$) et $\delta = 1/N_r$. L'indice i varie entre 0 et $(N-1)$. La condition initiale permet de calculer les valeurs de $U_i^{(0)}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ (distinguer $i < N_r$ et $i \geq N_r$). Comme les schémas sont à 3 points (et consistants), il suffit que le nombre de pas de temps soit strictement inférieur à N_r pour que les valeurs de $U_0^{(n)}$ et $U_{N-1}^{(n)}$ soient, pour tout n, égales aux valeurs initiales. On controlera donc, lors de l'utilisation des schémas numériques, que cette condition (entre nombre de pas de temps et N_r) est bien vérifiée.

Comme les schémas numériques sont explicites, le pas de temps est limité par une condition dite de Courant-Friedrichs-Lewy, c'est-à-dire $\mu_n \leq \frac{\delta}{M_n}$, avec (en notant $u_i^{(n)}$ et $c_i^{(n)}$ les vitesse et célérité données par $U_i^{(n)}$),

$$M_n = \max_{i \in \{0,\ldots,N-1\}} (|u_i^{(n)}| + c_i^{(n)}).$$

On pourra prendre par exemple $\mu_n = C_f \frac{\delta}{M_n}$ avec $C_f = 0.7$.

Les trois schémas se distinguent par le choix de la fonction G. On note $U_\ell = \begin{bmatrix} h_\ell \\ q_\ell \end{bmatrix}$ et $U_r = \begin{bmatrix} h_r \\ q_r \end{bmatrix}$ (et, pour $s = \ell, r$, $u_s = \frac{q_s}{h_s}$, $c_s = \sqrt{h_s}$). On donne dans les sections suivantes le choix de $G(U_\ell, U_r)$.

3.1 Schéma de Rusanov

Le schéma de Rusanov consiste à prendre

$$G(U_\ell, U_r) = \frac{1}{2}(F(U_\ell) + F(U_r)) + \frac{D}{2}(U_\ell - U_r), \tag{8}$$

avec $D = \max\{|u_\ell| + c_\ell, |u_r| + c_r\}$.

3.2 Schéma de VFRoe

Le schéma de Godunov (non demandé mais programmable avec le document cité dans l'introduction) consiste à prendre $G(U_\ell, U_r) = F(U_\star)$ où $U_\star$ est la solution du problème de Riemann en $x = 0$ avec donnée initiale U_ℓ (pour $x < 0$) et U_r (pour $x > 0$). Le schéma VFRoe consiste aussi à prendre $G(U_\ell, U_r) = F(U_\star)$ mais avec $U_\star$ solution (en $x = 0$) d'un problème de Riemann linéarisé (donc facile à résoudre) avec donnée initiale U_ℓ (pour $x < 0$) et U_r (pour $x > 0$).

Bien sûr, plusieurs linéarisation sont possibles. Ici, on remarque que le système (1)-(2) est équivalent (pour une solution régulière) au système

$$\partial_t V + B(V)\partial_x V = 0, \text{ avec } B(V) = \begin{bmatrix} u & c \\ c & u \end{bmatrix}.$$

On rappelle que $V = \begin{bmatrix} u \\ 2c \end{bmatrix}$.

On pose alors $\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 2\bar{c} \end{bmatrix}$, avec $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_\ell + u_r)$, $\bar{c} = \frac{1}{2}(c_\ell + c_r)$ et on résout le système de Riemann linéarisé

$$\partial_t V + B(\bar{V})\partial_x V = 0,$$

avec $V_\ell = \begin{bmatrix} u_\ell \\ 2c_\ell \end{bmatrix}$ (pour $x < 0$) et $V_r = \begin{bmatrix} u_r \\ 2c_r \end{bmatrix}$ (pour $x > 0$). Le schéma VFRoe consiste à prendre $G(U_\ell, U_r) = F(U_\star)$ avec $U_\star$ solution (en $x = 0$) de ce problème de Riemann linéarisé. Cette résolution donne $U_\star = \begin{bmatrix} h_\star \\ q_\star \end{bmatrix}$, $q_\star = h_\star u_\star$, avec

1. Si $\bar{u} - \bar{c} < 0 < \bar{u} + \bar{c}$. $c_\star = \frac{2c_\ell + 2c_r + u_\ell - u_r}{4}$, $h_\star = (c_\star)^2$, $u_\star = \frac{2c_\ell - 2c_r + u_\ell + u_r}{2}$.
2. Si $\bar{u} + \bar{c} < 0$. $u_\star = u_r$, $h_\star = h_r$.
3. Si $\bar{u} - \bar{c} > 0$. $u_\star = u_\ell$, $h_\star = h_\ell$.

3.3 Correction entropique

Le schéma VFRoe décrit en section 3.2 peut parfois propager une discontinuité non entropique (c'est un défaut classique des schémas utilisant une linéarisation, comme le schéma de Roe par exemple). Cela peut arriver lorsque une valeur propre du système est négative du coté "gauche" et positive du coté "droit" (ce qui laisse place à une détente). On applique alors une correction entropique. Celle que nous donnons ci-dessous à l'avantage d'être non paramétrique (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix d'un paramètre).

1. Si $u_\ell + c_\ell < 0$ et $u_r + c_r$>0 (le problème est alors sur la 2eme onde), on choisit pour $G(U_\ell, U_r)$ la formule donnée par le schéma de Rusanov, c'est-à-dire la formule (8).
2. Si $u_\ell - c_\ell < 0$ et $u_r - c_r$>0 (le problème est alors sur la 1ere onde), on choisit pour $G(U_\ell, U_r)$ la formule donnée par le schéma de Rusanov, c'est-à-dire la formule (8).