

TP 2, Récupération assistée d'hydrocarbures, modèle unidimensionnel

On souhaite, dans ce TP, comparer différentes discrétisations d'un problème hyperbolique (à une dimension d'espace) issu de la simulation numérique de la récupération assistée d'hydrocarbures. La manière d'obtenir ce modèle sera expliquée dans un document ultérieur (contenant aussi le cas multidimensionnel en espace).

On se donne $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et 2 fonctions régulières, f_1 et f_2 , de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $f_1(0) = 0$, f_1 croissante, $f_2(1) = 0$ et f_2 décroissante. On pose $f = \frac{f_1(\alpha + \beta f_2)}{f_1 + f_2}$. On suppose que $I = \mathbb{R}$ ou $I =]0, 1[$, $T > 0$ et on se donne $u_0 \in L^\infty(I)$, $0 \leq u_0 \leq 1$ p.p.. On cherche à calculer (de manière approchée) l'unique solution faible entropique (cette solution prend ses valeurs dans $[0, 1]$) $u : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ du problème :

$$u_t(x) + (f(u))_x = 0, \quad x \in I, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{p.p. dans } I. \quad (2)$$

Si $I =]0, 1[$, on ajoute à ce problème des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 1$. Ces conditions aux limites sont à prendre en un sens faible que nous ne décrirons pas ici. Les conditions aux limites seront données directement sur le problème discrétisé (voir plus loin). Les étudiants motivés par cet aspect du modèle peuvent regarder le petit article suivant (paragraphe 4) :

<http://www.cmi.univ-mrs.fr/gallouet/prague.d/praguetg.pdf>.

Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage uniforme de pas $h = 1/N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) en espace et de pas $k = T/M$ ($M \in \mathbb{N}^*$) en temps. Les inconnues discrètes sont notées u_i^n , $i \in \mathbb{Z}$ (pour $I = \mathbb{R}$) ou $i \in \{1, \dots, N\}$ (pour $I =]0, 1[$) et $n \in \{0, \dots, M\}$. La quantité u_i^n est censée approcher les valeurs de $u(x, t)$ pour $x \in]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et $t \in [t_n, t_{n+1}[$, avec $x_{i+\frac{1}{2}} = ih$ et $t_n = nk$. Les schémas numériques que nous allons étudier sont de la forme (volumes finis explicites) :

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_I, \quad n \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (3)$$

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z}_I, \quad (4)$$

avec $\mathbb{Z}_I = \mathbb{Z}$ si $I = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}_I = \{1, \dots, N\}$ si $I =]0, 1[$. La quantité $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ est donc censée être une approximation de $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$. On pose $\frac{k}{h} = \lambda$. Les schémas étant explicites, nous aurons dans la suite une limitation sur λ .

1. Equation linéaire, sans conditions aux limites

On prend ici $I = \mathbb{R}$, $T = 1/2$, $f_1(s) = s$, $f_2(s) = 1 - s$ (pour tout $s \in [0, 1]$, mais on peut aussi définir ainsi f_1 et f_2 sur \mathbb{R}), $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (de sorte que $f(s) = s$), $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.

Donner la solution exacte du problème et écrire un programme Matlab calculant la solution approchée pour les 2 choix suivants

- (a) schéma centré : $f_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2}$,
- (b) schéma décentré amont : $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_i^n)$.

(On remarquera qu'il suffit de calculer u_i^n pour $i \in \{-n+1, \dots, n\}$.) Comparer la solution exacte et la solution approchée dans les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 1/2$. déterminer numériquement l'ordre de convergence dans le cas $\lambda = 1/2$ en prenant la norme L^1 à l'instant $t = T$, c'est-à-dire $\sum_{i=-M+1}^M h |u_i^M - \bar{u}_i^M|$, avec $\bar{u}_i^n = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, T) dx$.

2. Equation non linéaire, $f' \geq 0$, sans conditions aux limites

On prend ici $I = \mathbb{R}$, $T = 1/2$, $f_1(s) = s^2$, $f_2(s) = \frac{(1-s)^2}{4}$ (pour tout $s \in [0, 1]$, ici aussi on peut considérer que f_1 et f_2 sont définies sur \mathbb{R}), $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.

Reprendre les mêmes questions que ci dessus (schéma centré et schéma décentré amont, on utilise ici le fait que $f' \geq 0$ sur $[0, 1]$) avec $\lambda = 1/m$ et $\lambda = 1/(2m)$, $m = \max\{f'(s), s \in [0, 1]\}$ (on pourra faire un calcul approché de m). La solution exacte peut être calculée (mais cela n'est pas demandé), on pourra choisir comme solution exacte la solution donnée par le schéma décentré amont avec $\lambda = 1/m$ et h petit (par exemple $N = 2000$, on regarde alors l'ordre de convergence avec des h "grand"). La solution exacte doit avoir, pour $t = T$, une discontinuité de hauteur γ en $x = f'(\gamma)T$ où $\gamma \in]0, 1[$ est t.q. $f'(\gamma) = f(\gamma)/\gamma$.

3. Equation non linéaire, f' change de signe, sans conditions aux limites

On prend ici $I = \mathbb{R}$, $T = 1/2$, $f_1(s) = s$, $f_2(s) = (1-s)$ (pour tout $s \in [0, 1]$, on peut toujours considérer f_1 et f_2 définies sur formules sur \mathbb{R}), $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (la fonction f est donc concave), $u_0(x) = 1$ si $x < 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.

Comparer les solutions approchées données par les 2 schémas obtenus en prenant $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$ et :

- (a) schéma "amont des pétroliers" : $g = g_P$, avec $g_P(a, b) = \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(a))}{f_1(a) + f_2(a)}$ si $-\alpha + \beta f_1(a) \leq 0$ et $g_P(a, b) = \frac{f_1(a)(\alpha + \beta f_2(b))}{f_1(a) + f_2(b)}$ si $-\alpha + \beta f_1(a) > 0$,
- (b) schéma de Godunov : $g = g_G$, $g_G(a, b) = \min\{f(c), c \in [a, b]\}$ si $a \leq b$ et $g_G(a, b) = \max\{f(c), c \in [a, b]\}$ si $a > b$.

On pourra prendre, par exemple, $\lambda = 1/m$ et $\lambda = 1/(2m)$, avec $m = \alpha + \beta$. les courageux pourront aussi comparer avec la solution exacte du problème.

4. Avec conditions aux limites

On prend maintenant $I =]0, 1[$ et $u_0 = 0$ (et donc $u_i^0 = 0$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$). On cherche maintenant u_i^n pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et il faut donc définir $f_{i+1/2}^n$ pour $i \in \{0, \dots, N\}$.

- (a) Pour les 2 premiers exemples, on utilise le schéma décentré amont pour définir $f_{i+1/2}^n$ pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$ et on prend $f_{1/2}^n = f(1)$, $f_{N+1/2}^n = f(u_N^n)$. Montrer que la solution approchée est la même que précédemment (pour $i \in \{1, \dots, N\}$). Elle converge donc vers le même u restreint à $x \in]0, 1[$ (qui est l'unique solution entropique de (1)-(2) avec la condition à la limite $u(0, t) = 1$ et pas de condition en $x = 1$).
- (b) pour le 3eme exemple, comparer pour $T = 1/2$ et $T = 4$ (avec $\lambda = 1/(2m)$, $m = \alpha + \beta = 3$) les choix suivants (avec g_P et g_G comme dans la question précédente) :
 - i. **Flux intérieurs** : $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g_P(u_i^n, u_{i+1}^n)$ ou $f_{i+\frac{1}{2}}^n = g_G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
 - ii. **Flux en $x = 0$** : $f_{\frac{1}{2}}^n = 10/9$ ou $f_{\frac{1}{2}}^n = g_G(u_m, u_1^n)$ avec $u_m \in]0, 1[$ t.q. $f(u_m) = 10/9$ et u_m le plus petit possible.
 - iii. **Flux en $x = 1$** : $f_{N+\frac{1}{2}}^n = \frac{f_1(u_N^n)\alpha}{f_1(u_N^n) + f_2(u_N^n)}$ ou $f_{N+\frac{1}{2}}^n = g_G(u_N^n, 1)$.