Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, analyse numérique et optimisation
Examen de mai 2018

Le polycopié du cours et les notes personnelles sont autorisés.
L'examen contient 2 exercices. Le barème est sur 24 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20.

Exercice 1 (Matrice à inverse positive, barème 14 points)**.**
Notations :
On rappelle que si $x \in \mathbb{R}^n$, la notation $x \geq 0$ signifie que toutes les composantes de x (notées x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$) sont positives et la notation $x > 0$ signifie que toutes les composantes de x sont strictement positives. On note e l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ and $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A correspondant à la ligne i et la colonne j.

1. On suppose que A vérifie la condition suivante :
$$a_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$$
$$a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{i,j} > 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
   (a) Montrer que
$$x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0. \qquad (1)$$
   [On pourra considérer i_0 tel que $x_{i_0} \leq x_i$ pour tout i et montrer que $x_{i_0} \geq 0$.]
   (b) Montrer que A est inversible et que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs.
   (c) Montrer que
$$x \in \mathbb{R}^n,\ Ax > 0 \Rightarrow x > 0, \qquad (2)$$
   [On pourra utiliser convenablement e.]
2. On suppose maintenant que A vérifie la condition suivante :
$$a_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$$
$$a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{j,i} > 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
   Montrer que A vérifie aussi (1) et (2).
3. On suppose maintenant que A vérifie la condition suivante :
$$a_{i,j} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j,$$
$$a_{i,i} + \sum_{j \neq i} a_{j,i} = 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
   On suppose aussi que
$$I, J \subset \{1, \ldots, n\}, I \neq \emptyset, J \neq \emptyset,\ I \cap J = \emptyset,\ I \cup J = \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \exists (i,j) \in I \times J \text{ tel que } a_{i,j} \neq 0. \qquad (3)$$
   (a) Montrer que A n'est pas inversible. Donner explicitement un élément non nul de $\mathrm{Ker}(A^t)$.
   (b) Soit $f \in \mathrm{Ker}(A)$. On note f_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, les composantes de f.
      i. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i}|f_i| \leq \sum_{j \neq i}(-a_{i,j})|f_j|$.
      ii. Montrer que les composantes de f ont toutes le même signe. [Utiliser (3)].
      iii. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

   On se donne $\alpha > 0$. On définit la matrice B (par bloc) en posant $B = \begin{bmatrix} A & e \\ e^t & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Montrer que B est inversible.

(d) Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = 0$ et $e \cdot x = \alpha$. Montrer que $x \geq 0$. Montrer que l'unique solution du système linéaire $By = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ est $y = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 2 (Minimisation avec contrainte, barème 10 points)**.**
Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement convexe et que

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{4}$$

Pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = x_2 - \varphi(x_1)$.
On pose $K = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = 0\}$ et on cherche à calculer une solution $\bar{x}$ du problème :

$$\bar{x} \in K, \tag{5}$$

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in K. \tag{6}$$

1. Montrer qu'il existe $\bar{x}$ solution de (5)-(6).
   En prenant un exemple, montrer que le problème (5)-(6) peut avoir plusieurs solutions.
   [On pourra, par exemple, prendre $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ et $\varphi(s) = s^2 - 1$.]
2. Soit $\bar{x}$ solution de (5)-(6). Calculer le rang de la matrice jabobienne de g au point $\bar{x}$. Peut-on appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange à ce problème de minimisation ? Si oui, que donne-t-il ?

Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose $h(z) = f(z, \varphi(z))$.

3. Soit $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que $\bar{x}$ est solution de (5)-(6) si et seulement si $\bar{x}_2 = \varphi(\bar{x}_1)$ et $h(\bar{x}_1) \leq h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
   (b) On suppose que $\bar{x}$ est solution de (5)-(6). Retrouver le résultat du théorème des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (5)-(6) en utilisant le fait que h réalise son minimum (sur $\mathbb{R}$) au point $\bar{x}_1$.
4. Donner l'algorithme du gradient à pas fixe pour calculer un point où h réalise son minimum. On note ρ le pas fixe de cet algorithme.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On suppose maintenant que $\varphi(s) = as$ pour tout $s \in \mathbb{R}$).
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\bar{x}$ solution de (5)-(6).
   (b) Donner l'algorithme du gradient à pas fixe avec projection sur K pour calculer le point $\bar{x}$ où f réalise son minimum sur K. On note $\bar{\rho}$ le pas de cet algorithme et $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par cet algorithme.
   Montrer que la suite formée avec, pour tout n, la première composante de $x^{(n)}$ est solution de l'algorithme de la question 4 avec un pas ρ que l'on calculera en fonction de $\bar{\rho}$ et a.