

Devoir 2, exercice 5.9

Exercice 5.9 (Un sous espace de $H^1(\mathbb{R})$) (Notation : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f^2(x) = (f(x))^2$.)

On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \in L^1 \text{ et } f'^2 \in L^1\}$.

Pour $f \in E$, on définit $\|f\| = \int |f| d\lambda + (\int |f'|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?

Corrigé – Pour $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $\|g\|_1 = \int |f(x)| dx$, $\|g\|_2 = (\int g^2(x) dx)^{\frac{1}{2}}$ et

$$F_1 = \{g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|g\|_1 < +\infty\}, \quad F_2 = \{g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|g\|_2 < +\infty\}.$$

L'espace F_1 , muni de $\|\cdot\|_1$ est un espace espace vectoriel normé (on ne détaille pas ce point ici, assez simple à démontrer). Il est un peu plus difficile de montrer que l'espace F_2 , muni de $\|\cdot\|_2$, est aussi un espace vectoriel normé. Si $g \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda g \in F_2$ et $\|\lambda g\|_2 = |\lambda| \|g\|_2$. Puis, si $g, h \in F_2$, on montre que $g + h \in F_2$ en remarquant, par exemple, que $|g(x) + h(x)|^2 \leq 4(|g(x)|^2 + |h(x)|^2)$. Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire (ce point est le plus délicat), on montre tout d'abord que, pour tout $g, h \in F_2$, on a

$$\int |g(x)h(x)| dx \leq \|g\|_2 \|h\|_2,$$

ce qui peut se montrer en remarquant que $\int |\alpha g(x) + h(x)|^2 dx \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\|g+h\|_2^2 = \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2 \int g(x)h(x) dx \leq \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2\|g\|_2 \|h\|_2 = (\|g\|_2 + \|h\|_2)^2,$$

et donc $\|g+h\|_2 \leq \|g\|_2 + \|h\|_2$.

On remarque maintenant que $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \in F_1 \text{ et } f' \in F_2\}$ et que, pour $f \in E$, $\|f\| = \|f\|_1 + \|f'\|_2$. On déduit que E , muni de $\|\cdot\|$, est un espace vectoriel normé.

On va montrer maintenant que E , muni de $\|\cdot\|$, n'est pas un espace de Banach. Pour cela, on va construire une suite de Cauchy de E , non convergente (c'est-à-dire non convergente dans E muni de la norme $\|\cdot\|$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par

$$\begin{aligned} g_n(x) &= 0 \text{ si } x \leq -1 - \frac{1}{n}, \\ g_n(x) &= n(x + 1 + \frac{1}{n}) \text{ si } -1 - \frac{1}{n} < x \leq -1 \\ g_n(x) &= -x \text{ si } -1 < x \leq 1, \\ g_n(x) &= n(x - 1 - \frac{1}{n}) \text{ si } 1 < x \leq 1 + \frac{1}{n}, \\ g_n(x) &= 0 \text{ si } 1 + \frac{1}{n} < x. \end{aligned}$$

Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{-2}^x g_n(y) dy$. La fonction g_n est continue, à support compact et d'intégrale (sur $\mathbb{R}$) nulle. La fonction f_n est donc de classe C^1 (et $f'_n = g_n$) et à support compact. On en déduit que $f_n \in E$.

Enfin, on définit g et f par

$$g(x) = 0 \text{ si } x < -1, \quad g(x) = -x \text{ si } -1 < x < 1, \quad g(x) = 0 \text{ si } 1 < x$$

$$f(x) = \int_{-2}^x g(y) dy \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $f \notin E$ (f n'est pas de classe C^1). On a $g_n \rightarrow g$ p.p. et, par convergence dominée (car $|g_n| \leq 1$ p.p.), on a aussi $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puis, en utilisant encore le théorème de convergence dominée, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

(Pour la domination, il suffit de remarquer que $|g_n - g|^2 \leq 1_{[-2,2]}$ et $|f_n - f| \leq 1_{[-2,2]}$ p.p.) On en déduit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E mais ne converge pas dans E car la limite dans E , si elle existait, serait nécessairement égale à f (qui n'est pas dans E)

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta}$. En déduire que pour $f \in E$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \delta \int |f'|^2 d\lambda + \frac{1}{\delta} |x - y|$.

Corrigé – Si $a > 1/\delta$, on a alors $a\delta > 1$ et donc $a^2\delta > a$, c'est-à-dire $a < a^2\delta$. On en déduit que $a \leq 1/\delta + a^2\delta$.

Soient $f \in E$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose $y \leq x$. Comme $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on a $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(z) dz$. En utilisant l'inégalité précédente avec $a = f'(z)$, on a donc

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(z)| dz \leq \int_x^y (\delta |f'(z)|^2 + \frac{1}{\delta}) dz \leq \delta \int_{\mathbb{R}} |f'(z)|^2 dz + \frac{1}{\delta} |x - y|.$$

(Bien sûr, le même résultat est vrai si $x < y$.)

3. Soit $f \in E$. Montrer que f est uniformément continue, bornée, et que $f^2 \in L^1$.

Corrigé – La question précédente montre que tout $\delta > 0$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \delta \|f\|^2 + \frac{1}{\delta} |x - y| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

On déduit que f est uniformément continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $\delta \|f\|^2 \leq \varepsilon$ et on pose $\eta = \varepsilon\delta$. On a alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{1}{\delta} \eta = 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve l'uniforme continuité de f .

On montre maintenant que f est bornée. Ceci est une conséquence, par exemple, de l'exercice 5.6 (mais plusieurs autres méthodes sont possibles). Comme f est intégrable et uniformément continue, la question 3 de l'exercice 5.6 donne que $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc que f est bornée.

On note $M = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$. On vient de montrer que $M < +\infty$. On en déduit $\int f^2 d\lambda \leq M \int |f| d\lambda \leq M \|f\| < +\infty$ et donc $f^2 \in L^1$.

Devoir 2, exercice 6.39

Exercice 6.39 (Intégration par parties dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) Soit $u, v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que u et u' sont des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$. [On pourra commencer par montrer que $u^2(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis montrer que cette limite est nécessairement nulle.]

Corrigé – La fonction u est de classe C^1 , la fonction u^2 est donc aussi de classe C^1 et sa dérivée est la fonction $2uu'$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u^2(x) = u^2(0) + \int_0^x 2u(t)u'(t)dt.$$

Comme $|2uu'| \leq u^2 + (u')^2$, la fonction $2uu'$ est intégrable (sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue). l'égalité précédente montre alors que $u^2(x)$ a des limites dans $\mathbb{R}$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. Plus précisément, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} u^2(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u^2(x) = m$ avec

$$l = u^2(0) + \int 2uu'1_{\mathbb{R}_+} d\lambda \text{ et } m = u^2(0) - \int 2uu'1_{\mathbb{R}_-} d\lambda.$$

On montre maintenant que $l = 0$ (un raisonnement analogue donne $m = 0$). Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $l \neq 0$, Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} u^2(x) = l$, il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q.

$$x > A \Rightarrow u^2(x) > \frac{|l|}{2}.$$

On a donc $\int u^2 d\lambda \geq \int_{]A, +\infty[} u^2 d\lambda \geq \int_{]A, +\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = +\infty$, en contradiction avec le fait u est de carré intégrable. On a donc bien montré que $l = 0$.

2. On suppose, dans cette question, que u, v, u' et v' sont des fonctions de carré intégrable (pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$). Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

Corrigé – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme u et v sont de classe C^1 , une intégration par parties sur l'intervalle $[-n, n]$ donne

$$\int_{-n}^n u(x)v'(x)dx + \int_{-n}^n u'(x)v(x)dx = u(n)v(n) - u(-n)v(-n).$$

On peut passer à la limite dans cette égalité quand $n \rightarrow +\infty$. On utilise pour cela le théorème de convergence dominée pour les termes du membre de gauche (les fonctions uv' et $u'v$ sont des fonctions intégrables car $|uv'| \leq u^2 + (v')^2$ et $|u'v| \leq (u')^2 + v^2$) et la première question pour le membre de droite. On obtient bien $\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx$.

3. Donner un exemple pour lequel uv' et $v'u$ sont intégrables (pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$) et

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx \neq - \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

Corrigé – Un exemple possible est donné par $v(x) = 1$ et $u(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien $u, v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les fonctions uv' et vu' sont intégrables (uv' est nulle et $v(x)u'(x) = 1/(1+x^2)$) et on a

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx = \pi.$$

Devoir 2, exercice 7.13**Exercice 7.13 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour la mesure de Lebesgue)**

Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ($N \geq 1$) est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.20.]

Corrigé – On reprend la démonstration du théorème 5.20, les modifications à apporter sont mineures. Le point essentiel est la régularité de λ_N (proposition 7.17).

Etape 1. On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(A) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ_N est une mesure régulière (proposition 7.17), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = F \cap B_n$, ou B_n est la boule fermée de centre 0 et de rayon n . Comme dans le cas $N = 1$, Il existe n_0 tel que $\lambda_N(F \setminus F_{n_0}) \leq \varepsilon$. On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$, ce qui donne

$$\lambda_N(O \setminus K) \leq \lambda_N(O \setminus F) + \lambda_N(F \setminus K) \leq 2\varepsilon.$$

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda_N(O \setminus K) \leq 2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$.

On pose

$$d = d(K, O^c) = \inf\{d(x, y), x \in K, y \in O^c\}.$$

On montre, comme dans le cas $N = 1$ que $d > 0$ et on définit alors la fonction φ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x, K))^+ \text{ avec } d(x, K) = \inf\{d(x, y), y \in K\}.$$

La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x, K)$ est continue (et même lipschitzienne car $|d(x, K) - d(y, K)| \leq |x - y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ tel que $K \subset B_A$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur B_{A+d}^c . On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K , $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \leq \varphi \leq 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \leq |f - \varphi| \leq 1$, ce qui donne

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \lambda_N(O \setminus K) \leq 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Les étapes suivantes (étapes 2, 3 et 4) sont identiques à celles du cas $N = 1$ en remplaçant $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et λ par λ_N .