Université de Marseille, téléenseignement
Licence de Mathématiques, 3eme année, SMI5U1T
Intégration, examen de juin 2013

Le polycopié du cours est autorisé. L'examen est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 (intégration par parties, 4 points) Soit $u, v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que u, v, u' et v' sont des fonctions de carré intégrable (pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$).

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$.
   [On pourra commencer par montrer que $u^2(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$.]
2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

commentaire

Cet exercice est très voisin de l'exercice (corrigé) 5.6 du polycopié. Il fait partie du devoir 2 et sera donc bientôt corrigé.

Exercice 2 (Théorème de compacité, 6 points)
Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0, T[, \mathcal{B}(]0, T[), \lambda)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).
On suppose que pour tout $h \in]0, T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_0^{T-h} |u_n(t + h) - u_n(t)|dt \leq \eta(h),$$
où η est une fonction croissante de $]0, T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1.

1. Soit $d, h \in]0, T[$ t.q. $d + h \leq T$. Montrer que
$$\int_0^d |u_n(t)|dt \leq \int_0^d |u_n(t + h)|dt + \int_0^d |u_n(t + h) - u_n(t)|dt. \quad (1)$$
2. Soit $h_0 \in]0, T[$ et $d \in]0, T - h_0[$, montrer que
$$h_0 \int_0^d |u_n(t)|dt \leq d\|u_n\|_1 + h_0\eta(h_0). \quad (2)$$
   [On pourra intégrer l'inégalité (1) sur $]0, h_0[$.]
3. Montrer que $\int_0^d |u_n(t)|dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.
4. On prolonge u_n sur tout $\mathbb{R}$ en posant $u_n = 0$ hors de $]0, T[$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |u_n(t + h) - u_n(t)|dt \to 0$ quand $h \to 0$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
   [Appliquer le théorème de Kolmogorov vu au chapitre 8 du cours.]

commentaire

Cet exercice est corrigé dans le polycopié. Il s'agit de l'exercice 8.9.

Exercice 3 (Convergence en mesure et domination, 8 points) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f_n \to f$ en mesure quand $n \to \infty$.
- Il existe $g \in \mathcal{L}^p$, t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $\varepsilon > 0$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$m(\{|f| - g \geq \varepsilon\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}).$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $m(\{|f| - g \geq \varepsilon\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que $f \in \mathcal{L}^p$.

3. On suppose, dans cette question, que $m(E) < +\infty$.

(a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f|^p dm \leq \eta m(E) + \int_{\{|f_n - f|^p > \eta\}} 2^p g^p dm.$$

(b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p dm = 0$.

[On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |h| dm \leq \varepsilon.]$$

4. On ne suppose plus que $m(E) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p dm = 0$. [On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |h| dm \leq \varepsilon$.]

commentaire

Cet exercice est corrigé dans le cas $p = 1$. Il s'agit de l'exercice 4.31 du polycopié. Il faut donc adapter la démonstration au cas $1 \leq p < +\infty$. Il me semble que ce n'est pas difficile.

Exercice 4 (Application du lemme de Fatou, 4 points) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Soit p une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < p(x) \leq q$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}_+$).

On suppose maintenant que

- $\int |f(x)|^{p(x)} dm(x) < +\infty$,
- $\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, quand $n \to \infty$,
- $f_n \to f$ p.p..

2. Montrer que $\int |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ quand $n \to \infty$.

[On pourra appliquer le lemme de Fatou à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = M(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ en choisissant convenablement M dans $\mathbb{R}$.]

commentaire

Cet exercice est corrigé dans le cas où p est une application constante dans le polycopié. Il s'agit de l'exercice 6.17 (question 2). Il faut donc adapter la démonstration au cas p variable. Je ferai bientôt un corrigé.
