Université de Marseille, téléenseignement
Licence de Mathématiques, 3eme année, SMI5U1T
Intégration, examen de septembre 2013

Le polycopié du cours et les notes personnelles sont autorisés. L'examen est composé de 2 exercices indépendants. Je ferai bientôt un corrigé de ces exercices.

Exercice 1 (Convolution et transformée de Fourier) *(10 points)* Pour $p \in [1, +\infty]$, On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans L^p.
On note $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, on note $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Si $f \in L^1$, on désigne par $\widehat{f}$ la transformée de f (on a donc $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).
Si $f \in L^2$, on désigne par $F(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $F(f) \in L^2$).
On rappelle que si $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\widehat{f} = F(f)$ p.p.. Dans ce cas, on confond, en général, $\widehat{f}$ et $F(f)$.

1. (Convolution $L^2 - L^2$). Soit $u, v \in L^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $s \mapsto u(t-s)v(s)$ est intégrable et donc que la fonction $u * v$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ par la formule
$$u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-s)v(s)ds, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $u * v \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\|u * v\|_\infty \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.
2. Soit $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $f,\ g,\ fg \in L^1 \cap L^2$, puis que $\widehat{f},\ \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}(t).$$
   [On pourra, par exemple, utiliser le fait que $f, \widehat{g} \in L^1$ et calculer $\widehat{f} * \widehat{g}(t)$ en utilisant la définition de $\widehat{f}$ et la transformée de Fourier inverse pour $\widehat{g}$.]
3. Soit $f, g \in L^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(f) * F(g)(t).$$

Exercice 2 (Espace $L^1 + L^\infty$) *(10 points)*
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans $\mathcal{L}^p$ ou L^p.
On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ somme d'un élément de $\mathcal{L}^1$ et d'un élément de $\mathcal{L}^\infty$, c'est-à-dire que $f \in E$ si il existe $g \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g + h$.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{L}^\infty$ et $f = g + h$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Montrer que $\|f1_K\|_1 \leq \|g\|_1 + \lambda(K)\|h\|_\infty$.
   Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty$, avec g et h t.q. $f = g + h,\ g \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{L}^\infty\}$.
3. Soit $f \in E$ t.q. $N(f) = 0$. Montrer que $f1_K = 0$ p.p. pour tout compact K de $\mathbb{R}$.
   En déduire que $f = 0$ p.p..
4. Soit $f_1,\ f_2 \in E$ t.q. $f_1 = f_2$ p.p.. Montrer que $N(f_1) = N(f_2)$
   On note maintenant $\tilde{E}$ l'ensemble E quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". (Cet espace est souvent noté $L^1 + L^\infty$.)
   Un élément de $\tilde{E}$ est donc un ensemble d'éléments de E (deux à deux égaux p.p.).
5. montrer que $\tilde{E}$ a une structure d'espace vectoriel induite par celle de E.
   Pour $F \in \tilde{E}$, on pose $N(F) = N(f)$ où f est un élément de F. (Cette définition est cohérente grâce à la question précédente.)
6. Montrer que N est une norme sur $\tilde{E}$.
7. Montrer que $\tilde{E}$ muni de la norme N est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).
8. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que L^p s'injecte continûment dans $\tilde{E}$ (c'est-à-dire que l'application $f \mapsto f$ est linéaire continue de L^p dans $\tilde{E}$).
   [On pourra commencer par les cas $p = 1$ et $p = +\infty$.]