Corrigé du 1er exercice (posé avec N = 1 à l'examen)

Exercice 8.3 (Convergence après translation)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, $N \geq 1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $u \in L^p$ tel que $u_n \to u$ dans L^p. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

1. On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $u_n(\cdot + h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que* $u_n(\cdot+h_n)-u = u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)+u(\cdot+h_n)-u$ *et donc*

$$\|u_n(\cdot + h_n) - u\|_p \leq \|u_n(\cdot + h_n) - u(\cdot + h_n)\|_p + \|u(\cdot + h_n) - u\|_p.$$

Comme $\|u_n(\cdot + h_n) - u(\cdot + h_n)\|_p = \|u_n - u\|_p$, *on a donc*

$$\|u_n(\cdot + h_n) - u\|_p \leq \|u_n - u\|_p + \|u(\cdot + h_n) - u\|_p.$$

Soit $\varepsilon > 0$, *comme* $u_n \to u$ *dans* L^p, *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n - u\|_p \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $u \in L^p$, *la continuité en moyenne (théorème 8.5) donne l'existence de* $\delta > 0$ *tel que*

$$|h| \leq \delta \Rightarrow \|u(\cdot + h) - u\|_p \leq \varepsilon.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, *il existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|h_n| \leq \delta$ *pour* $n \geq n_2$. *On a donc*

$$n \geq \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \|u_n(\cdot + h_n) - u\|_p \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $u_n(\cdot + h_n) \to u$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$.

2. On suppose $p = +\infty$. Donner un exemple pour lequel $u_n(\cdot + h_n) \not\to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (on pourra se limiter a N = 1).

Corrigé – *Il suffit de prendre* $u_n = u$ *pour tout* n *et, par exemple,* $u = 1_{\mathbb{R}_+}$. *Pour tout* $h \neq 0$, *on a* $\|u(\cdot + h) - u\|_\infty = 1$. *Il suffit donc de prendre, par exemple,* $h_n = 1/n$.

Exercice 4.40 (Paris groupés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace mesuré tel que $p(\Omega) = 1$. On se donne une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ déléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mathrm{A}_{n+1} \subset (\cup_{p=1}^n \mathrm{A}_p)^c$ et $p(\mathrm{A}_n) = 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En prenant $(\Omega, \mathcal{A}, p) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, donner un exemple d'une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les hypothèses demandées.

   Corrigé – *Il suffit de prendre* $\mathrm{A}_n =]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$.

   On se donne aussi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ avec $\alpha_1 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Avec ce choix de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{G}_i$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \mathrm{H}_n dp = n.$$

   Corrigé – *On construit la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par récurrence.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Si* $\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}$, *on a*

$$\int \mathrm{G}_n dp = (-\alpha_n - 1)p(\mathrm{A}_n) + \alpha_{n+1}p(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{-\alpha_n - 1}{2^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}.$$

   On choisit donc, pour $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} = 2(\alpha_n + 1) + 2^{n+1}$. *On a bien* $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \mathrm{H}_n dp = \sum_{i=1}^n \int \mathrm{G}_i dp = n$.

3. Pour $x \in \Omega$, on pose $\mathrm{H}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{G}_n(x)$. Montrer que $\mathrm{H}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \Omega$ et que $\mathrm{H} = -1$ p.p..

   Corrigé – *Les ensembles* A_n *sont disjoints deux à deux, on a donc* $p(\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/2^n = 1$. *On en déduit que* $p((\cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n)^c) = 0$. *Pour montrer que* $\mathrm{H} = -1$ *p.p., il suffit donc de montrer que* $\mathrm{H}(x) = -1$ *pour tout* $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$.
   Soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$, *il existe un unique* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x \in \mathrm{A}_n$.
   Si $n = 1$, *on a alors* $\mathrm{G}_1(x) = -1$ *et* $\mathrm{G}_n(x) = 0$ *pour* $n > 1$. *Donc* $\mathrm{H}(x) = -1$.
   Si $n > 1$, *on a alors* $\mathrm{G}_n(x) = -\alpha_n - 1$, $\mathrm{G}_{n-1} = \alpha_n$ *et* $\mathrm{G}_m(x) = 0$ *si* $m \neq n$ *et* $m \neq n - 1$. *On en déduit bien que* $\mathrm{H}(x) = -1$.
   On a bien montré que $\mathrm{H} = -1$ *p.p..*

4. On choisit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à la question 2 ?

Corrigé – *On a* $\mathrm{H}_n \to \mathrm{H}$ *p.p. mais* $\int \mathrm{H}_n dp \not\to \int \mathrm{H} dp$*. Ceci montre que la suite* $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne vérifie pas les hypothèses du théorème de convergence dominée (c'est, bien sûr, l'hypothèse de domination qui est manquante).*

N.B. Cet exercice a une interprétation probabiliste un peu inattendue. Il permet de montrer que le fait de faire une infinité de paris favorables peut être défavorable.

Exercice 4.24 (Lemme de Fatou et convergence en mesure)
Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$). On suppose que f_n tend vers f en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < 1/2^k$ pour tout $n \geq n_k$. En déduire qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (la fonction φ est donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

Corrigé – *Selon la définition de la convergence en mesure, définition 3.40, on a* $\lim_{n\to+\infty} m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$. *On en déduit l'existence de* n_k.
Il suffit, par exemple, de prendre $\varphi(0) = n_0$, *puis, pour tout* $k > 1$, $\varphi(k) = \max\{n_k, \varphi(k-1)+1\}$. *La fonction* φ *est strictement croissante et*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_{\varphi(n)}$, $\mathrm{A}_n = \{|g_n - f| \geq \varepsilon\}$, et $\mathrm{B}_n = \cup_{p=n}^{\infty} \mathrm{A}_p$.

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{B}_n) = 0$.

Corrigé – *Par* σ*-sous additivité de* m*, on a*

$$m(\mathrm{B}_n) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} m(\mathrm{A}_p) \to 0 \textit{ quand } n \to +\infty$$

car la première question donne que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$. En déduire que

$$\int_{\mathrm{B}_n^c\cap\{|f|\geq 2\varepsilon\}} |f|dm \leq \int_{\mathrm{A}_n^c\cap\{|f|\geq 2\varepsilon\}} |f|dm \leq 2\int |g_n|dm. \tag{4.34}$$

Corrigé – *Soit* $x \in \{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c$. *Comme* $x \in \mathrm{A}_n^c$, *on a* $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *et donc* $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. *Comme* $|f(x)| \geq 2\varepsilon$ *on a donc* $|g_n(x)| > \varepsilon$. *On en déduit que*

$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq 2|g_n(x)|.$$

On a bien montré que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$.

Comme $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{B}_n$, *on a* $\mathrm{B}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\} \subset \mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$. *Cette inclusion donne la première inégalité de* (4.34). *Puis comme* $|f| \leq 2|g_n|$ *sur* $\mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$, *on obtient la seconde inégalité de* (4.34).

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| dm \le M$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\int_{\{|f| \ge 2\varepsilon\}} |f| dm \le 2M. \tag{4.35}$$

[On pourra noter que $\int |g_n| dm \le M$, utiliser (4.34) et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – *En reprenant les ensembles B_n de la question précédente on a*

$$\int |f| 1_{B_n^c \cap \{|f| \ge 2\varepsilon\}} dm \le 2 \int |g_n| dm \le 2M.$$

La suite d'ensembles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(B_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. On pose $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, de sorte que $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = B^c$. La suite de fonctions $(|f| 1_{B_n^c \cap \{|f|\ge 2\varepsilon\}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc (simplement) en croissant vers $|f| 1_{B^c \cap \{|f| \ge 2\varepsilon\}}$. Le théorème de convergence monotone donne alors que

$$\int |f| 1_{B^c \cap \{|f| \ge 2\varepsilon\}} dm \le 2M.$$

On utilise maintenant la continuité décroissante de m et la question 1(b). On obtient que $m(B) = \lim_{n\to+\infty} m(B_n) = 0$. On en déduit que

$$\int |f| 1_{\{|f| \ge 2\varepsilon\}} dm = \int |f| 1_{B^c \cap \{|f| \ge 2\varepsilon\}} dm \le 2M.$$

(b) Montrer que

$$\int |f| dm \le 2M. \tag{4.36}$$

[On pourra utiliser (4.35) avec $\varepsilon = 1/n$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente donne*

$$\int |f| 1_{\{|f| \ge \frac{2}{n}\}} dm \le 2M.$$

Quand $n \to +\infty$, $|f| 1_{\{|f| \ge \frac{2}{n}\}} \uparrow |f|$. On peut encore appliquer le théorème de convergence monotone, il donne (4.36).

(c) En modifiant légérement la technique utilisée à la première question, montrer que (4.36) reste vrai avec αM au lieu de $2M$ dès que $\alpha > 1$.

En déduire que (4.36) reste vrai avec M au lieu de 2M.

Corrigé – *Soit $\eta > 0$. A la question 1(c), on remplace l'ensemble $\{|f| \ge 2\varepsilon\}$ par $\{|f| \ge (1+\eta)\varepsilon\}$.*

Soit $x \in \{|f| \ge (1+\eta)\varepsilon\} \cap A_n^c$. Comme $x \in A_n^c$, on a $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et donc $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. Comme $|f(x)| \ge (1+\eta)\varepsilon$ on a donc $|g_n(x)| > \eta\varepsilon$. On en déduit que

$$|f(x)| \le |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \le \varepsilon + |g_n(x)| \le \frac{\eta+1}{\eta} |g_n(x)|.$$

On a donc $\{|f| \ge (1+\eta)\varepsilon\} \cap A_n^c \subset \{|f| \le \frac{\eta+1}{\eta} |g_n|\}$.

On obtient ainsi, au lieu de (4.34),

$$\int_{B_n^c \cap \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}} |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta} \int |g_n| dm.$$

On reprend alors les questions 2(a) et 2(b) en appliquant toujours le théorème de convergence montone. On obtient $\int |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta} M$.

Si $\alpha > 1$, *il est possible de choisir* $\eta > 0$ *pour que* $(\eta+1)/\eta = \alpha$. *On obtient donc* $\int |f| dm \leq \alpha M$. *Enfin, comme* α *est arbitrairement proche de* 1, *on en déduit bien que* $\int |f| dm \leq M$.

NB. Une autre méthode pour démontrer (4.36) (avec M au lieu de 2M) consiste à remarquer qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. (ceci est une conséquence de la convergence en mesure de f_n vers f, exercice 3.28). Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour conclure.