Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

LICENCE 3 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE. MATHEMATIQUES GENERALES. L3MiMG.

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
42	**2L3MAT**	**SMI5U1T**	**1**

Nom de l'UE : Intégration et transformée de Fourier (UE 5-3)

- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitres 1 et 2. Corrigés des exercices des chapitres 1 et 2

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 1,
Exercices proposés (avec corrigés) : 1.1, 1.6, 1.7, 1.8.

Semaine 2 :
Etudier les sections 2.2 (tribu) et 2.3 (mesure). En particulier, bien assimiler la proposition 2.3 sur les propriétés d'une mesure.
Exercices proposés (avec corrigés) : 2.1, 2.2, 2.3 (questions 1 et 2), 2.4.

Semaine 3 :
Etudier la section 2.5 (plus difficile que les précédentes) jusqu'à la démonstration de la partie « existence » du théorème de Carathéodory. Ne pas s'attarder sur cette démonstration.
Exercices proposés (avec corrigés) : 2.14 (difficile), 2.18.

Semaine 4 :
Etudier, dans la section 2.5, le théorème de régularité et la démonstration de la partie « unicité » du théorème de Carathéodory.
Exercices proposés (avec corrigés) : 2.22, 2.26, 2.27.
L'exercice 2.29 fait partie du premier devoir (à rendre ultérieurement).

-Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

T. Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/int
et me poser des questions par email.

Chapitre 1

Motivation et objectifs

Nous commençons par donner ici un aperçu des motivations de la théorie de l'intégration, en montrant d'abord les limitations de l'intégrale des fonctions continues (sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$). L'intégrale de Riemann possède essentiellement les mêmes limitations.

1.1 Intégrale des fonctions continues

Nous présentons ici quelques rappels sur l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Nous montrons pourquoi cette théorie de l'intégrale des fonctions continues semble insuffisante.

Nous nous limitons dans ce paragraphe à l'étude des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, par souci de simplicité des notations. Il va de soi que les notions introduites se généralisent à une intervalle $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$. Nous allons en fait définir l'intégrale des fonctions réglées (on appelle fonction réglée une fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier). Ceci nous donnera l'intégrale des fonctions continues car toute fonction continue est réglée. La définition de l'intégrale des fonctions réglées (comme celle de l'intégrale de Riemann, qui est rappelée dans l'exercice 5.2, et celle de l'intégrale de Lebesgue, qui fait l'objet du chapitre 4) peut être vue en 3 étapes, que nous esquissons ici et qui sont étudiées en détail dans l'exercice 1.2 :

1. *Mesurer les intervalles de* $[0,1]$. Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, on pose $m(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$.
2. *Intégrer les fonctions en escalier.*

Définition 1.1 (Fonction en escalier) *Soit g une fonction de l'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on dit que g est une fonction en escalier si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $x_0 = 0$, $x_i < x_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-1\}$, $x_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que*

$$g(x) = a_i, \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad \forall i \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

Avec les notations de cette définition, l'intégrale d'une fonction en escalier est alors

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i m(]x_i, x_{i+1}[). \tag{1.1}$$

On montre que la définition précédente est bien cohérente, au sens où l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i.

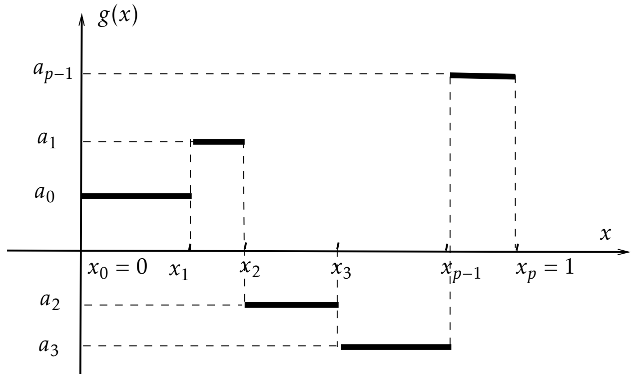


FIGURE 1.1 – Fonction en escalier

3. *Passer à la limite.* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction réglée, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. On peut montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On pose alors
$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n.$$
On montre que cette définition est cohérente car $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ ne dépend que de f et non du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.2 (Intégrale sur un espace de Banach) Un des intérêts de la méthode présentée ci-dessus est qu'elle permet aussi de définir (sans travail supplémentaire) l'intégrale de fonctions continues de $[0,1]$ (ou d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$) dans E, où E est un espace de Banach [1] sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (la méthode de construction utilise la structure d'espace de Banach de E, et il peut ne pas y avoir de relation d'ordre sur E). On remplace donc l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ des fonctions qu'on intègre par un espace de Banach E.
Les méthodes de Riemann (voir l'exercice 5.2) et de Lebesgue (présentée dans ce cours) sont limitées à des fonctions prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ car elles utilisent fortement la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ (elles redonnent, dans le cas de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la même intégrale que ci-dessus). Pour l'intégrale de Lebesgue, il faut alors un travail supplémentaire pour développer une théorie de l'intégration pour des fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach (on l'appelle souvent intégrale de Bochner). Plus précisément, ce travail supplémentaire est nécessaire lorsque cet espace est de dimension infinie. Le cas où l'espace est de dimension finie reste simple car on est alors amené à considérer un nombre fini d'intégrales à valeurs dans $\mathbb{R}$, [3, 4].

Remarque 1.3 (Remarque de terminologie) Dans tout ce document, on utilisera indifférement le terme “fonction" et le terme “application". Une application (ou une fonction) f de D dans E est la donnée pour tout $x \in$ D de son image par f, notée $f(x)$. (Le domaine de définition de f est donc ici l'ensemble D.) lorsque nous parlons d'une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

1.2 Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues

Dans ce paragraphe, on note E l'ensemble $C([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On a défini dans le paragraphe précédent l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ pour tout $f \in E$ (car l'ensemble des fonctions continues est contenu dans l'ensemble des fonctions réglées).

Théorèmes de convergence.

Un inconvénient important de la théorie de l'intégration exposée ci-dessus est que les théorèmes "naturels" de convergence pour cette théorie sont peu efficaces. A vrai dire, le seul théorème simple est un résultat de convergence de l'intégrale sous hypothèse de convergence uniforme d'une suite de fonctions. Rappelons tout d'abord les notions de convergence simple et uniforme des suites de fonctions.

Définition 1.4 (Convergence simple et uniforme) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de* E,

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0,1], \exists N(\varepsilon, x); n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon;$$

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers f si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); n \geq N(\varepsilon), x \in [0,1] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour la convergence simple, l'entier N peut dépendre de x, alors que pour la convergence uniforme, il ne dépend que de ε, et pas de x. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par $f_n(x) = \frac{x}{n}$ tend simplement et uniformément (sur $[0,1]$) vers 0. On donne à l'exercice 1.1 un exemple de suite qui converge simplement mais pas uniformément.
On rappelle maintenant le théorème classique de convergence de l'intégrale des fonctions continues :

Théorème 1.5 (Convergence de l'intégrale des fonctions continues)
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$. On a alors :

$$[f_n \longrightarrow f \text{ uniformément lorsque } n \to +\infty] \Longrightarrow \left[\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ lorsque } n \to +\infty\right].$$

Ce théorème est assez faible, au sens où l'hypothèse de convergence uniforme est une hypothèse forte. Une conséquence de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est le théorème suivant (beaucoup plus fort que le précédent, car il ne demande pas d'hypothèse de convergence uniforme) :

Théorème 1.6 (Convergence dominée de l'intégrale des fonctions continues)
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, et $f \in E$. On suppose que

$$|f_n(x)| \leq C,\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},$$

où $C \in \mathbb{R}_+$ est fixé, et que f_n tend simplement vers f quand n tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ quand } n \to +\infty. \tag{1.2}$$

Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{pour } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ n(\frac{2}{n} - x) & \text{pour } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{pour } x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases} \tag{1.3}$$

(voir figure 1.2) converge simplement mais non uniformément. Elle est dominée par 1, et d'après le théorème 1.6, elle converge. On peut le vérifier directement, car l'intégrale de f_n est facile à calculer et vaut $\frac{1}{n}$. On considère maintenant la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ définie par $g_n(x) = nf_n(x)$. Cette suite converge toujours simplement vers 0, mais non uniformément, et elle n'est plus "dominée". Et de fait, g_n tend simplement vers 0 mais son intégrale vaut 1 et ne tend donc pas vers 0.

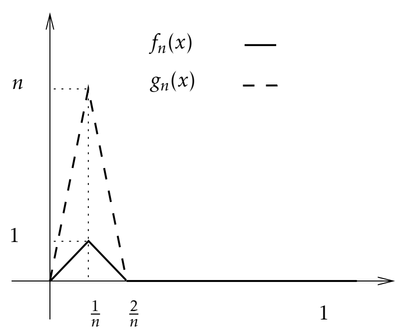


FIGURE 1.2 – Les fonctions f_n et g_n

Le théorème 1.6 est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue, que nous verrons au chapitre 4, il peut être démontré directement, sans utiliser la théorie de l'intégrale de Lebesgue, mais cela est difficile : nous donnons une technique possible à l'exercice 1.10 ; l'idée essentielle est un passage à la limite sur des suites croissantes de fonctions, qui se retrouve également dans la construction de l'intégrale de Lebesgue. Dans l'exercice 1.10, on introduit des suites croissantes de fonctions continues, et on utilise l'intégrale des fonctions continues. En revanche, Lebesgue utilise des suites croissantes de fonctions étagées (voir définition 3.5), ce qui permet également d'utiliser la définition de la mesure et donc de s'affranchir de la notion de topologie (voir définition 2.8) sur l'espace de départ pour construire l'intégrale.

Espaces non complets.

Pour $f \in \mathrm{E}$ on pose (en remarquant que $|f| \in \mathrm{E}$ et $f^2 \in \mathrm{E}$) :

$$\mathrm{N}_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \text{ et } \mathrm{N}_2(f) = \Big(\int_0^1 (f(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Les applications N_1 et N_2 sont des normes sur E (voir l'exercice 1.6). Malheureusement l'espace E muni de la norme N_1 (ou de la norme N_2) n'est pas vraiment intéressant en pratique, en particulier parce que cet espace n'est pas complet (c'est-à-dire qu'une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente). Ce n'est pas un espace de Banach. La norme N_2 sur E est induite par un produit scalaire mais, muni de cette norme, E n'est pas un espace de Hilbert [1], voir l'exercice 1.6. En fait l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est intéressant lorsqu'il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|f\|_u = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, avec laquelle il est complet : c'est donc alors un espace de Banach.

Si l'on travaille avec l'ensemble des fonctions réglées plutôt que l'ensemble des fonctions continues, on n'échappe pas vraiment aux inconvénients cités précédemment (N_1 et N_2 sont d'ailleurs alors des semi–normes). On peut aussi généraliser la définition de l'intégrale ci-dessus en améliorant un peu l'étape 3 (passage à la limite), cette généralisation se fait en introduisant les sommes de Darboux , alors que l'intégrale des fonctions continues peut être définie en utilisant seulement les sommes de Riemann). On obtient ainsi la définition de l'intégrale des fonctions dites

1. Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Riemann-intégrables (voir l'exercice 5.2). En fait cette généralisation est assez peu intéressante, et les inconvénients sont les mêmes que pour l'intégrale des fonctions continues (ou des fonctions réglées).
L'intégrale de Lebesgue va nous permettre de construire des espaces de Banach avec les normes N_1 et N_2 (et même de Hilbert avec N_2). Dans le cas des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, ceci pourrait être fait par un procédé de complétion de l'espace E muni de la norme N_1 ou N_2 à partir des suites de Cauchy pour N_1 ou N_2 (procédé semblable à celui qui est utilisé pour construire $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$). L'intégrale de Lebesgue va permettre de construire des espaces de Banach en utilisant seulement sur l'espace de départ une structure d'espace mesuré. Cette méthode est en particulier très intéressante pour la théorie des probabilités.

1.3 Les probabilités

La théorie des probabilités s'est développée dans le but de modéliser les phénomènes aléatoires, c'est-à-dire de développer un formalisme mathématique pour exprimer les problèmes posés par ces phénomènes. Le terme aléatoire vient du latin *alea* qui signifie en latin jeu de dé ou jeu de hasard ; il est employé pour désigner tous les phénomènes qui semblent être dus au hasard. Il s'oppose au terme déterministe, qui s'applique aux phénomènes dont on connaît l'issue. Le mot hasard vient lui même du mot arabe al-zhar qui veut dire dés, puis par extension chance. On utilisera également le mot stochastique (du grec stokhastikos, qui vise bien) qui est un synonyme d'aléatoire. En anglais, les termes utilisés en théorie des probabilités sont random (hasard, qui vient du français randonnée !) stochastic et aleatory.
Par exemple, la chute d'un corps est un phénomène déterministe : pour une position et une vitesse initiale données, on sait parfaitement quelle sera la trajectoire et la vitesse du corps soumis à son poids. Le lancer d'un dé est assimilable à la chute d'un corps, et pourtant, le résultat du lancement du dé est généralement perçu comme aléatoire : on ne sait pas avant l'expérience quel est le nombre entre 1 et 6 que l'on va obtenir, parce qu'on ne connaît pas vraiment les conditions initiales du lancement du dé (position, vitesse) et que, même si on les connaissait, on aurait du mal à calculer rapidement le résultat de ce lancement. Ainsi, de nombreux phénomènes physiques qui ont des causes déterministes sont modélisés à l'aide de modèles au moins en partie aléatoires (en météorologie par exemple). Il existe cependant des phénomènes physiques véritablement aléatoires comme l'interférence d'atomes dans un dispositif à deux fentes d'Young, et de manière plus générale, les phénomènes quantiques (voir à ce sujet le livre grand public [7]).
Une partie importante des phénomènes aléatoires est de nature discrète, c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des "cas possibles" dans $\mathbb{N}$. Lorsque de plus l'ensemble des "cas possibles" ou des "éventualités" est fini, le calcul des probabilités se ramène à des problèmes de dénombrement. Lorsque l'ensemble des "éventualités" est de nature infinie non-dénombrable, on aura besoin, pour définir une probabilité, de la théorie de la mesure. Les liens qui existent entre la théorie des probabilités et la théorie de la mesure et de l'intégration sont nombreux, mais malheureusement, le vocabulaire est souvent différent. Nous essaierons ici de montrer clairement les liens entre les deux théories et de donner systématiquement les termes probabilistes et analystes employés pour les mêmes notions.

1.4 Objectifs

Du point de vue de l'intégration, l'objectif est de construire une théorie de l'intégration donnant des théorèmes de convergence efficaces et de bons espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces vectoriels normés complets et des espaces hilbertiens. La démarche pour construire cette théorie est décrite au chapitre 4 ; elle est voisine de celle que l'on a utilisée pour l'intégrale des fonctions réglées (ou pour l'intégrale de Riemann, cf. Exercice 5.2).
La théorie de l'intégration que nous allons ainsi obtenir contient, pour les fonctions d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la théorie de l'intégrale de Riemann (cf. Exercice 5.2) qui contient elle-même la théorie de l'intégrale des fonctions réglées (et donc la théorie de l'intégrale des fonctions continues).

Du point de vue probabiliste, l'objectif est d'introduire les notions de base et de mettre en évidence les liens entre les outils d'analyse et les outils probabilistes.

1.5 Structure du cours

Ce cours est formé de 11 chapitres (y compris ce chapitre introductif), selon le découpage suivant :

- Le chapitre 2 est une introduction à la théorie de la mesure ; on y définit en particulier l'application λ nécessaire pour mesurer les parties de $\mathbb{R}$. On y introduit aussi les premières notions de probabilités.
- Dans le chapitre 3, on introduit le concept de fonction mesurable, et son synonyme probabiliste, *i.e.* le concept de variable aléatoire, qui est une notion fondamentale pour le calcul des probabilités. On y définit les notions de convergence presque partout et son synonyme probabiliste presque sûre, et de convergence en mesure et son synonyme probabiliste convergence en probabilité.
- On définit au chapitre 4 l'intégrale sur un espace mesuré (suivant les étapes 1 à 3 définies plus haut), et l'espérance des variables aléatoires réelles en théorie des probabilités. On définit également dans ce chapitre la notion de convergence en moyenne.
- On s'intéresse au chapitre 5 aux mesures définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les parties mesurables au sens de Borel, que l'on aura définie au chapitre 2) et aux propriétés particulières de l'intégrale définies sur $\mathbb{R}$. On y étudie les lois de probabilités de densité.
- On étudie au chapitre 6 les espaces L^p, ensembles des (classes de) fonctions mesurables de puissance p–ième intégrable, et plus particulièrement l'espace L^2, qui est un espace de Hilbert. On donne des résultats de dualité et on introduit les notions de convergence faible et de convergence étroite (pour les probabilités).
- Le chapitre 7 est consacré au produits d'espaces mesurés, à l'intégration de fonctions de plusieurs variables, au produit de convolution.
- Dans le chapitre 8, on revient sur l'étude des espaces L^p dans le cas particulier de la mesure de Lebesgue sur les boréliens d'un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. On donne des résultats de densité, de séparabilité et de compacité.
- Le chapitre 9 est consacré aux vecteurs aléatoires. On y généralise des notions vues pour les variables aléatoires réelles.
- Le chapitre 10 est consacré à l'étude de la transformée de Fourier des fonctions de L^1 (classes de fonctions mesurables intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) et de L^2 (classes de fonctions mesurables de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) et des mesures. On introduit la fonction caractéristique de la théorie des probabilités.
- Le chapitre 11 est consacré à l'espérance conditionnelle et aux martingales.

1.6 Exercices

Exercice 1.1 (Convergences simple et uniforme) Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f_n \to f$ simplement, quand $n \to +\infty$, et $f_n \not\to f$ uniformément, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On prend la fonction définie par* (1.3)*, voir figure 1.2, qu'on rappelle :*

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{pour } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ n(\frac{2}{n} - x) & \text{pour } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{pour } x \in x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$*. Pour tout* $x \in [0,1]$*, on a bien* $f_n(x) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*. Enfin* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas uniformément vers* 0 *car* $\|f_n\|_u = \max\{|f_n(x)|\,;\, x \in [0,1]\} = 1 \not\to 0$*, quand* $n \to +\infty$*.*

Exercice 1.2 (Intégrale d'une fonction continue) Une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$.
Pour g en escalier et $x_0, \ldots, x_n$ comme dans la définition ci-dessus, on pose

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i),$$

où a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.

1. Montrer que la définition précédente est bien cohérente, c'est-à-dire que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i. Montrer que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. On note a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.*
Soit également $m \geq 1$ et $y_0, \ldots, y_m$ tels que $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]y_i, y_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$. On note b_i est la valeur prise par g sur $]y_i, y_{i+1}[$.
On doit montrer que

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i).$$

On considère l'union des points x_i et des points y_i, c'est-à-dire que $z_0, \ldots, z_p$ sont tels que $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{p-1} < z_p = 1$ et $\{z_i,\ i \in \{0, \ldots, p\}\} = \{x_i,\ i \in \{0, \ldots, n\}\} \cup \{y_i,\ i \in \{0, \ldots, m\}\}$ (on a donc, en particulier, $p \geq \max\{m, n\}$). On note c_i est la valeur prise par g sur $]z_i, z_{i+1}[$.

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $k_i \in \{0, \ldots, p\}$ tel que $x_i = z_{k_i}$ (en particulier, $k_0 = 0$ et $k_n = p$) et on a donc

$$x_{i+1} - x_i = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (z_{j+1} - z_j).$$

Comme $a_i = c_j$ si $k_i \leq j \leq k_{i+1} - 1$ (car $]z_j, z_{j+1}[\subset]x_i, x_{i+1}[$), on en déduit

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} c_j(z_{j+1} - z_j) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(z_{i+1} - z_i).$$

De la même manière, on a

$$\sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(z_{i+1} - z_i),$$

d'où l'on conclut

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i).$$

On a bien montré que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i.

On montre maintenant que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$ (cet ensemble est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Soit g et h deux fonctions en escalier et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. Soit également $m \geq 1$ et $y_0, \ldots, y_m$ tels que $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = 1$ et h constante sur chaque intervalle $]y_i, y_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$. On considère ici encore l'union des points x_i et des points y_i, c'est-à-dire que $z_0, \ldots, z_p$ sont tels que $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{p-1} < z_p = 1$ et $\{z_i,\ i \in \{0, \ldots, p\}\}$

$= \{x_i,\ i \in \{0,\dots,n\}\} \cup \{y_i,\ i \in \{0,\dots,m\}\}$. *Les fonctions g, h et $\alpha g + \beta h$ sont donc constantes sur chaque intervalle $]z_i, z_{i+1}[$ (ceci montre d'ailleurs que $\alpha g + \beta h$ est bien une fonction en escalier et donc que l'ensemble des fonctions en escalier est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). En notant a_i la valeur de g sur $]z_i, z_{i+1}[$ et b_i la valeur de h sur $]z_i, z_{i+1}[$, on obtient :*

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(z_{i+1} - z_i),\ \int_0^1 h(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} b_i(z_{i+1} - z_i).$$

On en déduit que

$$\alpha \int_0^1 g(x)dx + \beta \int_0^1 h(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} (\alpha a_i + \beta b_i)(z_{i+1} - z_i) = \int_0^1 (\alpha g(x) + \beta h(x))dx$$

car $\alpha a_i + \beta b_i$ est la valeur de $\alpha g + \beta h$ sur $]z_i, z_{i+1}[$.

Ceci prouve bien que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

(a) Construire une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour $n \geq 1$, on choisit (par exemple) f_n ainsi : $f_n(x) = f(\frac{i}{n})$, si $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Pour bien définir f_n sur tout $[0,1]$, on prend aussi $f_n(1) = f(1)$.*

La fonction f_n est bien en escalier (elle est constante sur chaque intervalle $]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$). Elle converge uniformément vers f, quand $n \to +\infty$, car f est uniformément continue. Plus précisément, on a $\|f_n - f\|_u = \max\{|f_n(x) - f(x)|,\ x \in [0,1]\} \leq \max\{|f(x) - f(y)|,\ x, y \in [0,1]\,;\ |x-y| \leq \frac{1}{n}\} \to 0$, quand $n \to +\infty$. Noter que, pour ce choix de f_n, on a

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}.$$

Cette somme est une somme de Riemann associée à f et on va voir ci-après qu'elle converge vers $\int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to +\infty$.

(b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, où I_n est l'intégrale de la fonction en escalier f_n, converge. Enfin, montrer que la limite $\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ ne dépend que de f, et non de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors

$$\int_0^1 f(x)dx = \mathrm{I}.$$

Corrigé – *Si g est une fonction en escalier, il est clair que la fonction $|g|$ (définie par $|g|(x)) = |g(x)|$) est aussi en escalier et que l'on a*

$$|\int_0^1 g(x)dx| \leq \int_0^1 |g(x)|dx \leq \|g\|_u.$$

On en déduit que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_m| = |\int_0^1 (f_n - f_m)dx| \leq \|f_n - f_m\|_u.$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers f) pour la norme $\|\cdot\|_u$, c'est une suite de Cauchy pour cette norme. La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente dans $\mathbb{R}$.

Soit maintenant une autre suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que f soit aussi limite uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit J_n l'intégrale de la fonction en escalier g_n. On remarque que $|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \le \|f_n - g_n\|_u$, d'où l'on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ car $\|f_n - g_n\|_u \le \|f_n - f\|_u + \|g_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to +\infty$. La limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend donc que de f, et non du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que l'application qui à f associe l'intégrale de f est linéaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a
$$|\int_0^1 f(x)dx| \le \int_0^1 |f(x)|dx \le \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Corrigé – *Soit $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit deux suites de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant uniformément vers f et g. La suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de fonction en escalier convergeant uniformément vers $\alpha f + \beta g$ (qui appartient bien à $C([0,1],\mathbb{R})$). En passant à la limite, quand $n \to +\infty$ dans l'égalité*
$$\int_0^1 (\alpha f_n + \beta g_n)(x)dx = \alpha \int_0^1 f_n(x)dx + \beta \int_0^1 g_n(x)dx$$
(qui est vraie grâce à la linéarité de l'intégrale sur l'ensemble des fonctions en escalier, démontrée à la question 1.), on obtient
$$\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx + \beta \int_0^1 g(x)dx.$$
Enfin, si $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on choisit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On a déjà vu que
$$|\int_0^1 f_n(x)dx| \le \int_0^1 |f_n(x)|dx \le \|f_n\|_u.$$
On obtient les inégalités désirées en passant à la limite sur n, car $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $|f|$ et $\|f_n\|_u \to \|f\|_u$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.3 (Sur l'intégrale des fonctions continues) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0$, on a alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

Corrigé – *Ceci est une conséquence d'une inégalité vue dans l'exercice définissant l'intégrale d'une fonction continue :*
$$|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \le \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx.$$

2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

Corrigé – *Ceci est aussi une conséquence d'une inégalité vue dans l'exercice définissant l'intégrale d'une fonction continue :*
$$|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \le \|\varphi_n - \varphi\|_u.$$

3. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers φ simplement, mais non uniformément, telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Corrigé – *On prend, pour $n \geq 2$:*
$\varphi_n(x) = nx$, *pour* $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n(\frac{2}{n} - x)$, *pour* $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, *pour* $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.
On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. *Pour tout* $x \in [0,1]$, *on a* $\varphi_n(x) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc simplement vers* 0. *Elle ne converge pas uniformément vers* 0, *car* $\|\varphi_n\|_u = 1 \not\to 0$. *On a bien* $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

4. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers φ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Corrigé – *On prend, pour $n \geq 2$:*
$\varphi_n(x) = n^2x$, *pour* $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n^2(\frac{2}{n} - x)$, *pour* $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, *pour* $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.
On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. *Pour tout* $x \in [0,1]$, *on a* $\varphi_n(x) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc simplement vers* 0. *Pourtant* $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 1 \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

5. Montrer que si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :
(a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,
(b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1, +1]$,
alors on a÷

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Corrigé – *Par la condition* (a), *la suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* φ *sur* $]0,1]$. *La condition* (b) *donne alors* $\varphi(x) \in [-1,1]$ *pour tout* $x \in]0,1]$ *(et donc aussi pour tout* $x \in [0,1]$ *car* φ *est continue sur* $[0,1]$*).*

Soit $\varepsilon > 0$. *On utilise maintenant le fait que* $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\varepsilon f(x)dx + \int_\varepsilon^1 f(x)dx$, *pour tout* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, *pour obtenir :*

$$|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \leq 2\varepsilon + \max_{x\in[\varepsilon,1]}\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\}.$$

D'après (a), *il existe* n_0 *tel que* $\max_{x\in[\varepsilon,1]}\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\} \leq \varepsilon$ *pour* $n \geq n_0$. *On a donc* $|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \leq 3\varepsilon$ *pour* $n \geq n_0$, *ce qui prouve que* $\int_0^1 \varphi_n(x) \to \int_0^1 \varphi(x)dx$ *quand* $n \to +\infty$.

6. Vérifier que la suite de fonctions définies par $\varphi_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ satisfait les conditions énoncées à la question 5. Donner l'allure générale du graphe de ces fonctions pour des petites valeurs de n ; que devient le graphe lorsque $n \to +\infty$?

Corrigé – *On a bien $\varphi_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [\varepsilon, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le \varphi_n(x) \le \frac{\sqrt{n}}{n\varepsilon^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$. La condition (a) de la question 5 est donc vérifiée. La condition (b) est également vérifiée en remarquant que $2x\sqrt{n} \le 1 + nx^2$ pour tout $x \ge 0$ et $n \in \mathbb{N}$ (on a donc $\varphi_n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$). La question 5 donne donc que $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

La fonction φ_n est croissante pour $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$, elle atteint son maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ce maximum vaut $\frac{1}{2}$ (φ_n ne converge donc pas uniformément vers 0 quand $n \to +\infty$). La fonction φ_n est ensuite décroissante pour $x \in [\frac{1}{\sqrt{n}}, 1]$ et tend vers 0 pour tout x.

7. On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx = 0. \tag{1.4}$$

A-t-on $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0$? [On pourra par exemple utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon \ge 0$, ne dépendant que de ε, t. q. $a \le \varepsilon + c_\varepsilon a^2$.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que (pour $a \ge 0$) $a \le \varepsilon + \frac{a^2}{\varepsilon}$ (en fait, on a même $2a \le \varepsilon + \frac{a^2}{\varepsilon}$). Le plus facile, pour s'en convaincre, est de remarquer que $a \le \frac{a^2}{\varepsilon}$ si $a \ge \varepsilon$ (donc $a \le \max\{\varepsilon, \frac{a^2}{\varepsilon}\}$). On a donc*

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \le \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))^2 dx.$$

Par l'hypothèse (1.4), Il existe n_0 te que le dernier terme de l'inégalité précédente soit inférieur à ε si $n \ge n_0$. On a donc $\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \le 2\varepsilon$ si $n \ge n_0$. On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx\, dx = 0$.

8. Même question que ci-dessus en remplaçant l'hypothèse (1.4) par :
$\exists p > 1;\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0.$

Corrigé – *la démonstration est identique à la précédente en remarquant que $a \le \varepsilon + \frac{a^p}{\varepsilon^{p-1}}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \ge 0$.*

9. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \le C, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

et que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0$.

Corrigé – *On utilise la même inégalité qu'à la question 7 avec $\varepsilon = \frac{1}{\delta}$, c'est-à-dire $a \le \frac{1}{\delta} + \delta a^2$. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$,*

$$|\varphi_n(x)| \le \frac{1}{\delta} + \delta |\varphi_n(x)|^2.$$

On en déduit, pour $\eta \in]0,1]$, en intégrant sur l'intervalle $[0,\eta]$:

$$\int_0^\eta |\varphi_n(x)| dx \le \frac{\eta}{\delta} + \delta \int_0^\eta |\varphi_n(x)|^2 dx,$$

et donc, avec (1.5),

$$\int_0^\eta |\varphi_n(x)|dx \le \frac{\eta}{\delta} + \delta C.$$

De même, on a

$$\int_0^\eta |\varphi(x)|dx \le \frac{\eta}{\delta} + \delta \int_0^1 \varphi^2(x)dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ pour avoir $\delta C \le \varepsilon$ et $\delta \int_0^1 \varphi^2(x)dx \le \varepsilon$, puis, on choisit $\eta > 0$ pour avoir $\frac{\eta}{\delta} \le \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \le \int_\eta^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx + 4\varepsilon.$$

Comme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\eta, 1]$, il existe n_0 tel que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in [\eta, 1]$ et tout $n \ge n_0$. On en déduit $\int_0^1 |\varphi_n(x)-\varphi(x)|dx \le 5\varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$. Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)-\varphi(x)|dx = 0$.

10. Construire un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfait aux hypothèses de la question précédente et qui n'est pas bornée (donc qui ne satisfait pas aux hypothèses de la question 5).

    Corrigé – *On prend, pour $n \ge 2$:*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ n\sqrt{n}(\frac{2}{n} - x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi_n \to 0$ uniformément sur $[\varepsilon, 1]$ quand $n \to +\infty$. Enfin, $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \le 2$ (car $|\varphi_n(x)| \le \sqrt{n}$ pour $x \in [0, \frac{2}{n}]$).

11. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.5) par :

    Il existe $p > 1$ et $C > 0$ tels que $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_n(x)|^p dx \le C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

    Corrigé – *Oui, le raisonnement fait pour $p = 2$ s'adapte ici en remarquant que $a \le \frac{1}{\delta} + \delta^{p-1}a^p$ (pour $\delta > 0$ et $a \ge 0$).*

12. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.5) par : il existe $C > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^1 |\varphi_n(x)|dx \le C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

    Corrigé – *Non, il suffit de reprendre comme contre–exemple les fonctions φ_n construites à la question 4.*

Exercice 1.4 (Discontinuités d'une fonction croissante) Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note $f(x_+)$ et $f(x_-)$ ces limites au point x.

    Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{f(y),\, y < x\}$ est majoré par $f(x)$ (car f est croissante). Cet ensemble admet donc une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$) que l'on note $f(x_-)$ (et on a $f(x_-) \le f(x)$). Comme $f(x_-)$ est un majorant de l'ensemble $\{f(y),\, y < x\}$, on a $f(y) \le f(x_-)$ pour tout $y < x$. Puis, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y < x$ t.q $f(x_-) - \varepsilon < f(y) \le f(x_-)$ car $f(x_-)$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\{f(y),\, y < x\}$. On a donc, comme f est croissante*

$$y \le z < x \Rightarrow f(x_-) - \varepsilon < f(z) \le f(x_-).$$

Ceci prouve que $f(x_-) = \lim_{y\to x_-} f(y)$. (On rappelle que $y \to x_-$ signifie $y \to x$ avec $y < x$.) On a ainsi montré que f admet une limite à gauche en x et cette limite notée $f(x_-)$ vérifie $f(x_-) \le f(x)$.

De manière analogue on montre que f admet une limite à droite en x et cette limite notée $f(x_+)$ vérifie $f(x) \le f(x_+)$. Le nombre réel $f(x_+)$ est la borne inférieure de l'ensemble $\{f(y),\, y > x\}$ (cet ensemble est minoré par $f(x)$).

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. [On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $A_n = \{x \in [0,1], f(x_+) - f(x_-) \geq (f(1_+) - f(0_-))/n\}$.]

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$. On remarque donc que le point x est un point de discontinuité de f si et seulement si $f(x_+) - f(x_-) > 0$. On note D l'ensemble des points de discontinuité de f, on a donc*

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ f(x_+) - f(x_-) > 0\}.$$

Pour montrer que D est au plus dénombrable (c'est-à-dire fini ou dénombrable, ce qui est équivalent à dire qu'il existe une injection de D dans $\mathbb{N}$), on va utiliser le fait qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. (Une démonstration de ce résultat est donnée à la fin de la preuve de cette question.)

On note $D_{[0,1]}$ l'ensemble des points de discontinuité de f inclus dans $[0,1]$ et on va montrer que $D_{[0,1]}$ est au plus dénombrable. Si $f(1_+) = f(0_-)$, la fonction f est constante sur $[0,1]$ et $D_{[0,1]} = \emptyset$. On s'intéresse donc au cas $f(1_+) > f(0_-)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \{x \in [0,1], f(x_+) - f(x_-) \geq (f(1_+) - f(0_-))/n\}$.

On suppose $A_n \neq \emptyset$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in A_n$ avec $x_i < x_{i+1}$ si $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Comme f est croissante, on a $f((x_i)_+) \leq f((x_{i+1})_-)$ et

$$f(1_+) - f(0_-) \geq \sum_{i=1}^{p} (f((x_i)_+) - f((x_i)_-) \geq \frac{p(f(1_+) - f(0_-))}{n}.$$

On a donc $p \leq n$ ce qui prouve que A_n est de cardinal fini.

On remarque maintenant que $D_{[0,1]} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est fini, on en déduit que $D_{[0,1]}$ est au plus dénombrable.

La raisonnement que nous venons de faire peut se faire aussi en remplaçant $[0,1]$ par $[-k,k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. En notant $D_{[-k,k]}$ l'ensemble des points de discontinuité de f inclus dans $[-k,k]$ on montre ainsi que $D_{[-k,k]}$ est au plus dénombrable. Finalement, comme $D = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} D_{[-k,k]}$, on obtient bien que D est au plus dénombrable.

Pour conclure on donne maintenant une démonstration du fait qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Soit E un ensemble et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que l'ensemble B_n est au plus dénombrable. On pose $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Comme B_n est au plus dénombrable, il existe une application injective φ_n de B_n dans $\mathbb{N}$. Pour $x \in B$, on définit $\varphi(x) \in \mathbb{N}$ en posant

$$n_x = \min\{n, x \in B_n\} \text{ et } \varphi(x) = 2^{n_x} 3^{\varphi_{n_x}(x)}.$$

Il est facile de voir de φ est injective (car 2 et 3 sont des nombres premiers et donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique $n_x = n_y$, on en déduit que $x = y$ car φ_{n_x} est injective). L'application φ est donc injective de B dans $\mathbb{N}$, ce qui prouve que B est au plus dénombrable.

Exercice 1.5 (Fonctions réglées) Une fonction réelle définie sur $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ est dite réglée si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.
2. Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur $[a,b]$ si et seulement si elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$, à droite en a, à gauche en b.

Exercice 1.6 (Normes définies par l'intégrale)
Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in E$, on pose

$$\|\varphi\|_1 = \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|\,dt \text{ et } \|\varphi\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace normé.

Corrigé – *Il est clair que* $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $f \in \mathrm{E}$ *et que* $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$, $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathrm{E}$.

Il reste à vérifier que $\|f\|_1 = 0$ *implique* $f = 0$. *Pour le montrer, il suffit de remarquer que si* $f \neq 0$, *il existe* $t \in [-1,1]$ *tel que* $a = f(t) \neq 0$ *et donc, par continuité de* f, *il existe* $\alpha, \beta \in [-1,1]$, $\alpha < \beta$ *et* $f > \frac{a}{2}$ *sur* $[\alpha, \beta]$. *D'où l'on déduit* $\|f\|_1 \geq \frac{a}{2}(\beta - \alpha) > 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n \in \mathrm{E}$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_1)$, alors $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 0$.

Corrigé – *On a* $\displaystyle\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|dx \leq \|\varphi_n - \varphi\|_1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En faisant tendre n vers* $+\infty$ *on en déduit* $\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|dx = 0$ *et donc (par continuité de* φ*) que* $\varphi = 0$ *sur* $[-1, 0]$.

Soit $\varepsilon > 0$. *On a aussi* $\int_{\varepsilon}^{1} |\varphi(x) - 1|dx \leq \|\varphi_n - \varphi\|_1$ *pour tout n tel que* $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. *On en déduit, en faisant tendre n vers* $+\infty$ *que* $\int_{\varepsilon}^{0} |\varphi(x) - 1|dx = 0$ *et donc* $\varphi = 1$ *sur* $[\varepsilon, 1]$. *Comme* ε *est arbitraire, on a finalement* $\varphi = 1$ *sur* $]0, 1]$. *Noter que ceci est en contradiction avec* $\varphi = 0$ *sur* $[-1, 0]$ *et la continuité de* φ *en* 0. *La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge donc pas dans* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_1)$.

(b) En déduire que $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Corrigé – *La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_1)$ *(il suffit pour s'en convaincre de remarquer que* $\|\varphi_n - \varphi_m\|_1 \leq \frac{1}{n}$ *si* $m \geq n$*) et ne converge pas dans* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_1)$. *L'espace* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_1)$ *n'est donc pas complet.*

3. Montrer que $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_2)$ est un espace préhilbertien (c'est-à-dire que sa norme est induite par un produit scalaire) mais n'est pas complet (ce n'est donc pas un espace de Hilbert).

Corrigé – *Pour* $f, g \in \mathrm{E}$, *on pose* $(f \mid g)_2 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
L'application $(f, g) \mapsto (f \mid g)_2$ *est un produit scalaire sur* E, *c'est-à-dire que c'est une application bilinéaire de* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *dans* $\mathbb{R}$, *symétrique et telle que* $(f \mid f)_2 = 0$ *implique* $f = 0$.
Elle induit donc une norme sur E *qui est justement le la norme* $\|\cdot\|_2$, *c'est-à-dire* $\|f\|_2 = \sqrt{(f \mid f)_2}$. *L'espace* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_2)$ *est donc un espace préhilbertien (voir le paragraphe 6.2).*

L'espace $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_2)$ *n'est pas complet car la même suite qu'à la question précédente,* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *est de Cauchy dans* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_2)$ *(on a aussi* $\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \leq \frac{1}{n}$ *si* $m \geq n$*) et ne converge pas dans* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_2)$ *(un raisonnement analogue à celui de la question précédente montre que si* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* φ *dans* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_2)$, *alors* $\varphi(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $\varphi(x) = 1$ *si* $x > 0$, *ce qui est en contradiction avec la continuité de* φ *en* 0*).*

Exercice 1.7 (Rappels sur la convergence des suites réelles) On rappelle que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_p.$$

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

Corrigé – *On note* $a_n = \sup_{p\geq n} u_p \in \overline{\mathbb{R}}$. *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante donc convergente dans* $\overline{\mathbb{R}}$, *ceci montre que* $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ *est bien définie. On pose* $a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n$.
On montre tout d'abord que a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On distingue trois cas :*

Cas 1 *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = -\infty$.*
On a alors $u_p = -\infty$ pour tout $p \geq n$ et donc $u_n \to -\infty$ et $a = -\infty$ est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cas 2 *$a_n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{p\geq n} u_p = +\infty$, il existe donc $\varphi(n) \geq n$ telle que $u_{\varphi(n)} \geq n$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers $a = +\infty$, donc a est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Cas 3 *$a_n > -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a_q < +\infty$. Dans ce cas, on a $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq q$. Pour tout $n \geq q$, il existe $\varphi(n) \geq n$ telle que $a_n - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq a_n$ (par définition d'un $\sup$). La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq q}$ est donc une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, donc a est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Il reste à montrer que a est supérieur ou égal à toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit b une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \to +\infty$ et $u_{\varphi(n)} \to b$, quand $n \to +\infty$. Comme $a_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc, en passant à limite quand $n \to +\infty$, $a \geq b$. a est donc la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on sait par la question précédente qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers $\limsup_{n\to+\infty} u_n$. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que aucune sous-suite ne converge simplement vers $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ (on rappelle que $(\limsup_{n\to+\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to+\infty}(f_n(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Comme $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$, il existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. On définit maintenant f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

   - *Si le cardinal de $\psi(x)$ est fini, on prend $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   - *Si le cardinal de $\psi(x)$ est infini, on peut écrire $\psi(x) = \{\varphi_x(p), p \in \mathbb{N}\}$ où φ_x est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. on prend alors $f_n(x) = 1$ si $n \notin \psi(x)$, $f_n(x) = 1$ si $n = \varphi_x(2q)$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = 0$ si $n = \varphi_x(2q+1)$ avec $q \in \mathbb{N}$.*

   Avec ce choix de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ est la fonction constante et égale à 1. On montre maintenant que aucune sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge simplement vers $\limsup_{n\to+\infty} f_n$. En effet, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = \mathrm{Im}(\varphi)$ (car ψ est surjective). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n \geq p$ tel que $\varphi(n) = \varphi_x(2q+1)$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$ (car $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(p-1)\}$ ne peut pas contenir $\{\varphi_x(2q+1), q \in \mathbb{N}\}$), on a donc $f_{\varphi(n)}(x) = 0$, ce qui montre que $f_{\varphi(n)}(x) \not\to 1$ quand $n \to +\infty$. La sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas simplement vers $\limsup_{n\to+\infty} f_n$.

3. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $\liminf_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\limsup_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.

   Donner un exemple d'une telle suite.

   Corrigé – *On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la question 1 (et son analogue avec $\liminf$) on a $0, 1 \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \subset [0,1]$. On montre maintenant que $\mathrm{A} = [0,1]$.*

   Soit $a \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $u_p > a$ (car $\sup_{p\geq n} u_p \geq 1$). De même, il existe $q > p$ tel que $u_q < a$ (car $\inf_{q\geq p} u_q \leq 0$). On pose $\varphi(n) = \min\{q > p\,;\, u_q < a\}$. On a donc $u_{\varphi(n)} < a \leq u_{\varphi(n)-1}$ (noter que ceci est aussi vrai si $q = p+1$, grâce au choix de p). Comme $|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)-1}| \to 0$ quand $n \to +\infty$ (noter que $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ car $\varphi(n) > n$), on a $u_{\varphi(n)} \to a$ quand $n \to +\infty$ et donc $a \in \mathrm{A}$. Ceci prouve que $\mathrm{A} = [0,1]$.

   On obtient un exemple d'une telle suite de la manière suivante :

   Pour $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique (p,q) avec $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq p$ tel que $n = \frac{p(p+1)}{2} + q$, on pose alors $u_n = \frac{q}{p+1}$ si $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $u_n = \frac{p-q}{p+1}$ si $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.8 (Fonctions caractéristiques d'ensembles)
Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) &= 1, \text{ si } x \in \mathrm{A}, \\ \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) &= 0, \text{ si } x \notin \mathrm{A}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

La fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ est appelée "fonction caractéristique de A" (elle est souvent aussi notée χ_{A}).

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors

$$\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}} + \mathbf{1}_{\mathrm{B}}.$$

En déduire que si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} = \mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n}.$$

(On précisera aussi le sens donné à "$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}$").

Corrigé – *Si* A *et* B *sont 2 parties de* E*, il est facile de voir que* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}(x)$ *est différent de* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) + \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x)$ *seulement si* $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. *Si* A *et* B *sont deux parties disjointes de* E*, on a bien* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}} + \mathbf{1}_{\mathrm{B}}$.

Si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de parties de* E*, on définit, pour* $x \in \mathrm{E}$ *:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}(x),$$

cette limite existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Si les* (A_n) *sont disjoints deux à deux, cette limite est égale à* 0 *si* $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ *et est égale à* 1 *si* $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ *(car x appartient alors à un seul* A_n*).*

2. Montrer que si $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}$.

Corrigé – *Si* $x \in \mathrm{B}$*, on a* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x) = 0$.

Si $x \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$*, on a* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x) = 1$.

Si $x \in \mathrm{A}^c$*, on a* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x) = 0$.

Ceci donne bien $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}$.

3. Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$.

Corrigé – *Si* $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$*, on a* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x)\mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x) = 1$.

Si $x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c$*, on a* $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x)\mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x) = 0$.

Ceci donne bien $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$.

4. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

Corrigé – *Soit* $a_1, \ldots, a_n$ *les valeurs prises par f (noter que* $a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$*). On pose alors* $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) = a_i\}$.

On voit alors que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$.

Exercice 1.9 (Limite uniforme dans $\mathbb{R}$**)** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (de sorte que $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$).

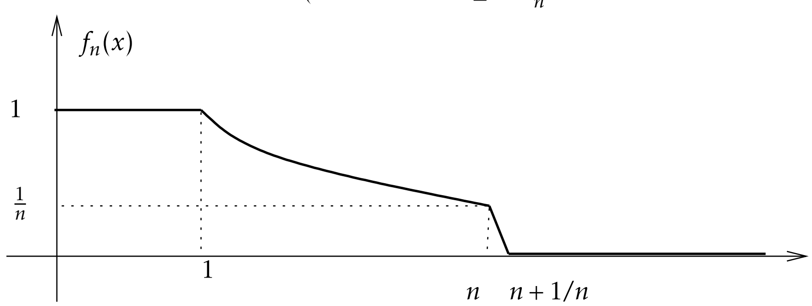
1. On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

   On note $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ cette limite.

   Montrer, en donnant un exemple, que $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ peut ne pas exister dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *Pour $n \geq 1$, on définit f_n par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x} & si\ 1 \leq x \leq n, \\ n + \frac{1}{n} - x & si\ n < x < n + \frac{1}{n}, \\ 0 & si\ x \geq n + \frac{1}{n}. \end{cases}$$



   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1\ si\ 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x}\ si\ 1 \leq x \end{cases}$$

   Plus précisément, on a $\|f_n - f\|_u \leq \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   D'autre part, pour $a \geq 1$, $\int_0^a f(x)\,dx = 1 + \log(a) \to \infty$ quand $a \to \infty$.

2. On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ et $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ existent dans $\mathbb{R}$.

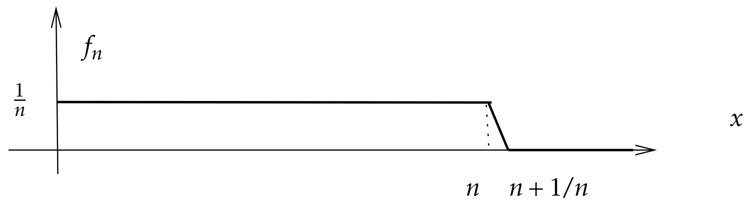
   On note alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cette dernière limite. L'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

   est-elle satisfaite ?

   Corrigé – *Pour $n \geq 1$, on définit f_n par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ 0 \leq x < n, \\ n + \frac{1}{n} - x & si\ n < x < n + \frac{1}{n}, \\ 0 & si\ x \geq n + \frac{1}{n}. \end{cases}$$



La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 car $\|f_n\|_u = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, mais $1 \le \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.10 (Convergence dominée et intégrale des fonctions continues)
Cet exercice est difficile.
On note $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Noter que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une norme.
Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit f^+ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ (pour tout $x \in [0,1]$), et $f^- = (-f)^+$ (de sorte que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$). Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), On dit que $f \ge g$ si $f(x) \ge g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. On désigne par 0 la fonction (définie sur $\mathbb{R}$) identiquement nulle. Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est positive si :

$$f \in \mathrm{E},\ f \ge 0 \Rightarrow \mathrm{T}(f) \ge 0.$$

Soit $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive.

1. Montrer que T est continue de $(\mathrm{E}, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. [Indication : On pourra remarquer que, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{T}(f) \le \mathrm{T}(\mathbf{1})\|f\|_\infty$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante et égale à 1 sur $[0,1]$.]
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ et $f \in \mathrm{E}$ telles que $f_{n+1} \ge f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Montrer que f_n tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.
   [Indication : Soit $\varepsilon > 0$, on pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{O}_n = \{x \in [0,1]\,;\, f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ et utiliser la compacité de $[0,1]$.]
   En déduire que $\mathrm{T}(f_n) \to \mathrm{T}(f)$, quand $n \to +\infty$.
3. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ et $g \in \mathrm{E}$ telles que $f_{n+1} \ge f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $g(x) \le \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, pour tout $x \in [0,1]$.
   Montrer que $\mathrm{T}(g) \le \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n)$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que $f \in \mathrm{A}^+$ s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ telle que $f_{n+1} \ge f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n) < +\infty$.

4. Soit $f \in \mathrm{A}^+$, montrer que $\sup_{g\in\mathrm{E}, g\le f} (\mathrm{T}(g)) < +\infty$.

On définit T sur A^+ par $\mathrm{T}(f) = \sup_{g\in\mathrm{E}, g\le f} (\mathrm{T}(g))$.
Noter que ceci est compatible avec la définition de T sur E et que si $f, g \in \mathrm{A}^+$ on a alors : $f \ge g \Rightarrow \mathrm{T}(f) \ge \mathrm{T}(g)$.

5. ("Convergence croissante") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{A}^+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que $f_{n+1} \ge f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n) < +\infty$. Montrer que $f \in \mathrm{A}^+$ et $\mathrm{T}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n)$.
   [Indication : Considérer $g_p = \sup_{0\le n\le p} (f_{p,n})$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{p,n})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ tels que $f_{p+1,n} \ge f_{p,n}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to+\infty} f_{p,n}(x) = f_n(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.]

6. ("Convergence décroissante") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{A}^+$ et $f \in \mathrm{E}$ telles que $f_{n+1} \le f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $\mathrm{T}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n)$.
   [Indication : On pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n \in \mathrm{A}^+$ tel que $h_n \ge f_n - f_{n+1}$ et $\mathrm{T}(h_n) \le \mathrm{T}(f_n) - \mathrm{T}(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Puis, en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \ge f_0(x) - f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, et en utilisant la question 5, montrer que $\mathrm{T}(f) \ge \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n)$.]
7. ("Convergence dominée") Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ et $g \in \mathrm{E}$ telles que :
   1. $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|g_n(x)| \le 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que $\mathrm{T}(g) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(g_n)$.
   [Indication : On pourra utiliser la question 6 avec $f_n = \sup_{p\ge n} g_p - \inf_{p\ge n} g_p$ et remarquer que $g - g_n \le f_n$ et $g_n - g \le f_n$.]
8. (Exemple.) En choisissant convenablement T, montrer le résultat suivant :
   Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ et $f \in \mathrm{E}$ telles que :
   1. $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|f_n(x)| \le 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   alors $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$, quand $n \to +\infty$.
   Donner un contre–exemple à ce résultat si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée.

Exercice 1.11 (Théorème de Bernstein) On veut démontrer ici le théorème suivant :

Théorème 1.7 (Bernstein) *Soient* E *et* F *deux ensembles quelconques ; il existe une bijection de* E *dans* F *si et seulement s'il existe une injection de* E *dans* F *et une injection de* F *dans* E.

Bien sûr, l'existence d'une bijection de E dans F donne l'existence d'une injection de E dans F et d'une injection de F dans E. Il s'agit maintenant de montrer la réciproque. On suppose donc qu'il existe une injection E dans F, notée f, et une injection de F dans E, notée g. A partir de f et g, on va construire une bijection h de E dans F.

Soit $x \in \mathrm{E}$ donné. Pour déterminer $h(x)$, on commence par considérer la suite des images de x (alternativement par f et g) et la suite des antécédents de x (alternativement par g et f). Bien sûr, la suite des images de x est infinie. Mais, lorsque f ou g n'est pas surjective, la suite des antécédents de x peut ne pas être infinie (si $x \notin \mathrm{Im}(g)$ elle s'arrête tout de suite !). Le choix de $h(x)$ va être fait en fonction de cette suite des antécédents. Voici tout d'abord la construction de cette suite.

On pose $x_0 = x$.

Construction de x_k **pour** $k > 0$. Soit $k > 0$. On suppose x_{k-1} connu (ce qui est vrai pour $k = 1$).

- Si k est impair, on prend $x_k = f(x_{k-1})$ (de sorte que $x_k \in \mathrm{F}$).
- Si k est pair, on prend $x_k = g(x_{k-1})$ (de sorte que $x_k \in \mathrm{E}$).

Construction de x_k **pour** $k < 0$. Soit $k < 0$, On suppose que x_{k+1} existe (ce qui est vrai pour $k = -1$).

- Si $|k|$ est impair et si $x_{k+1} \notin \mathrm{Im}(g)$, la suite des antécédents s'arrête.
  On pose alors $\mathrm{N} = k$ (et x_N n'existe pas).
- Si $|k|$ est impair et si $x_{k+1} \in \mathrm{Im}(g)$, on prend x_k tel que $g(x_k) = x_{k+1}$ (x_k est unique car g est injective).

– Si $|k|$ est pair et si $x_{k+1} \notin \mathrm{Im}(f)$, la suite des antécédents s'arrête.
  On pose alors $\mathrm{N} = k$ (et x_N n'existe pas).
– Si $|k|$ est pair et si $x_{k+1} \in \mathrm{Im}(f)$, on prend x_k tel que $f(x_k) = x_{k+1}$ (x_k est unique car f est injective).

Enfin, si la suite des antécédents ne s'arrête jamais, on pose $\mathrm{N} = -\infty$. On a ainsi construit une suite $(x_k)_{k>\mathrm{N}}$

On définit maintenant $h(x)$ dans F. On distingue trois cas.

Si $-\mathrm{N}$ est impair, on prend $h(x) = f(x)$, c'est-à-dire $h(x) = x_1$,

Si $-\mathrm{N}$ est pair, on prend $h(x) = y$, avec $g(y) = x$, c'est-à-dire $h(x) = x_{-1}$,

Si $\mathrm{N} = -\infty$, on prend $h(x) = f(x)$.

Montrer que l'application h ainsi définie est une bijection de E dans F.

Corrigé – *L'application g est une bijection de* F *sur son image, notée* $\mathrm{Im}(g)$ *(qui est une partie de* E*). On note $\widehat{g}$ l'application réciproque (qui est donc une bijection de* $\mathrm{Im}(g)$ *dans* F*). La construction de h montre que pour tout $x \in \mathrm{E}$ on a $h(x) = f(x)$ ou $h(x) = \widehat{g}(x)$.*

On montre tout d'abord que h est injective. Soit $x, z \in \mathrm{E}$ tels que $h(x) = h(z)$. On veut montrer que $x = z$. On distingue 3 cas.

Cas 1 : $h(x) = f(x), h(z) = f(z)$**.** *Dans ce cas, comme f est bijective, on a $x = z$.*

Cas 2 : $h(x) = \widehat{g}(x), h(z) = \widehat{g}(z)$**.** *Dans ce cas, comme $\widehat{g}$ est bijective, on a $x = z$.*

Cas 3 : $h(x) = f(x), h(z) = \widehat{g}(z)$**.** *On note $(x_k)_{k>\mathrm{N}_x}$ et $(z_k)_{k>\mathrm{N}_z}$ les suites associées à x et z. Par définition de h, on a donc $h(x) = x_1$ et $h(z) = z_{-1}$. De plus, on a $\mathrm{N}_z > -\infty$, $-\mathrm{N}_z$ pair et $\mathrm{N}_x = -\infty$ ou $-\mathrm{N}_x$ impair.*
De l'égalité $x_1 = z_{-1}$, on déduit que les antécédents de x_1 sont les mêmes que ceux de z_{-1} et donc que $\mathrm{N}_z = \mathrm{N}_x - 2$, ce qui est impossible car $-\mathrm{N}_z$ pair et $\mathrm{N}_x = -\infty$ ou $-\mathrm{N}_x$ impair. Ce cas est donc impossible.

Bien sûr, le cas $h(x) = \widehat{g}(x)$ et $h(z) = f(z)$ est identique au cas 3. On a donc bien montré que h est injective.

On montre maintenant que h est surjective. Soit $y \in \mathrm{F}$. On pose $x = g(y)$ et on considère la suite associée à x, notée $(x_k)_{k>\mathrm{N}}$, de sorte que $y = x_{-1}$. Ici aussi, on peut distinguer 3 cas.
Cas 1 : $\mathrm{N} = -\infty$**.** *Dans ce cas, la suite des antécédents de x_{-2} est aussi infinie et on a donc $h(x_{-2}) = x_{-1} = y$. On a donc $y \in \mathrm{Im}(h)$.*
Cas 2 : $\mathrm{N} > -\infty$ **et** $-\mathrm{N}$ **impair.** *Comme x_{-1} existe (puisque $x_{-1} = y$), on a $\mathrm{N} \leq -3$ et donc x_{-2} existe. La suite des antécédents de x_{-2} est alors la même que la suite des antécédents de x avec un décalage de 2, on a alors aussi $h(x_{-2}) = f(x_{-2}) = x_{-1} = y$. On a donc $y \in \mathrm{Im}(h)$.*
Cas 3 : $\mathrm{N} > -\infty$ **et** $-\mathrm{N}$ **pair.** *On a alors $h(x) = x_{-1} = y$. On a donc $y \in \mathrm{Im}(h)$.*

Ceci termine la démonstration de la bijectivité de h.

Exercice 1.12 (Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$)
En utilisant le théorème de Bernstein (théorème 1.7), montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Corrigé – *Il s'agit donc de construire une injection, notée f, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et une injection, notée g, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.*
Pour f, on prend $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est bien une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
On construit maintenant une application g injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$. On distingue 3 cas,

1. *Si $r = 0$, on pose $h(r) = 0$.*
2. *Si $r > 0$. On note $\mathrm{I}_r = \{q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $rq \in \mathbb{N}^\star\}$, $q_r = \min \mathrm{I}_r$ et $p_r = rq_r$ de sorte que $p_r \in \mathbb{N}^\star$ et $r = p_r/q_r$. On pose alors $g(r) = 2^{p_r}3^{q_r}$ (on a bien $g(r) \in \mathbb{N}$).*
3. *Si $r < 0$. On note $\mathrm{I}_r = \{q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $-rq \in \mathbb{N}^\star\}$, $q_r = \min \mathrm{I}_r$ et $p_r = -rq_r$ de sorte que $p_r \in \mathbb{N}^\star$ et $r = -p_r/q_r$. On pose alors $g(r) = 5^{p_r}3^{q_r}$ (on a bien $g(r) \in \mathbb{N}$).*

On montre mainenant que g est injective. Soit $r,s \in \mathbb{Q}$ tels que $g(r) = g(s)$, il s'agit de montrer que $r = s$. On distingue ici 4 cas.

1. *Si $r = 0$ ou $s = 0$, on a $g(r) = g(s) = 0$ et donc $r = s = 0$.*
2. *Si r et s sont de signes contraires. On peut supposer $r > 0$ et $s > 0$ (le cas $r < 0$ et $s > 0$ est semblable). Dans ce cas, on ne peut pas avoir $g(r) = g(s)$ car $g(r)$ est un multiple de 2 mais $g(s)$ n'est pas un multiple de 2.*
3. *Si $r > 0$ et $s > 0$, on a $g(r) = 2^{p_r}3^{q_r} = 2^{p_s}3^{q_s} = g(s)$. Mais, comme 2 et 3 sont des nombres premiers, ceci impose $p_r = p_s$ et $q_r = q_s$, ce qui donne bien $r = s$.*
4. *Si $r < 0$ et $s < 0$, on a $g(r) = 5^{p_r}3^{q_r} = 5^{p_s}3^{q_s} = g(s)$. Mais, comme 5 et 3 sont des nombres premiers, ceci impose $p_r = p_s$ et $q_r = q_s$, ce qui donne encore $r = s$.*

On a bien montré que $r = s$ et donc que g est injective.

Exercice 1.13 (Limites sup et inf d'ensembles) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On note

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p.$$

1. On suppose la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$ en fonction de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

   Corrigé – *Si $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors*
   $$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$
   Si $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors
   $$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

2. Même question que précédemment si la suite est définie par : $\mathrm{A}_{2p} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}_{2p+1} = \mathrm{B}$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.

   Corrigé – *Dans ce cas, on a $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.*

3. Montrer que :
$$1_{\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n} = \limsup_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}$$
$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n \subset \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$$
$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n^c}(x) < \infty\}$$
$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}(x) = \infty\}.$$

   Corrigé – *On remarque d'abord que, si $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$, $1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{\mathrm{B}_n}$ et $1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{\mathrm{B}_n}$.*

   – *Soit $x \in \mathrm{E}$,*
   $$1_{\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n}(x) = 1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{p\geq n} 1_{\mathrm{A}_p}(x))$$
   $$= \lim_{n\to+\infty} (\sup_{p\geq n} 1_{\mathrm{A}_p}(x)) = \limsup_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_p}(x).$$

Donc $1_{\limsup_{n\to+\infty} A_n} = \limsup_{n\to+\infty} 1_{A_n}$.

De même, soit $x \in E$,

$$1_{\liminf_{n\to+\infty} A_n}(x) = 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geq n} A_p}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{\bigcap_{p\geq n} A_p}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} 1_{A_p}(x))$$
$$= \lim_{n\to+\infty}(\inf_{p\geq n} 1_{A_p}(x)) = \liminf_{n\to+\infty} 1_{A_p}(x).$$

Donc $1_{\liminf_{n\to+\infty} A_n} = \liminf_{n\to+\infty} 1_{A_n}$.

- *Si* $x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in \bigcap_{p\geq n} A_p$, *on a donc* $x \in \bigcup_{p\geq m} A_p$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *(on a, par exemple,* $x \in A_p$ *avec* $p = \max\{m, n\}$*). On en déduit* $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geq m} A_p = \limsup_{n\to+\infty} A_n$. *Donc* $\liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n$.
- *Soit* $x \in E$. *On voit que* $x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n$ *si et seulement s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in A_p$ *pour tout* $p \geq n$, *ce qui est équivalent à dire que* x *n'appartient à* A_n^c *que pour un nombre fini de* n *ou encore que* $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty$. *On a donc bien*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n^c}(x) < \infty\}.$$

- *Soit* $x \in E$. *On voit que* $x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n$ *si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $p \geq n$ *tel que* $x \in A_p$, *ce qui est équivalent à dire que* x *n'appartient à* A_n *que pour un nombre infini de* n *ou encore que* $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty$. *On a donc bien*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \{x \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{A_n}(x) = \infty\}.$$

Chapitre 2

Tribus et mesures

2.1 Introduction

2.1.1 Cas d'un problème "discret"

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu'un certain événement, résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple l'expérience qui consiste à lancer un dé. On appelle éventualité associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et univers des possibles l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 ; on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au dé cassé. On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est-à-dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E.
À partir des éventualités, qui sont donc les éléments de l'univers des possibles E, on définit les événements, qui forment un ensemble de parties de E. Dans notre exemple du lancer de dé, l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. Dans l'exemple du dé, la partie $\{2, 4, 6\}$ de E est l'événement : "le résultat du lancer est pair". On appelle événement élémentaire un singleton, par exemple $\{6\}$ dans notre exemple du lancer de dé, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement vide l'ensemble vide $\emptyset$ (qui a donc une chance nulle de se réaliser). Pour mesurer la chance qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble des événements (donc de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dans notre exemple du lancer de dé) dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (qui semblent naturelles...). La chance (ou probabilité) pour un événement $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ de se réaliser sera donc le nombre $p(\mathrm{A})$, appartenant à $[0, 1]$.
L'exemple du lancer de dé, que nous venons de considérer, est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis, l'ensemble E est alors infini dénombrable (on rappelle qu'un ensemble I est dénombrable s'il existe une bijection de I dans $\mathbb{N}$, il est au plus dénombrable s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$), ou des problèmes (parfois appelés continus) où E est infini non dénombrable.

2.1.2 Exemple continu

Considérons maintenant l'expérience qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire est alors un point $(x, y) \in \mathrm{E}$ (le point d'impact de la balle), et un événement semble être une partie quelconque A de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. On suppose qu'on a effectué le lancer sans viser, c'est-à-dire en supposant que n'importe quel point de la table a une chance égale d'être atteint (les événements élémentaires sont dit équiprobables), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste...). On se rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d'être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement deviner que la probabilité pour une partie A d'être atteinte (dans le modèle équiprobable) est le rapport entre la surface de A et la surface de E. La notion intuitive de surface correspond en fait à la notion mathématique de mesure que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l'a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, *i.e.* qui vérifie les propriétés (4.1)-(4.2), et qui mesure toutes les parties de $\mathbb{R}$ (au sens intuitif de longueur) ou $\mathbb{R}^2$ (au sens intuitif de surface), ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ (voir à ce sujet l'exercice 2.28). On va donc définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ (qu'on appelle tribu) sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d'un ensemble fini, la tribu sera, en général, $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ tout entier. Mais, dans le cas de la balle de ping-pong que vous venons de décrire, l'ensemble des événements sera une tribu strictement incluse dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

2.2 Tribu ou $\sigma-$algèbre

Définition 2.1 (Tribu ou $\sigma-$algèbre) *Soient* E *un ensemble,* T *une famille de parties de* E *(i.e.* $\mathrm{T} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*). La famille* T *est une tribu (on dit aussi une $\sigma-$algèbre) sur* E *si* T *vérifie :*

1. $\emptyset \in \mathrm{T}, \mathrm{E} \in \mathrm{T}$,
2. T *est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T*, on a* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.
3. T *est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T*, on a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.
4. T *est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*, on a* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}$ *(On rappelle que* $\mathrm{A}^c = \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$*).*

Il est clair que, pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1-4 de la définition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in \mathrm{T}$ (ou $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$), 2 (ou 3) et 4.

Exemples de tribus sur E : $\{\emptyset, \mathrm{E}\}$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ sont des tribus sur E.

Définition 2.2 (Langage probabiliste) *Soient* E *un ensemble quelconque (parfois appelé l'univers des possibles) et* T *une tribu ; on appelle éventualités les éléments de* E *et événements les éléments de* T*. On appelle événement élémentaire un singleton appartenant à* T*. On dit que deux événements* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *sont incompatibles si* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$*.*

Proposition 2.3 (Stabilité par intersection des tribus) *Soient* E *et* I *deux ensembles. Pour tout* $i \in \mathrm{I}$*, on se donne une tribu* T_i *sur* E*. Alors, la famille (de parties de* E*)*

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E};\ \mathrm{A} \in \mathrm{T}_i,\ \forall i \in \mathrm{I}\}$$

est encore une tribu sur E*.*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de la première question de l'exercice 2.2. ■

Cette proposition nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 2.4 (Tribu engendrée) *Soient* E *un ensemble et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*. On appelle tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ *la plus petite tribu contenant* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire la tribu* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ *intersection de toutes les tribus sur* E *contenant* $\mathcal{C}$ *(cette intersection est non vide car* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$*).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est identique à celle de tribu en remplaçant "dénombrable" par "finie".

Définition 2.5 (Algèbre) *Soient* E *un ensemble,* $\mathcal{A}$ *une famille de parties de* E *(i.e.* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*). La famille* $\mathcal{A}$ *est une algèbre sur* E *si* $\mathcal{A}$ *vérifie :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathrm{E} \in \mathcal{A}$,

2. $\mathcal{A}$ *est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ *on a* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}$ *est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ *on a* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

4. $\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$*, on a* $\mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.6 (Algèbre engendrée) *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$*. Comme pour les tribus, on peut définir l'algèbre engendrée par* $\mathcal{C}$*. C'est la plus petite algèbre contenant* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire l'intersection de toutes les algèbres contenant* $\mathcal{C}$ *(voir l'exercice 2.9).*

Soit E un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (voir la définition 2.4 et l'exercice 2.2). Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : intersection dénombrable, union dénombrable et passage au complémentaire. Plus précisément, on pose :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E} \text{ tel que } \mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \text{avec, pour tout } n, \mathrm{A}_n \in \mathcal{C} \text{ ou } \mathrm{A}_n^c \in \mathcal{C}\},\\
&\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E} \text{ tel que } \mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \text{avec, pour tout } n, \mathrm{A}_n \in \mathcal{C} \text{ ou } \mathrm{A}_n^c \in \mathcal{C}\},\\
&\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

Prenons $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci-après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Cependant, $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu (cela est moins facile à voir). En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, pour $n \geq 1$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C})$).

Remarque 2.7 *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*. Il est alors facile de voir que* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ *(cf. Exercice 2.2).*

La construction de la tribu de Borel s'appuie sur la topologie des ouverts de $\mathbb{R}$. Rappelons à toutes fins utiles qu'une topologie est précisément la donnée des ouverts :

Définition 2.8 (Topologie) *Soit* E *un ensemble. Une topologie sur* E *est donnée par une famille de parties de* E*, appelées ouverts de* E*, contenant* $\emptyset$ *et* E*, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. L'ensemble* E*, muni de cette famille de parties, est alors un espace topologique.*

Définition 2.9 (Tribu borélienne) *Soit* E *un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de* E*, cette tribu sera notée* $\mathcal{B}(\mathrm{E})$*. Dans le cas* $\mathrm{E} = \mathbb{R}$*, cette tribu est donc notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On appelle borélien de* $\mathbb{R}$ *un élément de la tribu borélienne.*

Un des objectifs principaux de ce chapitre est de construire une application λ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

1. $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$,
2. $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathrm{A}_n)$, pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. (Noter que $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ grâce à la stabilité d'une tribu par union dénombrable.)

C'est l'objet du paragraphe 2.5. Une question naturelle est de savoir si l'on peut prendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La réponse est non (voir les exercices 2.28 et 2.29). On peut même démontrer que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (alors que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$).
On donne maintenant un rappel rapide sur les cardinaux (sans entrer dans les aspects difficiles de la théorie des ensembles, et donc de manière peut-être un peu imprécise).
Soient A et B deux ensembles.

1. On dit que $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{card}(\mathrm{B})$ s'il existe une application bijective de A dans B. Pour montrer que deux ensembles ont même cardinaux, il est souvent très utile d'utiliser le théorème de Bernstein (voir l'exercice 1.11). Ce théorème dit que s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B (et donc $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \mathrm{card}(\mathrm{B})$). Le théorème de Bernstein motive également la définition suivante.
2. On dit que $\mathrm{card}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{card}(\mathrm{B})$ s'il existe une application injective de A dans B.
3. Un autre théorème intéressant, dû à Cantor, donne que, pour tout ensemble X, on a $\mathrm{card}(\mathrm{X}) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))$ (c'est-à-dire $\mathrm{card}(\mathrm{X}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))$ et $\mathrm{card}(\mathrm{X}) \neq \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))$). On a donc, en particulier, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$. La démonstration du théorème de Cantor est très simple. Soit $\varphi : \mathrm{X} \to \mathcal{P}(\mathrm{X})$. On va montrer que φ ne peut pas être surjective. On pose $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X};\ x \notin \varphi(x)\}$ (A peut être l'ensemble vide). Supposons que $\mathrm{A} \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Soit alors $a \in \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{A} = \varphi(a)$. Si $a \in \mathrm{A} = \varphi(a)$, alors $a \notin \mathrm{A}$ par définition de A. Si $a \notin \mathrm{A} = \varphi(a)$, alors $a \in \mathrm{A}$ par définition de A. On a donc montré que A ne peut pas avoir d'antécédent (par φ) et donc φ n'est pas surjective.

Proposition 2.10 *On note* $\mathcal{C}_1$ *l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_2 = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ *et* $\mathcal{C}_3 = \{]a,\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$*. Alors* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. (Noter que d'autres caractérisations de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, semblables, sont possibles.)*

DÉMONSTRATION – On a, par définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On va démontrer ci-après que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ (le fait que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_3)$ est laissé au lecteur).

Comme $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, on a $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. On va montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$, on aura alors que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose $\mathrm{O} \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$). Le lemme 2.11 ci-après nous donne l'existence d'une famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathrm{A}}$ d'intervalles ouverts telle que $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ et $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_n$. Noter qu'on a aussi $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ en posant $\mathrm{I}_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{I}_n \in \mathcal{C}_2 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ pour tout $n \in \mathrm{A}$ et $\emptyset \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$, on en déduit, par stabilité dénombrable d'une tribu, que $\mathrm{O} \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. Donc, $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. On a bien montré que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. ■

Lemme 2.11 *Tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}$ *est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés.*

DÉMONSTRATION – Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $O \neq \emptyset$. On pose $A = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Q}^2\ ;\ \beta < \gamma,\ ]\beta,\gamma[\subset O\}$. On a donc $\bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[\subset O$. On va montrer que $O \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ (et donc que $O = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$).

Soit $x \in O$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O$. En prenant $\beta_x \in \mathbb{Q}\cap]x-\alpha_x, x[$ et $\gamma_x \in \mathbb{Q}\cap]x, x+\alpha_x[$ (de tels β_x et γ_x existent) on a donc $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset O$ et donc $(\beta_x,\gamma_x) \in A$. D'où $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$. On a bien montré que $O \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ et donc que $O = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$. Comme $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, A est au plus dénombrable et le lemme est démontré. ■

On peut aussi montrer que tout ouvert non vide est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (cf. le lemme 2.44 page 47).

Définition 2.12 (Espace et partie mesurable ou probabilisable) *Soient* E *un ensemble et* T *une tribu sur* E. *Le couple* (E,T) *est appelé espace mesurable ou (en langage probabiliste !) espace probabilisable. Les parties de* E *qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de* T *sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).*

2.3 Mesure, probabilité

Définition 2.13 (Mesure) *Soit* (E,T) *un espace mesurable. On appelle mesure une application* $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(avec* $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$*) vérifiant :*

1. $m(\emptyset) = 0$,

2. m *est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T *disjoints deux à deux (i.e. tels que* $A_n \cap A_m = \emptyset$*, si* $n \neq m$*) on a :*

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.1}$$

Remarque 2.14

1. Dans la définition précédente on a étendu à $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'addition dans $\mathbb{R}_+$. On a simplement posé $x + (+\infty) = +\infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Noter également que la somme de la série dans la définition précédente est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que, bien sûr, $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum_{p=0}^{n} a_p \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to +\infty$.
2. Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquer que $x + y = x + z$ implique $y = z$ si $x \neq +\infty$.
3. Dans la définition précédente, la condition 1. peut être remplacée par la condition : $\exists\ A \in T, m(A) < \infty$. La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur attentif.
4. Il est intéressant de remarquer que, pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance. Plus précisément, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$. C'est l'objet du lemme 2.15.
5. Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité, c'est-à-dire que

$$m\Big(\bigcup_{p=0}^{n} A_p\Big) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p)$$

pour toute famille finie $(A_p)_{p=0,\ldots,n}$ d'éléments de T, disjoints deux à deux. L'additivité se démontre avec la σ-additivité en prenant $A_p = \emptyset$ pour $p > n$ dans (2.1).

6. Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $T = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il est facile de construire des mesures sur T, mais il n'existe pas de mesure sur T, notée m, telle que $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (voir les exercices 2.29 et 2.28). Une telle mesure existe si on prend pour T la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, c'est l'objet de la section 2.5.

Lemme 2.15 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *et soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective ; alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}.$$

DÉMONSTRATION – On pose

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p) \text{ et } B = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} (= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}).$$

Noter que $A, B \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On veut montrer que $A = B$.

On montre d'abord que $B \le A$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Comme $a_q \ge 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \le \sum_{p=0}^{N} a_p \le A$. On en déduit, faisant tendre n vers ∞ que $B \le A$.

En raisonnant avec l'inverse de φ on a aussi $A \le B$ et finalement $A = B$. ■

Définition 2.16 (Mesure finie et probabilité) *Soit* (E, T) *un espace mesurable.*

1. *On appelle mesure finie une mesure m sur* T *telle que* $m(E) < \infty$.
2. *On appelle probabilité une mesure p sur* T *telle que* $p(E) = 1$.

Définition 2.17 (Espace mesuré, espace probabilisé) *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et m une mesure (resp. une probabilité) sur* T. *Le triplet* (E, T, m) *est appelé espace mesuré (resp. espace probabilisé).*

Définition 2.18 (Mesure σ-finie) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que m est σ-finie (ou que* (E, T, m) *est σ-fini) si il existe une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$A_n \in T, \quad m(A_n) < +\infty, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Remarque 2.19 Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini. Une conséquence de la définition 2.18 est qu'il existe alors une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de T telle que $m(E_n) < +\infty$ pour tout n, $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \ne m$. En effet, à partir de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la définition 2.18, on construit une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$E_0 = A_0 \text{ et, pour } n > 0,\ E_n = A_n \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} E_p.$$

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien les propriétés désirées.

Exemple 2.20 (Mesure de Dirac) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $a \in E$. *On définit sur* T *la mesure* δ_a *par (pour* $A \in T$*) :*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0 & si\ a \notin A, \\ 1 & si\ a \in A. \end{cases} \tag{2.2}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Remarque 2.21 (Comment choisir la probabilité) Soit (E, T) un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur T. C'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rende compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion de fréquence, qui est une notion expérimentale à l'origine. Soit $A \in T$ un événement, dont on cherche à évaluer la probabilité $p(A)$. On effectue pour cela N fois l'expérience dont l'univers des possibles est E, et on note N_A le nombre de fois où l'événement A est réalisé. A N fixé, on définit alors la *fréquence* $f_N(A)$ de l'événement A par :

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Expérimentalement, il s'avère que $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. C'est ce qu'on appelle la loi empirique des grands nombres. On peut donc définir expérimentalement $p(A) = \lim_{N\to+\infty} f_N(A)$. Cependant, on n'a pas ainsi démontré que p est une probabilité : il ne s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On donnera plus loin la loi forte des grands nombres (proposition 6.99), qui permettra de justifier mathématiquement la loi empirique. On peut remarquer que $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1$.

Exemple 2.22 (Le cas équiprobable) Soit (E, T, p) un espace probabilisé. On suppose que tous les singletons appartiennent à la tribu et que les événements élémentaires sont équiprobables. On a alors : $p(\{x\}) = \frac{1}{\mathrm{card} E}$ pour tout $x \in E$.

Définition 2.23 (Mesure atomique) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré tel que :* $\{x\} \in T$ *pour tout* x *de* E. *On dit que* m *est portée par* $S \in T$ *si* $m(S^c) = 0$. *Soit* $x \in E$, *on dit que* x *est un atome ponctuel de* m *si* $m(\{x\}) \neq 0$. *On dit que* m *est purement atomique si elle est portée par la partie de* E *formée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.*

Définition 2.24 (Mesure diffuse) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* m *une mesure sur* T . *On dit que* m *est diffuse si* $\{x\} \in T$ *et* $m(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in E$. *(Cette définition est aussi valable pour une mesure signée sur* T, *définie dans la section 2.4.)*

Définition 2.25 (Partie négligeable) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $A \subset E$. *On dit que* A *est négligeable s'il existe un ensemble* $B \in T$ *tel que* $A \subset B$ *et* $m(B) = 0$.

Définition 2.26 (Mesure complète) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que* m *est complète (ou que l'espace* (E, T, m) *est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à* T.

La proposition suivante donne les principales propriétés d'une mesure.

Proposition 2.27 (Propriétés des mesures) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. La mesure* m *vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. Monotonie : Soit $A, B \in T$, $A \subset B$, *alors*

$$m(A) \leq m(B). \tag{2.3}$$

2. σ*-sous-additivité : Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.4}$$

3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \subset A_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)). \tag{2.5}$$

4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_{n+1} \subset A_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et telle que il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, *alors*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)). \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ces propriétés est facile : elles découlent toutes du caractère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention : ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées que nous verrons à la section 2.4.

1. *Monotonie.* Soit $A, B \in T$, $A \subset B$. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Comme $A \in T$ et $B \setminus A = B \cap A^c \in T$, l'additivité de m (voir la remarque 2.14) donne $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$, car m prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   Noter aussi que $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$ si $0 \leq m(A) \leq m(B) < \infty$ (mais cette relation n'a pas de sens si $m(A) = m(B) = \infty$).

2. $\sigma-$*sous additivité.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On veut montrer que

   $$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

   On pose $B_0 = A_0$ et, par récurrence sur n, $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} B_i)$ pour $n \geq 1$. Par récurrence sur n on montre que $B_n \in T$ pour tout n en remarquant que, pour $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c)$. La construction des B_n assure que

   $$B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \neq m \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

   Pour vérifier cette dernière propriété, on remarque que

   $$B_n \subset A_n \text{ et donc } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

   Puis, si $x \in A_n$ et $x \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$, on a alors

   $$x \in A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c) = B_n.$$

   Ceci prouve que

   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

   et donc, finalement,

   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

On utilise maintenant la $\sigma-$additivité de m et la monotonie de m (car $B_n \subset A_n$) pour écrire que
$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

3. *Continuité croissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par monotonie de m, on a
$$m(A_{n+1}) \ge m(A_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$
et donc
$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$
On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$B_0 = A_0 \text{ et } B_n = A_n \setminus A_{n-1} \text{ pour tout } n \ge 1$$
(noter que $A_{n-1} \subset A_n$). On a
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, B_n \in T \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \ne m.$$
La $\sigma-$additivité de m nous donne
$$m(A) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m(B_p).$$
Puis, comme $A_n = \bigcup_{p=0}^{n} B_p$, l'additivité de m (qui se déduit de la $\sigma-$additivité) nous donne
$$\sum_{p=0}^{n} m(B_p) = m(A_n) \text{ et donc } m(A) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

4. *Continuité décroissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$.

Par monotonie, on a $m(A_{n+1}) \le m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc
$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$
On a aussi, par monotonie,
$$m(A) \le m(A_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ avec } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$
Comme $m(A_{n_0}) < \infty$, on a aussi
$$m(A_n) < \infty \text{ pour tout } n \ge n_0 \text{ et } m(A) < \infty.$$
On pose $B_n = A_{n_0} \setminus A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \ge n_0$. La suite $(B_n)_{n\ge n_0}$ est croissante ($B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \ge n_0$) et
$$B = \bigcup_{n\ge 0} B_n = \bigcup_{n\ge n_0} (A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n\ge n_0} A_n = A_{n_0} \setminus A.$$
La continuité croissante donne
$$m(A_{n_0} \setminus A) = m(B) = \lim_{n\to+\infty} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_{n_0} \setminus A_n). \tag{2.7}$$
Comme $A \subset A_{n_0}$, on a $m(A_{n_0} \setminus A) = m(A_{n_0}) - m(A)$ (car $m(A) \le m(A_{n_0}) < \infty$, on utilise ici la remarque à la fin de la preuve de la monotonie). De même, comme $A_n \subset A_{n_0}$ (pour $n \ge n_0$), on a $m(A_{n_0} \setminus A_n) = m(A_{n_0}) - m(A_n)$ (car $m(A_n) \le m(A_{n_0}) < \infty$). En utilisant une nouvelle fois que $m(A_{n_0}) < \infty$, on déduit de (2.7) que $m(A) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n)$.

■

Théorème 2.28 (Mesure complétée) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on note* $\mathcal{N}_m$ *l'ensemble des parties négligeables. On pose* $\overline{T} = \{A \cup N,\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$. *Alors* $\overline{T}$ *est une tribu, et il existe une et une seule mesure, notée* $\overline{m}$, *sur* $\overline{T}$, *égale à* m *sur* T. *De plus, une partie de* E *est négligeable pour* $(E, \overline{T}, \overline{m})$ *si et seulement si elle est négligeable pour* (E, T, m). *la mesure* $\overline{m}$ *est complète et l'espace mesuré* $(E, \overline{T}, \overline{m})$ *s'appelle le complété de* (E, T, m). *La mesure* $\overline{m}$ *s'appelle la mesure complétée de la mesure* m.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 2.33.

On introduit maintenant la notion de mesure absolument continue, cette notion est intéressante en liaison avec les mesures de densité (définition 4.21). On montrera au chapitre 6 que, si (E, T, m) un espace mesuré σ-fini et μ une mesure finie sur T, alors μ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m (théorème 6.78). Cette notion de mesure absolument continue peut être sautée en première lecture.

Définition 2.29 (Mesure absolument continue, mesure étrangère)
Soient (E, T) *un espace mesurable, et* m *et* μ *des mesures (positives) sur* T.

1. *On dit que la mesure* μ *est absolument continue par rapport à la mesure* m *(et on note* $\mu << m$*) si pour tout* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$, *alors* $\mu(A) = 0$.
2. *On dit que la mesure* μ *est étrangère à la mesure* m *(et note* $\mu \perp m$*) s'il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $\mu(A^c) = 0$.

Proposition 2.30 *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* m *et* μ *des mesures (positives) sur* T *; on suppose de plus que la mesure* μ *est σ-finie. Alors il existe une mesure* μ_a *absolument continue par rapport à* m *et une mesure* μ_e *étrangère à* m *(et à* μ_a*) telle que* $\mu = \mu_a + \mu_e$.

Démonstration – On suppose tout d'abord que μ est une mesure finie. On pose $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in T, m(A) = 0\}$. Il existe donc une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $m(A_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mu(A_n) \to \alpha$, quand $n \to +\infty$. On pose alors $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a $C \in T$, $0 \le m(C) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = 0$ (par σ-sous additivité de m), $\mu(C) \ge \mu(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par monotonie de μ) et donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $\mu(C) \ge \alpha$. Enfin, la définition de α donne alors $\mu(C) = \alpha$. On a donc trouvé $C \in T$ tel que $m(C) = 0$ et $\mu(C) = \alpha$.

Pour $A \in T$, on pose $\mu_e(A) = \mu(A \cap C)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap C^c)$.

Il est clair que μ_e et μ_a sont des mesures sur T et que $\mu = \mu_e + \mu_a$. Comme $\mu_e(C^c) = 0$ et $\mu_a(C) = 0$, les mesures μ_a et μ_e sont étrangères. Comme $m(C) = 0$ et $\mu_e(C^c) = 0$, les mesures μ_e et m sont aussi étrangères. Il reste à montrer que μ_a est absolument continue par rapport à m.

Soit $B \in T$ tel que $m(B) = 0$. On veut montrer que $\mu_a(B) = 0$, c'est-à-dire que $\mu(B \cap C^c) = 0$. On pose $D = B \cap C^c$ et $F = C \cup D$. Comme $D \cap C = \emptyset$, on a

$$m(F) = m(C) + m(D) \le m(C) + m(B) = 0 \text{ et } mu(F) = \mu(C) + \mu(D) = \alpha + \mu(D).$$

Comme $m(F) = 0$, la définition de α donne que $\mu(F) \le \alpha$. On a donc $\alpha + \mu(D) \le \alpha$, d'où l'on déduit, comme $\alpha \in \mathbb{R}$ (et c'est ici que l'on utilise le fait que μ est une mesure finie), que $\mu(D) = 0$, c'est-à-dire $\mu_a(B) = 0$. On a bien ainsi montré que μ_a est absolument continue par rapport à m.

On considère maintenant le cas général où μ est σ-finie. Il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \ne m$ (voir la remarque 2.19).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in T$, on pose

$$\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap E_n).$$

La mesure $\mu^{(n)}$ est donc finie sur T. Le raisonnement précédent donne donc l'existence de $\mu_a^{(n)}$ absolument continue par rapport à m et de $\mu_e^{(n)}$ étrangère à m (et à $\mu_a^{(n)}$) telle que $\mu^{(n)} = \mu_a^{(n)} + \mu_e^{(n)}$. On pose alors, pour $A \in T$:

$$\mu_e(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_e^{(n)}(A);\ \mu_a(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_a^{(n)}(A).$$

μ_e et μ_a sont bien des mesures sur T (voir l'exercice 4.2) et il est clair que $\mu = \mu_e + \mu_a$, μ_a absolument continue par rapport à m et μ_e étrangère à m (et à μ_a). ■

Il est parfois utile (surtout en théorie des probabilités, mais une telle question apparaît aussi dans le section 2.5 et dans le chapitre 7) de montrer l'unicité d'une mesure ayant des propriétés données. La proposition suivante donne une méthode pour montrer une telle unicité (d'autres méthodes sont possibles, voir, par exemple, la proposition 5.8 dans le chapitre 5).

Proposition 2.31 (Condition suffisante pour l'égalité de deux mesures) *Soit* (E,T) *un espace mesurable et* m, μ *deux mesures sur* T. *On suppose qu'il existe* $\mathcal{C} \subset T$ *tel que*

1. $\mathcal{C}$ *engendre* T,

2. $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie (c'est-à-dire* $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$*),*

3. Il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *telle que* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,

4. $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{C}$.

On a alors $m = \mu$ *(c'est-à-dire* $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in T$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 2.22 qui découle de l'exercice 2.14 (consacré au théorème $\pi - \lambda$ de E. Dynkin).

2.4 Mesure signée

Définition 2.32 (Mesure signée) *Soit* (E,T) *un espace mesurable. On appelle mesure signée (sur* T*) une application* $m : T \to \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété de σ-additivité, c'est-à-dire telle que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \cap A_m = \emptyset$, *si* $n \neq m$,

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.8}$$

Noter qu'une mesure signée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En prenant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans (2.8), on en déduit que $m(\emptyset) = 0$.

On peut aussi considérer des mesures à valeurs complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, les parties réelles et imaginaires de ces mesures à valeurs complexes sont des mesures signées.

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c'est-à-dire (cf. définition 2.13) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Lorsque l'on s'intéressera à des mesures prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on précisera qu'il s'agit de mesures signées. Noter que les mesures signées ne vérifient pas, en général, les propriétés (2.3) et (2.4). Pour avoir un contre–exemple, il suffit de considérer une mesure signée m (non nulle) telle que $-m$ soit une mesure (positive).

Proposition 2.33 (Décomposition de Hahn d'une mesure signée) *Soient* (E,T) *un espace mesurable et* m *une mesure signée sur* T. *Alors, il existe deux mesures (positives) finies, notées* m^+ *et* m^-, *telles que :*

1. $m(\mathrm{A}) = m^+(\mathrm{A}) - m^-(\mathrm{A})$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

2. Les mesures m^+ *et* m^- *sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe* $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m^+(\mathrm{C}) = 0$*, et* $m^-(\mathrm{E} \setminus \mathrm{C}) = 0$.

Une conséquence des propriétés ci-dessus est que $m^-(\mathrm{A}) = -m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ *et* $m^+(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c)$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

De plus, la décomposition de m en différence de deux mesures (positives) finies étrangères est unique. Elle s'appelle décomposition de Hahn de m.

DÉMONSTRATION – La démonstration d'existence de m^+ et m^- est décomposée en trois étapes. Dans la première étape, on va montrer que, si $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, il existe $\tilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{T}$ tel que $\tilde{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$, $m(\tilde{\mathrm{A}}) \geq m(\mathrm{A})$ et :

$$\mathrm{B} \in \mathrm{T},\ \mathrm{B} \subset \tilde{\mathrm{A}} \ \Rightarrow\ m(\mathrm{B}) \geq 0.$$

Cette première étape nous permettra, dans l'étape 2, de montrer l'existence de $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{C}) = \sup\{m(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathrm{T}\}$ (ceci montre, en particulier que $\sup\{m(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathrm{T}\} < \infty$).

Enfin, dans l'étape 3, on pose $m^+(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ et $m^-(\mathrm{A}) = -m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c)$ (pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$) et on remarque que m^+ et m^- sont des mesures finies, étrangères et telles que $m = m^+ - m^-$.

Étape 1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on montre, dans cette étape, qu'il existe $\tilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{T}$ tel que $\tilde{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$, $m(\tilde{\mathrm{A}}) \geq m(\mathrm{A})$ et :

$$\mathrm{B} \in \mathrm{T},\ \mathrm{B} \subset \tilde{\mathrm{A}} \ \Rightarrow\ m(\mathrm{B}) \geq 0. \tag{2.9}$$

On commence par montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(\mathrm{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T tels que :

1. $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}$,
2. $\mathrm{B}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $m(\mathrm{B}_n \setminus \mathrm{B}_{n+1}) \leq \beta_n = \max\{\frac{\alpha_n}{2}, -1\}$ où $\alpha_n = \inf\{m(\mathrm{C}), \mathrm{C} \in \mathrm{T}, \mathrm{C} \subset \mathrm{B}_n\}$.

On prend $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, on suppose B_p connu pour $p \leq n$. On a

$$\alpha_n = \inf\{m(\mathrm{C}), \mathrm{C} \subset \mathrm{B}_n\} \leq 0$$

(car $\emptyset \subset \mathrm{B}_n$). Si $\alpha_n = -\infty$, il existe $\mathrm{C}_n \in \mathrm{T}$ tel que

$$\mathrm{C}_n \subset \mathrm{B}_n \text{ et } m(\mathrm{C}_n) \leq \beta_n = -1.$$

Si $-\infty < \alpha_n < 0$, on a $\beta_n > \alpha_n$, il existe donc $\mathrm{C}_n \in \mathrm{T}$ tel que

$$\mathrm{C}_n \subset \mathrm{B}_n \text{ et } m(\mathrm{C}_n) \leq \beta_n.$$

Si $\alpha_n = 0$, on prend $\mathrm{C}_n = \emptyset$. Enfin, on prend $\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \setminus \mathrm{C}_n$ et on obtient bien les propriétés désirées en remarquant que $\mathrm{C}_n = \mathrm{B}_n \setminus \mathrm{B}_{n+1}$.

La suite $(\mathrm{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire $\mathrm{B}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $m > n$, on a donc $\mathrm{C}_m \subset \mathrm{B}_m \subset \mathrm{B}_{n+1}$ et donc $\mathrm{C}_m \cap \mathrm{C}_n = \emptyset$ (car $\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \setminus \mathrm{C}_n$). Par $\sigma-$additivité de m, on en déduit

$$m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{C}_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(\mathrm{C}_n).$$

Comme $m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{C}_n) \in \mathbb{R}$, la série de terme général $m(\mathrm{C}_n)$ est convergente. On a donc

$$m(\mathrm{C}_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ et donc } \beta_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

(car $m(\mathrm{C}_n) \leq \beta_n \leq 0$) et, finalement,

$$\alpha_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On pose maintenant

$$\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{C}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n.$$

On a, bien sûr, $\tilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{T}$ et $\tilde{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$. On montre maintenant que $\tilde{\mathrm{A}}$ vérifie (2.9). Soit $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{C} \subset \tilde{\mathrm{A}}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}_n$ et donc $m(\mathrm{C}) \geq \alpha_n$. Quand $n \to +\infty$, on en déduit que $m(\mathrm{C}) \geq 0$. ce qui donne bien (2.9).

Il reste à montrer que $m(\tilde{\mathrm{A}}) \geq m(\mathrm{A})$. Comme $\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{A}} \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{C}_n)$ (et que cette union est "disjointe"), la $\sigma-$additivité de m donne que $m(\mathrm{A}) = m(\tilde{\mathrm{A}}) + \sum_{n \in \mathbb{N}} m(\mathrm{C}_n) \leq m(\tilde{\mathrm{A}})$. Ce qui termine la première étape.

Étape 2. On pose $\alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ et on montre, dans cette étape, qu'il existe $C \in T$ tel que $m(C) = \alpha$.

Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T telle que $m(A_n) \to \alpha$ quand $n \to +\infty$. Grâce à l'étape 1, on peut supposer (quitte à remplacer A_n par $\tilde{A}_n$ construit comme dans l'étape 1) que A_n vérifie (2.9), c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B \in T,\ B \subset A_n \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.10}$$

On pose $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On commence par montrer que $m(C) \geq m(A_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire C comme une union "disjointe" :

$$C = A_m \cup (\bigcup_{n\neq m} C_{n,m}),$$

avec $C_{n,m} \in T$ et $C_{n,m} \subset A_n$ pour tout $m \neq n$. En effet, il suffit pour cela de construire par récurrence (sur n) la suite des $C_{n,m}$ en prenant pour $C_{n,m}$ l'intersection de C avec A_n à laquelle on retranche A_m et les $C_{n,m}$ précédemment construits.
Par $\sigma-$additivité de m, on a

$$m(C) = m(A_m) + \sum_{n\neq m} m(C_{n,m})$$

puis, comme $C_{n,m} \subset A_n$, on a, par (2.10), $m(C_{n,m}) \geq 0$. On en déduit $m(C) \geq m(A_m)$.

En faisant tendre m vers ∞, on a alors $m(C) \geq \alpha$ et donc, finalement $m(C) = \alpha$.

Étape 3. Construction de m^+ et m^-.

Pour construire m^+ et m^-, on utilise un élément C de T tel que $m(C) = \alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ (l'existence de C a été montré à l'étape 2). Pour $A \in T$, on pose :

$$m^+(A) = m(A \cap C),\ m^-(A) = -m(A \cap C^c).$$

On a $m^+(\emptyset) = m^-(\emptyset) = 0$ (car $m(\emptyset) = 0$) et les applications m^+ et m^- sont des applications $\sigma-$additives de T dans $\mathbb{R}$ (car m est $\sigma-$additive). Pour montrer que m^+ et m^- sont des mesures finies, il suffit de montrer qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce que l'on montre maintenant.

Soit $A \in T$, on a, par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha = m(C) = m(A \cap C) + m(A^c \cap C) \leq m(A \cap C) + \alpha.$$

On en déduit $m(A \cap C) \geq 0$, ce qui prouve bien que $m^+(A) \in \mathbb{R}_+$. On a aussi, encore une fois par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha \geq m(C) + m(A \cap C^c) = \alpha + m(A \cap C^c).$$

On en déduit $m(A \cap C^c) \leq 0$ et donc $m^-(A) \in \mathbb{R}_+$.

Les applications m^+ et m^- sont des mesures finies (noter que $m^+(E) = m(E \cap C) < \infty$ et $m^-(E) = m(E \cap C^c) < \infty$). Elles sont étrangères car

$$m^+(C^c) = m(C^c \cap C) = m(\emptyset) = 0 \text{ et } m^-(C) = -m(C \cap C^c) = 0.$$

Enfin, pour tout $A \in T$, on a, par $\sigma-$additivité de m :

$$m(A) = m(A \cap C) + m(A \cap C^c) = m^+(A) - m^-(A).$$

Ceci termine la démonstration de l'existence de m^+ et m^-.

Pour montrer l'unicité de cette décomposition de m, on suppose que μ et ν sont deux mesures finies étrangères telles que $m = \mu - \nu$. Comme elle sont étrangères, il existe $D \in T$ tel que $\mu(D^c) = \nu(D) = 0$. On montre alors que, pour tout $A \in T$, on a nécessairement :

$$\mu(A) = \sup\{m(B);\ B \in T, B \subset A\}. \tag{2.11}$$

En effet, si $A \in T$ et $B \in T$, $B \subset A$, on a $m(B) = \mu(B) - \nu(B) \leq \mu(B) \leq \mu(A)$ (par positivité de ν et monotonie de μ). Puis, en prenant $B = A \cap D$, on a

$$m(B) = m(A \cap D) = \mu(A \cap D) - \nu(A \cap D) = \mu(A \cap D) = \mu(A) - \mu(A \cap D^c) = \mu(A).$$

Ceci prouve bien que (2.11) est vraie (et prouve que le sup est atteint pour $B = A \cap D$). L'égalité (2.11) donne donc de manière unique μ en fonction de m. L'unicité de ν découle alors du fait que $\nu = \mu - m$. ■

Remarque 2.34 Une conséquence de la proposition 2.33 est que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.8) est absolument convergente car (pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$) on a

$$\sum_{p=0}^{n} |m(A_p)| \leq \sum_{p=0}^{n} m^+(A_p) + \sum_{p=0}^{n} m^-(A_p) \leq m^+(E) + m^-(E) < \infty.$$

En fait, la définition 2.32 donne directement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ apparaissant dans (2.8) est commutativement convergente (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans $\mathbb{R}$, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Elle est donc absolument convergente (voir l'exercice 2.34). Nous verrons plus loin que cette équivalence entre les séries absolument convergentes et les séries commutativement convergentes est fausse pour des séries à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie.

2.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Il serait bien agréable, pour la suite du cours, de montrer l'existence d'une application λ, définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, telle que l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle, et qui vérifie les propriétés (4.1) et (4.2). Malheureusement, on peut montrer qu'une telle application n'existe pas (voir les exercices 2.29 et 2.28). Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (l'exercice 2.29 donne alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.35 (Carathéodory) *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ telle que $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Pour la partie "existence" de ce théorème, nous donnons dans cette section une démonstration due à Carathéodory. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^*(A)$ par :

$$\lambda^*(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}}\in E_A} \sum_{i=1}^{n} \ell(A_i),$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, et $\ell(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i. On peut montrer (voir l'exercice 2.28) que l'application λ^* ainsi définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure).

On montre toutefois dans cette section que la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue. L'existence de la mesure de Lebesgue peut aussi être démontrée en utilisant un théorème plus général (de F. Riesz) que nous verrons dans un chapitre ultérieur (théorème 5.6 page 195).

Après la définition de λ^* et la démonstration de propriétés de λ^*, on donne la démonstration de la partie existence du théorème de Carathéodory (voir page 45). La partie unicité du théorème de Carathéodory (voir page 47) peut être démontrée en utilisant la régularité des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Théorème 2.43, très utile dans la suite du cours) et d'un lemme classique sur les ouverts de $\mathbb{R}$ (lemme 2.44). Cette partie "unicité" peut aussi être démontrée, plus directement, en utilisant la proposition 2.31.

Définition 2.36 (Définition de λ^*) *Soit* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$*. On pose*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n); (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A\},$$

avec $E_A = \{(I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n =]a_n, b_n[,\ -\infty < a_n \le b_n < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$ *et* $\ell(I) = b - a$ *si* $I =]a, b[$, $-\infty < a \le b < +\infty$.

Proposition 2.37 (Propriétés de λ^*) *L'application* $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(définie dans la définition 2.36) vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$,

2. (Monotonie) $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$, *pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *tel que* $A \subset B$,

3. (σ−sous additivité) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *alors*

$$\lambda^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n),$$

4. $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $-\infty < a < b < +\infty$.

DÉMONSTRATION – On remarque tout d'abord que $\lambda^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (car $\lambda^*(A)$ est la borne inférieure d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Propriété 1. Pour montrer que $\lambda^*(\emptyset) = 0$, il suffit de remarquer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\emptyset$ avec $I_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $0 \le \lambda^*(\emptyset) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = 0$.

Propriété 2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \subset B$. On a $E_B \subset E_A$ et donc $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$.

Propriété 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sinon, l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in E_{A_n}$ telle que

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) \le \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que :

$$\lambda^*(A) \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}).$$

Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{\varphi(n)})$, où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie, voir le lemme 2.15 page 32). Avec le lemme 2.38 ci-dessous, on en déduit :

$$\lambda^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m})) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\lambda^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

Propriété 4. Pour montrer la quatrième propriété, on commence par montrer que

$$\lambda^*([a, b]) = b - a,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b. \tag{2.12}$$

Soit donc $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Comme $[a,b] \subset]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lambda^*([a,b]) \le b-a+2\varepsilon$. On en déduit $\lambda^*([a,b]) \le b-a$.
Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_{[a,b]}$. Par compacité de $[a,b]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[a,b] \subset \bigcup_{p=0}^{n} \mathrm{I}_p$.
On peut alors construire (par récurrence) $i_0, i_1, \ldots, i_q \in \{0,\ldots,n\}$ tels que $a_{i_0} < a$, $a_{i_{p+1}} < b_{i_p}$ pour tout $p \in \{0,\ldots,q-1\}$, $b < b_{i_q}$. On en déduit que

$$b-a < \sum_{p=0}^{q} b_{i_p} - a_{i_p} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_n) \text{ et donc } b-a \le \lambda^*([a,b]).$$

Ceci donne bien (2.12).
En remarquant que $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset]a,b[\subset [a,b]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, la monotonie de λ^* donne (avec (2.12)) que $\lambda^*(]a,b[) = b-a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. La monotonie de λ^* donne alors aussi que

$$\lambda^*([a,b[) = \lambda^*(]a,b]) = \lambda^*(]a,b[) = b-a \text{ pour tout } a,b \in \mathbb{R}, a < b$$

, et enfin que

$$l^*(]-\infty,a]) = \lambda^*(]-\infty,a[) = \lambda^*(]a,+\infty]) = \lambda^*([a,+\infty]) = +\infty \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

. ■

Lemme 2.38 (Double série à termes positifs) *Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{R}_+$. Alors on a :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}).$$

DÉMONSTRATION – On pose

$$\mathrm{A} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} \text{ et } \mathrm{B} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}),$$

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On rappelle que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{\varphi(p)}$.
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{0,\ldots,i\} \times \{0,\ldots j\} \subset \{\varphi(0),\ldots,\varphi(n)\}$. Comme $a_{n,m} \ge 0$ pour tout (n,m), on en déduit que

$$\mathrm{A} \ge \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \ge \sum_{n=0}^{i} (\sum_{m=0}^{j} a_{n,m})$$

et donc, en faisant tendre j puis i vers $+\infty$, que $\mathrm{A} \ge \mathrm{B}$. Un raisonnement similaire donne que $\mathrm{B} \ge \mathrm{A}$ et donc $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. ■

On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que λ^* est une mesure.

Définition 2.39 (Tribu de Lebesgue) *On pose $\mathcal{L} = \{\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda^*(\mathrm{A}) = \lambda^*(\mathrm{A}\cap\mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A}\cap\mathrm{E}^c)$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. On rappelle que λ^* est définie dans la définition 2.36 (et que $\mathrm{E}^c = \mathbb{R}\setminus\mathrm{E}$). Cet ensemble de parties de $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{L}$ s'appelle tribu de Lebesgue (on montre dans la proposition 2.42 que $\mathcal{L}$ est bien une tribu).*

Remarque 2.40 On peut avoir une première idée de l'intérêt de la définition 2.39 en remarquant qu'elle donne immédiatement l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$. En effet, soit $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \subset \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \emptyset$ et soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{E}_1 \in \mathcal{L}$ et on utilise la définition de $\mathcal{L}$ avec $\mathrm{A} \cap (\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2)$, on obtient (car $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \emptyset$) :

$$\begin{aligned}\lambda^*(\mathrm{A}\cap(\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2)) &= \lambda^*(\mathrm{A}\cap(\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2)\cap\mathrm{E}_1) + \lambda^*(\mathrm{A}\cap(\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2)\cap\mathrm{E}_1^c)\\ &= \lambda^*(\mathrm{A}\cap\mathrm{E}_1) + \lambda^*(\mathrm{A}\cap\mathrm{E}_2).\end{aligned}$$

Par récurrence sur n, on a donc aussi

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i),$$

dès que $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$, $A, E_n \subset \mathbb{R}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
En particulier, en prenant $A = \mathbb{R}$, on obtient l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_i),$$

si $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 2.41 Pour tout $E, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a, par $\sigma-$sous additivité de λ^*,

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.39), il suffit donc de montrer que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.42 (Propriétés de $\mathcal{L}$) *$\mathcal{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et $\lambda^*_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. $\mathcal{L}$ et λ^* sont définies dans les définitions 2.36 et 2.39.*

DÉMONSTRATION – Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par "passage au complémentaire". On sait aussi que $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de λ^* à $\mathcal{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Étape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union finie et que, si $n \geq 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{L}$ est telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors on a :

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i), \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$ en prenant $A = \mathbb{R}$, cette propriété d'additivité a déjà été signalée dans la remarque 2.40.)

Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ et de montrer la propriété (2.13) pour $n = 2$. Soit donc $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$, il suffit de montrer (voir la remarque 2.41) que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Par $\sigma-$sous additivité de λ^* on a

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Comme $E_2 \in \mathcal{L}$, on a

$$\lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Puis, comme $E_1 \in \mathcal{L}$, on a

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c).$$

On en déduit

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^*(A).$$

Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$.

Pour montrer (2.13) avec $n = 2$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) \\ &= \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) \\ &= \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2).\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathcal{L}$.) Ceci termine l'étape 1.

Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie.

Étape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de λ^* à $\mathcal{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition 2.42).

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On veut montrer que $E \in \mathcal{L}$. On commence par remarquer que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (2.13). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)) + \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c) \tag{2.14}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c). \tag{2.15}$$

En utilisant le fait que $E^c \subset (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c$ et la monotonie de λ^*, on a

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c) \geq \lambda^*(A \cap E^c).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (2.15) et en utilisant la $\sigma-$sous additivité de λ^*, on en déduit alors que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Ceci prouve que $E \in \mathcal{L}$ (voir remarque 2.41) et donc que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que λ^* est une mesure sur $\mathcal{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Par monotonie de λ^* on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(\bigcup_{p=0}^{n} E_p) \leq \lambda^*(E) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et donc, en utilisant l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (2.13) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^{n} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E)$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E).$$

D'autre part, $\lambda^*(E) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p)$, par $\sigma-$sous additivité de λ^*. On a donc

$$\lambda^*(E) = \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p).$$

Ceci prouve que $\lambda^*_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. ■

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "EXISTENCE" DU THÉORÈME *2.35* Pour montrer la partie "existence" du théorème 2.35, il suffit, grâce aux propositions 2.37 et 2.42, de montrer que $\mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.39) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de montrer que $]a,+\infty[\in \mathcal{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{E} =]a,+\infty[$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que

$$\lambda^*(\mathrm{A}) \ge \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c).$$

On peut supposer que $\lambda^*(\mathrm{A}) < +\infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^*(\mathrm{A})$, il existe $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_\mathrm{A}$ telle que $\lambda^*(\mathrm{A}) \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_n) - \varepsilon$. Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{E} \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}))$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c))$, la σ−sous additivité de λ^* donne

$$\lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c).$$

Comme $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}$ et $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition 2.37 donne $\lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) = \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E})$ et $\lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c) = \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c)$. On en déduit

$$\lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) + \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_n)$$

(car $\ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) + \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c) = \ell(\mathrm{I}_n)$) et donc $\lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c) \le \lambda^*(\mathrm{A}) + \varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $\mathrm{E} \in \mathcal{L}$. ■

On va maintenant démontrer un théorème important dont on peut déduire, en particulier, la partie "unicité" du théorème 2.35.

Théorème 2.43 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts) *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que m est finie sur les compacts, c'est-à-dire que $m(\mathrm{K}) < +\infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ (noter qu'un compact est nécessairement dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Alors, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tel que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \le \varepsilon$. En particulier, on a donc, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(\mathrm{A}) = \inf\{m(\mathrm{O}),\ \mathrm{O}$ ouvert contenant $\mathrm{A}\}$ et $m(\mathrm{A}) = \sup\{m(\mathrm{K}),\ \mathrm{K}$ compact inclus dans $\mathrm{A}\}$.*

DÉMONSTRATION – On appelle T l'ensemble des $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \le \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ceci donnera $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$. Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $\mathrm{A} =]a,b[$.

Pour tout $n \ge n_0$ avec n_0 tel que $(2/n_0) < b - a$ on a :

$$[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset \mathrm{A} \subset]a,b[.$$

Pour $n \ge n_0$, on pose $\mathrm{B}_n =]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[$). La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\ge n_0}$ est une suite décroissante et $\bigcap_{n\ge n_0} \mathrm{B}_n = \emptyset$. Comme m est finie sur les compacts, on a $m(\mathrm{B}_n) \le m([a,b]) < +\infty$. En utilisant la continuité décroissante de m (proposition 2.27), on a donc :

$$m(]a,b[\setminus[a + (\frac{1}{n}), b - \frac{1}{n}]) = m(]a, a + \frac{1}{n})[\cup]b - \frac{1}{n}, b[) = m(\mathrm{B}_n) \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ en prenant n assez grand on a $m(\mathrm{B}_n) \le \varepsilon$. En prenant $\mathrm{O} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{F} = [a + (1/n), b - (1/n)]$, on a bien O ouvert, F fermé, $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \le \varepsilon$, ce qui prouve que $]a,b[\in \mathrm{T}$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in \mathrm{T}$ (il suffit de prendre $\mathrm{F} = \mathrm{O} = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, on a $\mathrm{O}^c \subset \mathrm{A}^c \subset \mathrm{F}^c$ et $\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{O}^c = \mathrm{O} \setminus \mathrm{F}$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ et $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. On veut montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(\mathrm{A}) < +\infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(\mathrm{A}) = +\infty$.

Premier cas. On suppose que $m(\mathrm{A}) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé tel que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{A}_n \subset \mathrm{O}_n$ et $m(\mathrm{O}_n \setminus \mathrm{F}_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose

$$\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{O}_n \text{ et } \tilde{\mathrm{F}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n.$$

On a $\tilde{\mathrm{F}} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, $m(\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) \leq 2\varepsilon$, car $(\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{O}_n \setminus \mathrm{F}_n)$, et O ouvert mais $\tilde{\mathrm{F}}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(\mathrm{A}) < +\infty$, on a aussi $m(\tilde{\mathrm{F}}) < +\infty$. Par continuité croissante de m (appliquée à la suite $(\bigcup_{p=0}^n \mathrm{F}_p)_{n\in\mathbb{N}}$), on a $m(\bigcup_{p=0}^n \mathrm{F}_p) \to m(\tilde{\mathrm{F}})$, quand $n \to +\infty$, d'où (puisque $m(\tilde{\mathrm{F}}) < +\infty$) $m(\tilde{\mathrm{F}}) - m(\bigcup_{p=0}^n \mathrm{F}_p) \to 0$. On prend alors $\mathrm{F} = \bigcup_{p=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_p$ avec N assez grand pour que $m(\tilde{\mathrm{F}} \setminus \mathrm{F}) = m(\tilde{\mathrm{F}}) - m(\mathrm{F}) \leq \varepsilon$. On a bien $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, O ouvert, F fermé et, comme $(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) = (\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) \cup (\tilde{\mathrm{F}} \setminus \mathrm{F})$, on a $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) = m(\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) + m(\tilde{\mathrm{F}} \setminus \mathrm{F}) \leq 3\varepsilon$, ce qui prouve que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(\mathrm{A}) = +\infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{\mathrm{F}}) = +\infty$). On raisonne en trois étapes :

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On remarque d'abord que $\mathrm{A}_n \cap [p, p+1[\in \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé tel que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A}_n \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc :
$$\mathrm{F}_k = \mathrm{F} \cap [p, p+1-\frac{1}{k}] \subset \mathrm{A}_n \cap [p, p+1[\subset \mathrm{O}_k = \mathrm{O} \cap]p - \frac{1}{k}, p+1[.$$
On a F_k fermé, O_k ouvert et $(\mathrm{O}_k \setminus \mathrm{F}_k) \subset (\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \cup]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[$. On en déduit :
$$m(\mathrm{O}_k \setminus \mathrm{F}_k) \leq \varepsilon + m(]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[).$$
Or la continuité décroissante de m donne que $m((]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[) \to 0$ quand $k \to +\infty$ (on utilise ici le fait que $m([p-1, p+1]) < +\infty$ car m est finie sur les compacts). Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m(\mathrm{O}_k \setminus \mathrm{F}_k) \leq 2\varepsilon$, ce qui donne bien que $\mathrm{A}_n \cap [p, p+1[\in \mathrm{T}$.
2. Comme $m(\mathrm{A} \cap [p, p+1[) < +\infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $\mathrm{A} \cap [p, p+1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \cap [p, p+1[)$. Il donne que $\mathrm{A} \cap [p, p+1[\in \mathrm{T}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
3. On montre enfin que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_p et un fermé G_p tel que $\mathrm{G}_p \subset \mathrm{A} \cap [p, p+1[\subset \mathrm{O}_p$ et $m(\mathrm{O}_p \setminus \mathrm{G}_p) \leq \varepsilon/(2^{|p|})$. On prend $\mathrm{O} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{O}_p$ et $\mathrm{F} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}_p$. On obtient $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq 3\varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{F}$ tel que $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to +\infty$. On veut montrer que $x \in \mathrm{F}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]p-1, p+1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in]p-1, p+1[$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $x_n \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}_q$ et que $\mathrm{G}_q \subset [q, q+1[$ pour tout q, on a donc $x_n \in \mathrm{G}_p \cup \mathrm{G}_{p-1}$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $\mathrm{G}_p \cup \mathrm{G}_{p-1}$ est fermé, on en déduit que $x \in \mathrm{G}_p \cup \mathrm{G}_{p-1} \subset \mathrm{F}$ et donc que F est fermé.

   Ceci montre bien que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que $m(\mathrm{A}) = \inf\{m(\mathrm{O}), \text{O ouvert contenant A}\}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque d'abord que la monotonie d'une mesure donne

$$m(\mathrm{A}) \leq \inf\{m(\mathrm{O}), \text{O ouvert contenant A}\}.$$

Puis, l'inégalité inverse est immédiate si $m(\mathrm{A}) = +\infty$. Enfin, si $m(\mathrm{A}) < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe O ouvert et F fermé vérifiant $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$. On a donc $\mathrm{O} \setminus \mathrm{A} \subset \mathrm{O} \setminus \mathrm{F}$ et donc (par monotonie de m)

$$m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A}) \leq \varepsilon \text{ et } m(\mathrm{O}) = m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A}) \leq m(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

On a donc trouvé un ouvert O contenant A tel que $m(\mathrm{O}) - \varepsilon \leq m(\mathrm{A})$. On en déduit que $\inf\{m(\mathrm{O}), \text{O ouvert contenant A}\} \leq m(\mathrm{A})$ et finalement que $m(\mathrm{A}) = \inf\{m(\mathrm{O}), \text{O ouvert contenant A}\}$.

De manière semblable, on montre aussi que $m(\mathrm{A}) = \sup\{m(\mathrm{K}), \text{K compact}, \mathrm{K} \subset \mathrm{A}\}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ici aussi, on commence par remarquer que la monotonie d'une mesure donne

$$m(\mathrm{A}) \geq \sup\{m(\mathrm{K}), \text{K compact}, \mathrm{K} \subset \mathrm{A}\}.$$

On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F fermé tel que $F \subset A$ et $m(A \setminus F) \leq \varepsilon$. Si $m(A) = +\infty$, on en déduit que $m(F) = +\infty$ et donc que $m(K_n) \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$ (par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n, n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\sup\{m(K), K \text{ compact inclus dans } A\} = +\infty = m(A).$$

Si $m(A) < +\infty$, on a $m(A) \geq m(F) \geq m(A) - \varepsilon$ et donc, pour n assez grand (toujours par continuité croissante de m),

$$m(K_n) \geq m(F) - \varepsilon \geq m(A) - 2\varepsilon \text{ avec } K_n = F \cap [-n, n].$$

Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que ε est arbitraire, on en déduit que $\sup\{m(K)$, K compact inclus dans $A\} \geq m(A)$ et donc, finalement,

$$m(A) = \sup\{m(K), K \text{ compact}, K \subset A\}.$$

■

Pour démontrer la partie "unicité" du théorème 2.35 avec le théorème 2.43 on a aussi besoin du petit lemme suivant (différent du lemme 2.11 car dans le lemme 2.44 on demande que les intervalles ouverts soient disjoints et on ne demande plus qu'ils soient bornés).

Lemme 2.44 (Ouverts de $\mathbb{R}$) *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}$*, alors* O *est une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux, c'est-à-dire qu'il existe* $(I_n)_{n\in J}$ *tel que* $J \subset \mathbb{N}$, I_n *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *pour tout* n, $I_n \cap I_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *et* $O = \bigcup_{n\in J} I_n$.

DÉMONSTRATION – Pour $x \in O$ on pose

$$O_x = \{y \in O; I(x,y) \subset O\}, \text{ avec } I(x,y) = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\}$$

(on a donc $I(x,y) = [x,y]$ ou $[y,x]$). On remarque que $O = \bigcup_{x\in O} O_x$ et que O_x est, pour tout $x \in O$, un intervalle ouvert (c'est l'intervalle $]\inf O_x, \sup O_x[$, avec $\inf O_x$, $\sup O_x \in \overline{\mathbb{R}}$). Il est aussi facile de voir que, pour tous x, $y \in O$, $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ implique que $O_x = O_y$. On peut trouver $A \subset O$ tel que $O = \bigcup_{x\in A} O_x$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$ si x, $y \in A$, $x \neq y$. Comme $O_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$, on peut donc construire une application de A dans $\mathbb{Q}$ en choisissant pour chaque $x \in A$ un rationnel de O_x (ce qui est possible car tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel). Cette application est injective car

$$O_x \cap O_y = \emptyset \text{ si } x, y \in A, x \neq y.$$

L'ensemble A est donc au plus dénombrable, ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Remarque 2.45 Dans la démonstration du lemme 2.44, O_x est la composante connexe de x. Le lemme 2.44 consiste donc à remarquer qu'un ouvert est réunion de ses composantes connexes, que celles ci sont disjointes deux à deux et sont des ouverts connexes et donc des intervalles ouverts (car un connexe dans $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle).

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "UNICITÉ" DU THÉORÈME *2.35*

On a construit une mesure, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supposons que m soit aussi une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On veut montrer que $\lambda = m$ (sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Nous le montrons ici avec deux méthodes différentes, utilisant le théorème 2.43 ou la proposition 2.31.

Première méthode, avec le théorème 2.43 sur la régularité d'une mesure finie sur les compacts. En utilisant le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44) et les propriétés de σ−additivité de λ et de m, on montre que $\lambda(O) = m(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m et pour λ, car m et λ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts), on obtient $\lambda(A) = m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *i.e.* $m = \lambda$.

Deuxième méthode, avec la proposition 2.31. On utilise la proposition 2.31 avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{C} = \{]a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b\}$. On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. On prend maintenant

$F_n =]n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La famille $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, on a, par continuité décroissante de m,

$$\begin{aligned} m(]a,b]) &= \lim_{p\to+\infty} m(]a, b+\frac{1}{p}[) \\ &= \lim_{p\to+\infty} (b-a+\frac{1}{p}) \\ &= b-a \\ &= \lambda(]a,b]). \end{aligned}$$

On a donc $m = \lambda$ sur $\mathcal{C}$ (et $m(F_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$). On peut donc appliquer la proposition 2.31. Elle donne $\lambda = m$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.46 Nous avons vu que la mesure de Lebesgue, notée λ, est régulière. Ceci ne donne pas, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'égalité de la mesure de A avec la mesure de son intérieur ou de son adhérence. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre, par exemple, $A = \mathbb{Q}$. On a alors $\lambda(A) = 0$ (voir la remarque 2.49) et $\lambda(\overline{A}) = +\infty$.

Remarque 2.47 Nous avons donc, dans cette section, construit une application, notée λ^*, de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette application n'est pas une mesure mais nous avons montré que la restriction de λ^* à la tribu de Lebesgue, notée $\mathcal{L}$, est une mesure. Puis, nous avons démontré que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ et obtenu ainsi, en prenant la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la mesure que nous cherchions. On peut se demander toutefois quelle est la différence entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Du point de vue des cardinaux, cette différence est considérable car $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ alors que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ mais du point de vue de l'intégration, la différence est dérisoire, comme nous pourrons le voir avec l'exercice 4.19 (plus complet que l'exercice 2.33) car l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda^*_{|\mathcal{L}})$ est simplement le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})})$.

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.48 (Invariance par translation "généralisée") *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Pour* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *on note* $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$. *On a alors :*

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *implique* $\alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

2. $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\alpha = 1$, *cette propriété s'appelle* "invariance par translation de λ".

DÉMONSTRATION – Pour la première partie de la proposition, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On montre facilement que T est une tribu contenant les intervalles ouverts, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour la deuxième partie, on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_1(A) = \lambda(\alpha A + \beta)$ et $m_2(A) = |\alpha|\lambda(A)$. Il est facile de voir que m_1 et m_2 sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les bornés, et qu'elles sont égales sur l'ensemble des intervalles ouverts. On raisonne alors comme dans la démonstration de la partie "unicité" du théorème 2.35, en utilisant le théorème 2.43 ou la proposition 2.31. Par exemple, en utilisant le lemme 2.44 et les propriétés de $\sigma-$additivité de m_1 et de m_2, on montre que $m_1(O) = m_2(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m_1 et pour m_2), on obtient $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.49 La mesure de Lebesgue est diffuse (c'est-à-dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$. Ainsi,

$$\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit "ensemble de Cantor", K, qui est une partie compacte non dénombrable de [0,1], vérifiant $\lambda(K) = 0$, voir exercice 2.32).

Définition 2.50 (Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(ou, plus généralement,* $\mathrm{I} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $\mathrm{T} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \mathrm{B} \subset \mathrm{I}\}$ *(on peut montrer que* $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathrm{I})$*, où* I *est muni de la topologie induite par celle de* $\mathbb{R}$*, voir l'exercice 2.3 page 54). Il est facile de voir que* T *est une tribu sur* I *et que la restriction de* λ *(définie dans le théorème 2.35) à* T *est une mesure sur* T*, donc sur les boréliens de* I *(voir l'exercice 2.17 page 66). On note toujours par* λ *cette mesure.*

2.6 Indépendance et probabilité conditionnelle

2.6.1 Probabilité conditionnelle

Commençons par expliquer la notion de probabilité conditionnelle sur l'exemple du lancer de dé. On se place dans le modèle équiprobable : soient $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathrm{T} = \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et p la probabilité définie par $p(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in \mathrm{E}$. La probabilité de l'événement A “obtenir 6” est $\frac{1}{6}$. Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la chance d'obtenir un 6, alors que l'on sait déjà que le résultat est pair (événement $\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$). Intuitivement, on a envie de dire que la “chance” d'obtenir un 6 est alors $\frac{1}{\mathrm{card B}} = \frac{1}{3}$.

Définition 2.51 (Probabilité conditionnelle) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé et* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$.

Si $p(\mathrm{B}) \neq 0$ *la probabilité conditionnelle de* A *par rapport à* B *(on dit aussi probabilité de* A *par rapport à* B*), notée* $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$*, est définie par* $p(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$.

Si $p(\mathrm{B}) = 0$ *la probabilité conditionnelle de* A *par rapport à* B*, notée* $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$*, n'est pas définie. C'est un nombre arbitraire entre* 0 *et* 1.

De cette définition on déduit la formule de Bayes : soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$, alors :

$$p(\mathrm{B})p(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \tag{2.16}$$

Remarque 2.52 Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $p(\mathrm{A}) \neq 0$. Alors l'application $p_{\mathrm{A}} : \mathrm{T} \to [0, 1]$ définie par :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}, \forall \mathrm{B} \in \mathrm{T}$$

est une probabilité sur T. On dit que “la masse de p_{A} est concentrée en A” : on a en effet : $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$, pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$. On a aussi $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1$.

Remarque 2.53 *Voici un corollaire immédiat de la relation 2.16. Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *est un espace probabilisé et* $(\mathrm{C}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *une partition de* E *telle que* $p(\mathrm{C}_n) \neq 0$*. On a alors, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$,

$$p(\mathrm{A}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(\mathrm{C}_n) p(\mathrm{A}|\mathrm{C}_n).$$

2.6.2 Evénements indépendants, tribus indépendantes

Définition 2.54 (Indépendance de deux événements) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé. On dit que deux événements* A *et* B *sont indépendants si* $p(A)p(B) = p(A \cap B)$.

Remarque 2.55 Lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, il y a des événements qui semblent *a priori* indépendants, c'est-à-dire que la réalisation de l'un semble n'avoir aucune influence sur la réalisation de l'autre. On choisira alors, pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte cette indépendance. Attention toutefois, pour une probabilité p donnée, deux événements peuvent être indépendants alors qu'ils ne paraissent pas intuitivement indépendants, voir à ce sujet l'exercice 9.14 page 409 sur les variables aléatoires indépendantes.

Exemple 2.56 Prenons comme exemple le lancer simultané de deux dés : *a priori*, il parait raisonnable de supposer que les résultats obtenus pour chacun des deux dés n'influent pas l'un sur l'autre, et on va donc chercher une probabilité qui respecte cette indépendance. L'univers des possibles est ici

$$E = \{(i, j), 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\}.$$

Les résultats de chaque lancer simultané des deux dés étant équiprobables, on a donc envie de définir, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $p(A) = \frac{\operatorname{card} A}{36}$. Voyons maintenant si deux événements *a priori* indépendants sont indépendants pour cette probabilité. Considérons par exemple l'événement A : "obtenir un double 6" ; on peut écrire : $A = B \cap C$, où B est l'événement "obtenir un 6 sur le premier dé" et C l'événement "obtenir un 6 sur le deuxième dé". On doit donc vérifier que : $p(A) = p(B)p(C)$. Or $B = \{(6, j), 1 \le j \le 6\}$ et $C = \{(i, 6), 1 \le i \le 6\}$. On a donc $p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$, et on a bien $p(A) = p(B)p(C)(= \frac{1}{36})$.

On généralise la notion d'indépendance de deux événements en introduisant la notion d'indépendance de tribus.

Définition 2.57 (Indépendance des tribus) *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de tribus incluses dans* T.

1. *Soit* $N > 1$. *On dit que les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes (on dit aussi que la suite* $T_1, \ldots, T_N$ *est indépendante) si pour toute famille* $(A_1, \ldots, A_N)$ *d'événements tels que* $A_k \in T_k$ *pour* $k = 1, \ldots, N$ *on a :* $p(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = p(A_1)p(A_2) \ldots p(A_N)$.
2. *On dit que la suite* $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *est indépendante (ou que les tribus* $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ *sont indépendantes) si pour tout* $N \ge 1$, *les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes.*

On peut facilement remarquer que si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé (E, T, p), ils sont indépendants (au sens de la définition 2.54) si et seulement si les tribus $T_A = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ et $T_B = \{\emptyset, E, B, B^c\}$ sont indépendantes (voir l'exercice 3.19). On en déduit la généralisation de la définition d'indépendance à plusieurs événements :

Définition 2.58 (Evénements indépendants) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *des événements, on dit que les* N *événements* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *sont indépendants si les* N *tribus engendrées par les événements* A_k, $k = 1\ldots, N$ *(c'est-à-dire les* N *tribus définies par* $T_k = \{A_k, A_k^c, E, \emptyset\}$ *pour* $k = 1\ldots, N$*) sont indépendantes.*

Sous les hypothèses de la définition précédente, on peut remarquer que les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendants, c'est-à-dire que les tribus engendrées par $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendantes) si et seulement si

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1, \ldots, N\},$$

voir l'exercice 3.19. Nous terminons ce paragraphe par une proposition sur les tribus indépendantes :

Proposition 2.59 *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,...N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *La tribu* T_0 *est alors indépendante de la tribu engendrée par les tribus* $T_1, \ldots, T_N$.
2. *(Généralisation) Soit* $N > 1$, $q > 1$, $n_0, \ldots, n_q$ *tel que* $n_0 = 0$, $n_i \leq n_{i+1}$ *(pour* $i = 0, \ldots, q-1$*),* $n_q = N$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,...N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *Pour* $i = 1, \ldots, q$, *on note* τ_i *la tribu engendrée par les tribus* T_n *pour* $n = n_{i-1}, \ldots, n_i$. *Alors, les tribus* $\tau_1, \ldots, \tau_q$ *sont indépendantes.*

DÉMONSTRATION – On montre tout d'abord le premier item de la proposition. On note S la tribu engendrée par les tribus $T_1, \ldots, T_N$. Comme S est la plus petite tribu contenant les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle est incluse dans T. On veut montrer que T_0 et S sont indépendantes, c'est-à-dire que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $A \in T_0$ et tout $B \in S$. Pour le montrer, on va utiliser la proposition 2.31 (donnant l'unicité d'une mesure). Soit $A \in T_0$, on définit les mesures m et μ sur T en posant :

$$m(B) = p(A \cap B),\ \mu(B) = p(A)p(B),\ \text{pour } B \in T,$$

et on pose :

$$\mathcal{C} = \{\bigcap_{k=1}^{N} A_k,\ A_k \in T_k \text{ pour } k = 1, \ldots, N\}.$$

Pour $B \in \mathcal{C}$, on a $B = \bigcap_{k=1}^{N} A_k$ avec $A_k \in T_k$ avec $k = 1, \ldots, N$. On a donc, en utilisant l'indépendance des tribus T_0, $T_1, \ldots, T_N$,

$$m(B) = p(A \cap B) = p(A)p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N) = p(A)p(B) = \mu(B).$$

On a donc $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection et que $E \in \mathcal{C}$, la proposition 2.31 nous donne $m = \mu$ sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme cette tribu contient toutes les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle contient aussi S (en fait, elle est égale à S). On a donc bien montré que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $B \in S$ et pour tout $A \in T_0$.

Pour montrer le deuxième item (qui est une généralisation du premier), il suffit de faire une récurrence finie de q étapes et d'utiliser la technique précédente. Par exemple, pour $q = 2$ la technique précédente donne :

$$p((\bigcap_{k=0}^{n_1} A_k) \cap B_2) = p(\bigcap_{k=0}^{n_1} A_k)p(B_2),$$

pour $A_k \in T_k$, $k = 0, \ldots, n_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Puis en reprenant la technique précédente, on montre $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)p(B_2)$ pour $B_1 \in \tau_1$ et $B_2 \in \tau_2$, ce qui donne bien l'indépendance de τ_1 et τ_2. ■

2.6.3 Probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$

Une probabilité est définie sur un espace probabilisable. Très souvent, on ne connaît du problème aléatoire que l'on cherche à modéliser ni l'ensemble E ("univers des possibles") ni la tribu T (ensemble des événements) ni la probabilité p. Par contre, on connaît une "image" de la probabilité p par une application (dite mesurable, voir chapitre suivant) X de E dans $\mathbb{R}$. On travaille alors avec l'espace beaucoup plus sympathique (car mieux défini...) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, ou p_X est une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que les probabilistes appellent "loi de probabilité" (elle dépend de p et de l'application X).
Nous donnons maintenant quelques notions propres aux lois de probabilités (ou probabilités définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$), ainsi que quelques exemples concrets utilisés dans la représentation de phénomènes aléatoires.

Théorème 2.60 (Fonction de répartition) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de la probabilité p la fonction* F, *définie de $\mathbb{R}$ dans* $[0, 1]$ *par :* $F(t) = p(]-\infty, t])$.

La fonction F *est croissante et continue à droite. De plus, on a* $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$.

DÉMONSTRATION – La croissance de F est une conséquence de la monotonie de p (proposition 2.27). En effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On a $]-\infty, a[\subset]-\infty, b[$ et donc, par monotonie de p, $F(a) = p(]-\infty, a[) \le p(]-\infty, b[) = F(b)$, ce qui montre bien la croissance de F.

Pour montrer que F est continue à droite, on utilise la continuité décroissante de p (proposition 2.27). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \downarrow a$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$). On remarque que

$$]-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, a_n],\ ]-\infty, a_{n+1}] \subset]-\infty, a_n] \text{ et } p(]-\infty, a_n]) < +\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité décroissante de p donne alors

$$F(a_n) = p(]-\infty, a_n]) \to p(]-\infty, a]) = F(a) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci montre la continuité à droite de F.

Pour montrer que $\lim_{a\to+\infty} F(a) = 1$, on utilise la continuité croissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \uparrow +\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \ge a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \to +\infty$). On pose $A_n =]-\infty, a_n]$. On a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. Par continuité croissante de p (Proposition 2.27), on a donc

$$F(a_n) = p(A_n) \to p(\mathbb{R}) = 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci prouve que $\lim_{a\to+\infty} F(a) = 1$.

Pour montrer que $\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0$, on utilise la continuité décroissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \downarrow -\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$). On pose $B_n =]-\infty, a_n]$. On a $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(B_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Par continuité décroissante de p (Proposition 2.27), on a donc

$$F(a_n) = p(B_n) \to p(\emptyset) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci prouve que $\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0$. ■

Le théorème 2.60 a une réciproque que nous énonçons dans le théorème 2.61.

Théorème 2.61 (Fonction de répartition et probabilité) *Soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante, continue à droite et telle que*

$$\lim_{t\to-\infty}, F(t) = 0 \textit{ et } \lim_{t\to+\infty} F(t) = 1.$$

Alors, il existe une unique probabilité p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que F *soit la fonction de répartition de p.*

La démonstration du théorème 2.61 n'est pas faite ici car ce théorème est essentiellement contenu dans le théorème 2.62 que nous donnons maintenant.

Théorème 2.62 (Lebesgue-Stieltjes)

1. *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (on dit "localement finie"). Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction* F *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = m(]a, t])$ *si* $t \ge a$ *et* $F(t) = -m(]t, a])$ *si* $t \le a$*. Alors, la fonction* F *est continue à droite et croissante.*
2. *Réciproquement, soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante et continue à droite. Alors,il existe une unique mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \le b$, on ait* $m(]a, b]) = F(b) - F(a)$*. Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à* F.

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item est essentiellement la même que celle de la proposition 2.60. Elle n'est pas détaillée ici.

Pour démontrer le deuxième item, on introduit l, application définie de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$) par : $l(]a,b]) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. La démonstration du fait qu'il existe un prolongement unique de cette application en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est très voisine à celle du théorème de Carathéodory (théorème 2.35). Elle n'est pas détaillée ici. ■

Donnons, pour clore ce chapitre, quelques exemples de lois de probabilités, c'est-à-dire de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$, et leurs fonctions de répartition associées.

Définition 2.63 (Loi de probabilité discrète) *Soit p une loi de probabilité. On dit que p est discrète si elle est purement atomique. L'ensemble de ses atomes $\mathcal{A}$ est nécessairement dénombrable (voir l'exercice 2.23). La probabilité p s'écrit alors*

$$p = \sum_{a \in \mathcal{A}} p(\{a\})\delta_a,$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac en a., définie par (2.2) *La fonction de répartition de la probabilité p est définie par :*

$$\mathrm{F}(t) = \sum_{a \in \mathcal{A}, a \leq t} p(\{a\}).$$

Exemple 2.64 (Exemples de lois discrètes) *Donnons quelques exemples de probabilités discrètes, p, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}$ l'ensemble (dénombrable) de leurs atomes.*

- *La loi uniforme discrète :* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_\mathrm{N}\}$, $p(\{a_i\}) = \dfrac{1}{\mathrm{N}}$
- *La loi binomiale :* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$, $\mathrm{P} \in]0,1[$, $p(\{k\}) = \mathrm{C}_\mathrm{N}^k \mathrm{P}^k (1-\mathrm{P})^{\mathrm{N}-k}$
- *La loi de Pascal :* $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\mathrm{P} \in]0,1[$, $p(\{k\}) = \mathrm{P}(1-\mathrm{P})^{k-1}$
- *La loi de Poisson à paramètre λ :* $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $p(\{k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

Définition 2.65 (Loi continue) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que p est continue si sa fonction de répartition est continue.*

Exemple 2.66 (Exemple de loi continue) La plupart des exemples de probabilités continues provient de ce qu'on appelle les mesures de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, pour lesquelles on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qu'on n'a pas encore introduite. On peut toutefois déjà citer l'exemple de la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: Soient $-\infty < a < b < +\infty$; pour $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\lambda(\mathrm{A} \cap [a,b])}{b-a}.$$

On vérifie facilement que p est une probabilité appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

2.7 Exercices

2.7.1 Tribus

Exercice 2.1 (Caractérisation d'une tribu) Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et telle que $\emptyset \in \mathrm{T}$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.

   Corrigé – *On a bien* $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ *car* $\mathrm{E} = \emptyset^c$ *et* T *stable par passage au complémentaire. Il reste à montrer que* T *est stable par intersection dénombrable. Soit* $(\mathrm{A}_n) \subset \mathrm{T}$, *on a* $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n^c \in \mathrm{T}$ *(car* T *est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ *(car* T *est stable par passage au complémentaire).*

2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

   Corrigé – *Si* E *est fini, l'ensemble des parties finies de* E *est une tribu, c'est la tribu* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.
   Si E *est infini, l'ensemble des parties finies de* E *n'est pas une tribu. Il suffit par exemple de remarquer que* E *n'est pas une partie finie (et une tribu sur* E *contient toujours* E *comme élément).*

Exercice 2.2 (Tribu engendrée) Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

   Corrigé – *Soit* $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de tribus sur* I *(*I *est un ensemble quelconque). On pose* $\mathrm{T} = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E}\,;\, \mathrm{A} \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}\}$ *(*T *est bien l'intersection des tribus* T_i, $i \in \mathrm{I}$*). On montre que* T *est une tribu :*

   (a) On a $\emptyset \in \mathrm{T}$ *car* $\emptyset \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$.

   (b) On remarque que T *est stable par passage au complémentaire car, si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{T}$, *on a* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *et donc* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *(car* T_i *est stable par passage au complémentaire), donc* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}$.

   (c) On remarque enfin que T *est stable par union dénombrable car, si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$, *on a* $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *(car* T_i *est stable par union dénombrable), donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

   D'après l'exercice 2.1, on en déduit que T *est une tribu.*

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$. On note $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(\mathrm{E})$). Montrer que $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

   Corrigé – *D'après la question précédente,* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ *est bien une tribu. La définition de* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ *donne que toute tribu contenant* $\mathcal{A}$ *doit contenir* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$. $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ *est donc la plus petite tribu contenant* $\mathcal{A}$.

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathrm{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{T}_{\mathcal{B}}$.

   Corrigé – $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{B}$, *donc contenant* $\mathcal{A}$. *Donc* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{T}_{\mathcal{B}}$.

Exercice 2.3 (Exemples de tribus)

1. Tribu trace

   (a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Montrer que $\mathcal{T}_\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{F},\, \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

   Corrigé –

   i. $\emptyset \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$ *car* $\emptyset = \emptyset \cap \mathrm{F}$ *et* $\emptyset \in \mathcal{T}$.

   ii. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$. *Il existe* $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$ *tel que* $\mathrm{A} = \mathrm{B} \cap \mathrm{F}$. *On a donc* $\mathrm{F} \setminus \mathrm{A} = (\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}) \cap \mathrm{F} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$ *car* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est donc stable par passage au complémentaire.*

iii. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_\mathrm{F}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{F}$*. On a donc*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) \cap \mathrm{F} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$$

car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{T}$*.* $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est donc stable par union dénombrable.*

Ceci est suffisant pour dire que $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est une tribu sur* F.

(b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathrm{E})$ ($\mathcal{B}(\mathrm{E})$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée $\mathcal{T}_\mathrm{F}$, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(\mathrm{F})$). [Montrer que $\mathcal{B}(\mathrm{F}) \subset \mathcal{T}_\mathrm{F}$. Pour montrer que $\mathcal{T}_\mathrm{F} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$, considérer $\mathcal{C} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E});\ \mathrm{A} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

Corrigé – *On note* $\mathcal{O}_\mathrm{F}$ *l'ensemble des ouverts de* F*, et* $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ *l'ensemble des ouverts de* E*. Par définition de la topologie trace,* $\mathcal{O}_\mathrm{F} = \{\mathrm{O} \cap \mathrm{F},\ \mathrm{O} \in \mathcal{O}_\mathrm{E}\}$.

Comme $\mathcal{O}_\mathrm{E} \subset \mathcal{B}(\mathrm{E})$*, on a* $\mathcal{O}_\mathrm{F} \subset \mathcal{T}_\mathrm{F} = \{\mathrm{B} \cap \mathrm{F},\ \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})\}$ *(Noter que* $\mathcal{T}_\mathrm{F} = \mathcal{B}(\mathrm{E})_\mathrm{F}$*, avec les notations de la question précédente). On en déduit que* $\mathcal{B}(\mathrm{F}) \subset \mathcal{T}_\mathrm{F}$ *car* $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est une tribu sur* F *contenant* $\mathcal{O}_\mathrm{F}$ *qui engendre* $\mathcal{B}(\mathrm{F})$.

On montre maintenant que $\mathcal{T}_\mathrm{F} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$*. On pose* $\mathcal{C} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E});\ \mathrm{A}\cap\mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$*.* $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset\cap\mathrm{F} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$*.* $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car, si* $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$*, on a* $(\mathrm{E}\setminus\mathrm{A})\cap\mathrm{F} = \mathrm{F}\setminus\mathrm{A} = \mathrm{F}\setminus(\mathrm{A}\cap\mathrm{F}) \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$*, donc* $(\mathrm{E}\setminus\mathrm{A}) \in \mathcal{C}$*. Enfin, pour montrer que* $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable, soit* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$*, on a* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \cap \mathrm{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{F}) \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$*, ce qui donne* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{C}$ *et la stabilité de* $\mathcal{C}$ *par union dénombrable.* $\mathcal{C}$ *est donc une tribu. Il est clair que* $\mathcal{O}_\mathrm{E} \subset \mathcal{C}$ *car si* $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_\mathrm{E}$*, on a* $\mathrm{O} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{O}_\mathrm{F} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$*. La tribu* $\mathcal{C}$ *contient* $\mathcal{O}_\mathrm{E}$*, ce qui prouve que* $\mathcal{C}$ *contient* $\mathcal{B}(\mathrm{E})$ *et donc que* $\mathrm{A} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$*. Ceci donne exactement* $\mathcal{T}_\mathrm{F} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$*. On a bien montré finalement que* $\mathcal{T}_\mathrm{F} = \mathcal{B}(\mathrm{F})$ *(on rappelle que* $\mathcal{T}_\mathrm{F} = \mathcal{B}(\mathrm{E})_\mathrm{F}$*, avec les notations de la question précédente).*

On suppose maintenant que F *est un borélien de* E*, c'est-à-dire que* $\mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$*. On a alors* $\mathcal{T}_\mathrm{F} \subset \mathcal{B}(\mathrm{E})$ *(car* $\mathrm{A}\cap\mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$ *si* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$*). Puis, soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$ *tel que* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$*, on peut écrire* $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mathrm{F}$*, donc* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$*. On a bien montré que* $\mathcal{T}_\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{F}\,;\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})\}$.

2. Soit E un ensemble infini et $\mathrm{S} = \{\{x\}, x \in \mathrm{E}\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

Corrigé – *On note* T(S) *la tribu engendrée par* S.

On suppose que E *est au plus dénombrable (c'est-à-dire dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de* T(S) *par union dénombrable, la tribu* T(S) *doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de* E *sont au plus dénombrables, on en déduit* $\mathrm{T(S)} = \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

On suppose maintenant que E *est infini non dénombrable. On note* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des parties de* E *au plus dénombrables et* $\mathcal{B} = \{\mathrm{A}^c,\ \mathrm{A} \in \mathcal{A}\}$*. D'après la stabilité de* T(S) *par union dénombrable, la tribu* T(S) *doit contenir* $\mathcal{A}$*. Par stabilité de* T(S) *par passage au complémentaire,* T(S) *doit aussi contenir* $\mathcal{B}$.

On va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est une tribu (on en déduit que* $\mathrm{T(S)} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*). On a* $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *et il est clair que* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est stable par passage au complémentaire (car* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ *implique* $\mathrm{A}^c \in \mathcal{B}$ *et* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ *implique* $\mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$*). Enfin, si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*, on distingue 2 cas :*

1er cas. Si $\mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

2ème cas. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{A}_n \in \mathcal{B}$ *on a alors* $\mathrm{A}_n^c \in \mathcal{A}$*, donc* A_n^c *est au plus dénombrable et* $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_p)^c = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_p^c \subset \mathrm{A}_n^c$ *est aussi au plus dénombrable,ce qui donne* $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_p)^c \in \mathcal{A}$ *et* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

On a bien montré que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*, ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*. Finalement,* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est donc une tribu contenant* S *et contenu dans* T(S)*, ceci donne* $\mathrm{T(S)} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Exercice 2.4 (Tribus images) Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ (resp. $\mathcal{P}(\mathrm{F})$) on note $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit f une application de E dans F.
On note f^{-1} l'application de $\mathcal{P}(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ définie par, pour $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$,

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} \text{ t.q. } f(x) \in \mathrm{B}\}.$$

1. Soit S une tribu sur F. On pose $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} = \{f^{-1}(\mathrm{B}); \mathrm{B} \in \mathrm{S}\}$. Montrer que $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ est une tribu sur E (c'est la tribu image réciproque de S par f).

   Corrigé – *On démontre que* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ *est une tribu sur* E *en remarquant que* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A})$ *(pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$*) et que*

   $$\forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathrm{F}),\ f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{A}_n).$$

2. Soit T une tribu sur E. On pose $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}} = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{F}; f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$. Montrer que $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}}$ est une tribu sur F (c'est la tribu image directe de T par f).

   Corrigé – *Ici aussi, on montre que* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}}$ *est une tribu sur* F *en remarquant que* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A}) = \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A})$ *(pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$*) et que,*

   $$\forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathrm{F}),\ f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{A}_n).$$

   Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, *on pose* $\mathrm{B}_f = \{f(x); x \in \mathrm{B}\}$. *Noter que, en général,* $\{\mathrm{B}_f, \mathrm{B} \in \mathrm{T}\}$ *n'est pas une tribu sur* F *(par exemple, si f est non surjective,* $\mathrm{F} \notin \{\mathrm{B}_f, \mathrm{B} \in \mathrm{T}\}$*).*

3. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de F. On pose $\mathcal{C}_f = \{f^{-1}(\mathrm{B}); \mathrm{B} \in \mathcal{C}\}$ et $\mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Montrer que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ est la tribu image réciproque de S par f, c'est-à-dire que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f) = \mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ avec la notation de la première question.
   [On pourra montrer d'abord que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)) \subset \mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$. Puis, pour montrer que $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$, montrer que la tribu image de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ par f contient $\mathcal{C}$.]

   Corrigé – $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ *est une tribu sur* E *(d'après la première question) contenant* C_f *(car* $\mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$*), elle contient donc* $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$. *Ceci donne* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \supset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

   On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$. *Comme dans la deuxième question, on note* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)}$ *la tribu image de* $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *par f.*

   On remarque que $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)} \supset \mathcal{C}$ *(car* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *pour tout* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$*). On en déduit que* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)}$ *contient* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$*, c'est-à-dire que* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *pour tout* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. *Comme* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathrm{S}$*, ceci signifie exactement que* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

   Les deux inclusions nous donnent bien $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} = \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

Exercice 2.5 (π-système, λ-système) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F}$ est un π-système (c'est-à-dire stable par intersection finie) et un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ avec $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$).

   Corrigé – *Si* $\mathcal{F}$ *est une tribu, il est immédiat que* $\mathcal{F}$ *est un* π*-système et un* λ*-système. La question consiste à démontrer la réciproque.*

   On suppose donc $\mathcal{F}$ *est un* π*-système et un* λ*-système. Pour montrer que* $\mathcal{F}$ *est une tribu, il suffit de démontrer que* $\mathcal{F}$ *possède les trois propriétés suivantes :*

   (p1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

   (p2) $\mathcal{F}$ *est stable par passage au complémentaire,*

(p3) $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.

La propriété (p1) est immédiate car elle est dans la définition de λ-système.

La propriété (p2) est aussi assez simple. En effet, soit $A \in \mathcal{F}$, Comme $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \subset \Omega$, la troisième propriété des λ-systèmes donne $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$. Ceci prouve bien (p2).

On prouve maintenant (p3). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on veut montrer que $A \in \mathcal{F}$. On commence par remarquer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, avec

$$B_n = \bigcup_{p=0}^{n} A_p.$$

Comme $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, il suffit de montrer que $B_n \in \mathcal{F}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) pour avoir $A \in \mathcal{F}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n^c = (\bigcup_{p=0}^n A_p)^c = \bigcap_{p=0}^n A_p^c$. Pour tout p, on a $A_p \in \mathcal{F}$, on a donc $A_p^c \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ vérifie (p2)) et donc $\bigcap_{p=0}^n A_p^c \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ est un π-système). On a ainsi montré que $B_n^c \in \mathcal{F}$. Enfin, comme $\mathcal{F}$ vérifie (p2), on a bien $B_n \in \mathcal{F}$. On en déduit que $A \in \mathcal{F}$ et donc que $\mathcal{F}$ vérifie (p3), ce qui termine cette question.

2. On suppose que $\mathcal{F}$ est un λ-système. Soit $C \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega \text{ tel que } C \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

Corrigé – *On va montrer que $\mathcal{G}$ vérifie les trois propriétés définissant un λ-système.*

(1) On montre la stabilité de $\mathcal{G}$ par union dénombrable croissante – *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω telle que $A_n \subset A_{n+1}$ et $A_n \in \mathcal{G}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$. Pour cela on remarque que*

$$C \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C \cap A_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \in \mathcal{G}$ et donc $C \cap A_n \in \mathcal{F}$. Comme $(C \cap A_n) \subset (C \cap A_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, on a donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(C \cap A_n) \in \mathcal{F}$, ce qui donne bien que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

(2) On montre que $\Omega \in \mathcal{G}$ – *Cette propriété de $\mathcal{G}$ est due au fait que $C \in \mathcal{F}$ (et donc $C \cap \Omega = C \in \mathcal{F}$).*

(3) On montre que $A \setminus B \in \mathcal{G}$ si $A, B \in \mathcal{G}$ avec $B \subset A$ – *Soit $A, B \in \mathcal{G}$ avec $B \subset A$. On remarque que $C \cap (A \setminus B) = (C \cap A) \setminus (C \cap B)$. Comme $B \cap C, A \cap C \in \mathcal{F}$ et $(B \cap C) \subset (A \cap C)$, on a $(C \cap A) \setminus (C \cap B) \in \mathcal{F}$. On a donc $C \cap (A \setminus B) \in \mathcal{F}$, ce qui donne bien $(A \setminus B) \in \mathcal{G}$.*

On a ainsi montré que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

Exercice 2.6 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$) On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

Corrigé – *On s'inspire ici de la démonstration du lemme 2.11 (une autre méthode est donnée à l'exercice 2.7).*

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x = (x_1, x_2)^t \in O$, il existe $r > 0$ tel que $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. On a donc $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$.

On note alors $I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4 ;\ ]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[) \subset O\}$. Pour tout $x \in O$, il existe donc $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in I$ tel que $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. On en déduit que

$$O = \bigcup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[.$$

Comme I est au plus dénombrable (car $\mathbb{Q}^4$ est dénombrable), on en déduit que $O \in T$. On a ainsi montré que T est une tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Donc, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – – $\emptyset \in T_1$ *car* $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

– *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $B \in T_1$*, on a donc* $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$*. Or,* $(A \times \mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *(car* A *et* $\mathbb{R}$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}$*), on a donc* $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $B \in T_1$*). Donc,* $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. Ce qui prouve que* $B^c \in T_1$ *et donc que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

– *Enfin,* T_1 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$*, on a* $A \times (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T_1$.

On a donc montré que T_1 *est une tribu, il reste à montrer que* T_1 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$.

Soit B *un ouvert de* $\mathbb{R}$*. On a donc* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et, comme* $A \times B$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, on a* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. On a donc* $B \in T_1$.

T_1 *est donc une tribu contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, donc contenant* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Donc,* $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de cette question est donc :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{2.17}$$

3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On commence par remarquer que la question précédente donne que* T_2 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$*. En effet, soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}$*, la propriété (2.17) donne* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*, et donc* $A \in T_2$.

On montre maintenant que T_2 *est une tribu (on en déduira que* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

(a) $\emptyset \in T_2$ *car* $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

(b) On montre ici que T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $A \in T_2$*, on a* $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A^c \times B = (\mathbb{R} \times B) \setminus (A \times B)$*. La propriété (2.17) donne* $(\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *car* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*. D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $A \in T_2$*). Donc,* $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. Ce qui prouve que* $A^c \in T_2$ *et donc que* T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

(c) Enfin, T_2 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$*, on a* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \times B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $A_n \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_2$.

T_2 *est donc une tribu (sur* $\mathbb{R}$*) contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, ce qui prouve que* $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc, finalement,* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Corrigé – *La question précédente donne :*

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On a donc $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. On en déduit* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. Avec la question 1, on a finalement* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.7 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$) 1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]

Corrigé – *Soit* T *la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de* $\mathbb{R}^N$*. Comme les boules ouvertes sont des ouverts, on a* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$*. Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*. Pour tout* $x \in O$*, il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subset O$ *(où* $B(x,r)$ *désigne la boule ouverte de centre x et rayon r). Comme* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*, on peut donc trouver* $y \in \mathbb{Q}^N$ *et* $s \in \mathbb{Q}_+^* = \{t \in \mathbb{Q}\ ;\ t > 0\}$*, tel que* $x \in B(y,s) \subset O$*. On note alors* $I = \{(y,s) \in \mathbb{Q}^N \times \mathbb{Q}_+^*\ ;$

$B(y,s) \subset O\}$. *On a alors* $O = \bigcup_{(y,s)\in I} B(y,s)$. *Comme* I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^{N+1}$ *est dénombrable), on en déduit que* $O \in T$ *et donc que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$ *(car* T *est une tribu contenant tous les ouverts).*

Le raisonnement précédent montre même que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des boules ouvertes dont le rayon est rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles.*

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

Corrigé – *On reprend le même raisonnement que dans la question précédente en remplaçant* $B(x,r)$ *par* $P(x,r) = \prod_{i=1}^{N}]x_i - r, x_i + r[$, *avec* $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$.

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Corrigé – *Soit* $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ *et* $T(\mathcal{C})$ *la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$. *Comme* $]a,b] = \bigcap_{n>0}]a, b + \frac{1}{n}[$, *on voit que* $]a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Donc, on a* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$. *Soit* $I =]a,b[$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *On peut écrire* $I = \bigcup_{n \geq n_0}]a, b - \frac{1}{n}]$, *avec* n_0 *tel que* $\frac{1}{n_0} < b - a$. *On en déduit que* $I \in T(\mathcal{C})$. *Puis, comme tout ouvert non vide peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités finies (voir le lemme 2.11 page 30), on obtient que tout ouvert appartient à* $T(\mathcal{C})$. *Ceci permet de conclure que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$ *et finalement que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T(\mathcal{C})$.

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à S. (Un résultat analogue, non demandé ici, est vrai en remplaçant "boules ouvertes" par "boules fermées".)

Corrigé – *Si* S *est dénombrable, il suffit de reprendre le même raisonnement que dans la première question en remplaçant* $\mathbb{Q}^N$ *par* S^N *(qui est dense dans* $\mathbb{R}^N$*) et* $\mathbb{Q}_+^*$ *par* $S_+^* = \{s \in S\ ;\ s > 0\}$ *(qui est dense dans* $\mathbb{R}_+^*$*). On ne détaille pas cette démonstration.*

Si S *est non dénombrable, on se ramène au cas* S *dénombrable de la manière suivante. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, *on choisit* $x_i \in S$ *t.q.* $|x_i - (i/n)| \leq (1/n)$ *(l'existence de* x_i *vient de la densité de* S *dans* $\mathbb{R}$*) et on pose* $S_n = \{x_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$. *Puis, on pose* $\widehat{S} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$. *L'ensemble* $\widehat{S}$ *est un sous ensemble de* S, *il est dense dans* $\mathbb{R}$ *(car* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*) et il est dénombrable (car c'est une union dénombrable d'ensembles dénombrables). La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *est donc engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à* $\widehat{S}$. *Elle est donc, a fortiori, engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à* S.

Exercice 2.8 (Une tribu infinie est non dénombrable) Montrer que toute tribu infinie T sur un ensemble (infini) E est non dénombrable. [Si T est dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $A(x)$ intersection de tous les éléments de T contenant x. Puis, montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans T.]

Exercice 2.9 (Algèbre) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.5) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :
   (a) $E \in \mathcal{A}$,
   (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Corrigé – *On suppose que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre. Il est clair que* (a) *est vérifiée. Pour montrer* (b) *il suffit d'utiliser la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire, cela donne bien que* $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ *si* $A, B \in \mathcal{A}$.

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ *vérifie* (a) *et* (b).

On a alors $\emptyset = E \setminus E \in \mathcal{A}$, *et donc* $\emptyset, E \in \mathcal{A}$.

On remarque ensuite que, grâce à (b), $A^c = E \setminus A \in E$ si $A \in \mathcal{A}$. On a donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

Soit maintenant $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. On a $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus A_2^c$, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ par (b) et la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire. Une récurrence sur n donne alors que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

Enfin, la stabilité de $\mathcal{A}$ par union finie découle de la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie et par passage au complémentaire car $(\bigcup_{p=0}^n A_p)^c = \bigcap_{p=0}^n A_p^c$.

On a bien montré que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E)\,;\, A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I\}$ est encore une algèbre.

   Corrigé – *On peut montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre en utilisant directement la définition d'une algèbre. On peut aussi le montrer en utilisant la première question, ce que nous faisons ici. On montre donc que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ vérifie (a) et (b) :*

   $E \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ car $E \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$.

   Soit $A, B \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Pour tout $i \in I$, on a $A, B \in \mathcal{A}_i$. On en déduit $A \setminus B \in \mathcal{A}_i$ (car $\mathcal{A}_i$ est une algèbre) et donc $A \setminus B \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

   On a bien montré que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 2.10 (Suite croissante de tribus) Soit E un ensemble. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre (cf. définition 2.5), mais n'est pas, en général, une tribu. Donner une suite d'algèbres finies de parties de $[0,1]$ dont la réunion engendre $\mathcal{B}([0,1])$.

Exercice 2.11 (Tribu engendrée par une partition)
Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E, c'est-à-dire que $\cup_{i\in I} A_i = E$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On suppose aussi que $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de E s'écrivant comme réunion au plus dénombrable d'éléments de cette partition, c'est-à-dire que

$$\mathcal{C} = \{\cup_{j\in J} A_j,\ \text{avec } J \subset I,\ J \text{ au plus dénombrable}\}.$$

On note aussi $\mathcal{D} = \{B^c,\ B \in \mathcal{C}\}$ et $T = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$.

1. On suppose, dans cette question, que $I = \{1, 2, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $T = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Combien la tribu T a-t-elle d'éléments ?

   Corrigé – *Soit $B \in \mathcal{D}$. On a $B^c \in \mathcal{C}$ et il existe donc $J \subset I$ tel que $B^c = \cup_{i\in J} A_i$, ce qui donne $B = \cup_{i\in J^c} A_i$. Comme J^c est fini, on a donc $B \in \mathcal{C}$. On a ainsi montré que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. Un raisonnement analogue donne $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. Finalement, on obtient bien $\mathcal{C} = \mathcal{D} = T$.*

   On note $\bar{T}$ la tribu engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Comme $\bar{T} \supset \{A_1, \ldots, A_n\}$ et que $\bar{T}$ est stable par union finie, on a $\mathcal{C} \subset \bar{T}$. Pour montrer que $\bar{T} = \mathcal{C}$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (car $\bar{T}$ est la plus petite tribu contenant $\{A_1, \ldots, A_n\}$).

   Pour montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu, on remarque que

   - *$\emptyset \in \mathcal{C}$ car $\emptyset = \cup_{i\in J} A_j$ avec $J = \emptyset$,*
   - *$\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable car toute réunion de parties de I est finie,*
   - *$\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire car $B^c \in \mathcal{D} = \mathcal{C}$ si $B \in \mathcal{C}$.*

Ceci donne bien que $\mathcal{C}$ est une tribu et donc que $\mathcal{C} = \bar{\mathrm{T}}$.

Pour trouver le nombre déléments de $\mathcal{C}$, on considère l'application f de l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\mathcal{C}$ définie par $f(\mathrm{J}) = \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$. La définition de $\mathcal{C}$ donne que f est surjective et, comme les A_i sont tous non vides et que les A_i sont disjoints deux à deux, on remarque que f est injective. Ceci montre que f est bijective et donc que le cardinal de $\mathcal{C}$ est le même que le cardinal de l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$, c'est-à-dire 2^n. La tribu $\mathcal{C}$ a donc 2^n éléments.

2. On suppose, dans cette question, que I est dénombrable (on peut donc supposer que $\mathrm{I} = \mathbb{N}$). Montrer que $\mathrm{T} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$.

   Corrigé – *On reprend le même raisonnement que pour la question précédente. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$. On a $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C}$ et il existe donc $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{B}^c = \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$, ce qui donne $\mathrm{B} = \cup_{i\in \mathrm{J}^c} \mathrm{A}_i$. Comme $\mathrm{J}^c \subset \mathrm{I}$, J^c est au plus dénombrable, on a donc $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. On a ainsi montré que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. Un raisonnement analogue donne $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. Finalement, on obtient bien $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathrm{T}$.*

   On note $\bar{\mathrm{T}}$ la tribu engendrée par $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$. Comme $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ et que $\bar{\mathrm{T}}$ est stable par union dénombrable (et donc aussi par union finie), on a $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$. Pour montrer que $\bar{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (car $\bar{\mathrm{T}}$ est la plus petite tribu contenant $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$).

   Pour montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu, on remarque que

   - *$\emptyset \in \mathcal{C}$ car $\emptyset = \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$ avec $\mathrm{J} = \emptyset$,*
   - *$\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable car toute réunion de parties de I est au plus dénombrable,*
   - *$\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire car $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} = \mathcal{C}$ si $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$.*

   Ceci donne bien que $\mathcal{C}$ est une tribu et donc que $\mathcal{C} = \bar{\mathrm{T}}$.

3. On suppose maintenant que I est un ensemble infini non dénombrable. Montrer que $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$.

   Corrigé – *Pour montrer que $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$, il suffit de remarquer que $\emptyset \in \mathcal{C}$ (car $\emptyset = \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$ avec $\mathrm{J} = \emptyset$) et que $\emptyset \notin \mathcal{D}$. En effet, $\emptyset^c = \mathrm{E} = \cup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ et donc $\emptyset^c \neq \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$ pour tout $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, J au plus dénombrable (et donc $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$) car les A_i sont disjoints deux à deux et non vides. Ce qui montre que $\emptyset^c \notin \mathcal{C}$ et donc $\emptyset \notin \mathcal{D}$.*

   En fait, on peut même montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

   On note $\bar{\mathrm{T}}$ la tribu engendrée par $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$. Comme $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ et que $\bar{\mathrm{T}}$ est stable par union dénombrable (et donc aussi par union finie), on a $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$. Puis comme $\bar{\mathrm{T}}$ est stable par passage au complémentaire, on a aussi $\mathcal{D} \subset \bar{\mathrm{T}}$. On a donc $\mathrm{T} \subset \bar{\mathrm{T}}$. Pour montrer que $\bar{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$, il suffit donc de montrer que T est une tribu (car $\bar{\mathrm{T}}$ est la plus petite tribu contenant $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$).

   On montre maintenant que T est une tribu.

   - *$\emptyset \in \mathrm{T}$ car $\emptyset = \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j \in \mathcal{C} \subset \mathrm{T}$, avec $\mathrm{J} = \emptyset$.*
   - *T est stable par passage au complémentaire car $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} \subset \mathrm{T}$ si $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C} \subset \mathrm{T}$ si $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$.*
   - *Il reste à montrer la stabilité de T par union dénombrable. Soit $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de T. Pour montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$, on distingue deux cas :*

     Cas 1. *$\mathrm{B}_n \in \mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{C} \subset \mathrm{T}$, car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est encore au plus dénombrable.*

     Cas 2. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{B}_m \notin \mathcal{C}$ (et donc $\mathrm{B}_m \in \mathcal{D}$). On a alors $\mathrm{B}^c_m \in \mathcal{C}$ et il existe donc $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, J au plus dénombrable, tel que $\mathrm{B}^c_m = \cup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$. On a alors*

     $$(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n)^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}^c_n \subset \mathrm{B}^c_m,$$

     ce qui prouve qu'il existe $\bar{\mathrm{J}} \subset \mathrm{J}$ tel que $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n)^c = \cup_{i\in \bar{\mathrm{J}}} \mathrm{A}_i$. Comme $\bar{\mathrm{J}}$ est au plus dénombrable, on a donc $(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n)^c \in \mathcal{C}$ et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{D} \subset \mathrm{T}$. Ceci prouve la stabilité de de T par union dénombrable.

   On a ainsi montré que T est une tribu et donc que $\mathrm{T} = \bar{\mathrm{T}}$.

Exercice 2.12 Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ tels que } C^c = \bigcup_{p=1}^{n} C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ tel que $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

Corrigé – *On montre tout d'abord la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ et $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. On a alors $A \cap B = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} B_j) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$. Comme $A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie) pour tout i, j et que $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$ si $(i, j) \neq (k, l)$, on en déduit que $A \cap B \in \mathcal{B}$.*

Une récurrence sur n donne alors la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie.

On montre maintenant la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{B}$. Il existe $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. On a alors $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$. Comme A_i^c est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, on a bien $A_i^c \in \mathcal{B}$. La stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie donne alors que $A^c \in \mathcal{B}$. On a donc bien montré la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire.

2. Montrer que l'algèbre engendrée (voir remarque 2.6 pour la définition) par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

Corrigé – *On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union finie et contient $\mathcal{C}$, il est clair que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{C}$, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre (car $\mathcal{A}$ est l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$). On montre donc maintenant que $\mathcal{B}$ est une algèbre.*

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre que $\mathcal{B}$ vérifie les quatre propriétés d'une algèbre.

(a) $E, \emptyset \in \mathcal{B}$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et $E, \emptyset \in \mathcal{C}$.

(b) La question précédente montre que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

(c) La stabilité de $\mathcal{B}$ par union finie découle facilement de la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie et par passage au complémentaire, car $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)^c$.

On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une algèbre. Comme $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, on a donc $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ et finalement $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Exercice 2.13 (Classes monotones) Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :

(p1) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,

(p2) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.9).

Corrigé – *Si Σ est une tribu, Σ est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. On en déduit immédiatement que Σ est une algèbre et une classe monotone.*

On suppose maintenant que Σ est une algèbre et une classe monotone. Comme Σ est une algèbre, pour montrer que Σ est une tribu, il suffit de montrer que Σ est stable par union dénombrable.

Soit donc $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *et* $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. *On veut montrer que* $\mathrm{A} \in \Sigma$. *On remarque que*

$$\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \text{ avec } \mathrm{B}_n = \bigcup_{p=0}^{n} \mathrm{A}_n.$$

Comme Σ *est une algèbre, on a* $\mathrm{B}_n \in \Sigma$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Puis, comme* Σ *est stable par union croissante (noter que* $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}_{n+1}$*) dénombrable, on en déduit que* $\mathrm{A} \in \Sigma$. *On a bien montré que* Σ *est stable par union dénombrable et donc que* Σ *est une tribu.*

Noter que l'hypothèse de stabilité de Σ *par intersection décroissante dénombrable n'a pas été utilisé. Elle sera utile à la question 4.*

2. Donner un exemple, avec $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

   Corrigé – *Il y a beaucoup d'exemples de classes monotones qui ne sont pas des tribus. En voici un :* $\Sigma = \{\mathbb{R}\}$.

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) ; \mathrm{A} \in \Sigma_i \text{ pour tout } i \in \mathrm{I}\}$$

   est encore une classe monotone.

   Corrigé – *Soit* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$ *telle que* $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On a donc, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ *et donc, puisque* Σ_i *est une classe monotone,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \Sigma_i$. *On en déduit que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$.

   Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$ *telle que* $\mathrm{A}_n \supset \mathrm{A}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On a donc, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ *et donc, puisque* Σ_i *est une classe monotone,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \Sigma_i$. *On en déduit que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$.

   Ceci montre bien que $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$ *est une classe monotone.*

   Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

   (a) Montrer que $\Sigma \subset \mathrm{T}$.

   Corrigé – Σ *est l'intersection de toutes les classes monotones sur* $\mathcal{A}$. *Une tribu étant aussi une classe monotone, la tribu* T *(engendrée par* $\mathcal{A}$*) est donc une classe monotone contenant* $\mathcal{A}$. *On en déduit que* $\Sigma \subset \mathrm{T}$.

   (b) Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. On pose $\Sigma_\mathrm{A} = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{E} ; \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \Sigma \text{ et } \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.

   Corrigé – *Soit* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_\mathrm{A}$, $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   On pose $\mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$. *On va montrer que* $\mathrm{B} \in \Sigma_\mathrm{A}$.

   On a $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n)$. *La suite* $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de* Σ. *Comme* Σ *est une classe monotone, on en déduit* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n) \in \Sigma$.

   On montre aussi que $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \in \Sigma$. *En effet,* $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \setminus \mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{B}_n \setminus \mathrm{A}) \in \Sigma$ *par la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

   On a donc bien montré que $\mathrm{B} \in \Sigma_\mathrm{A}$, *ce qui donne la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

   De manière analogue, on va montrer la stabilité de Σ *par intersection décroissante dénombrable. Soit* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_\mathrm{A}$, $\mathrm{B}_n \supset \mathrm{B}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On pose* $\mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$.

   Comme $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n)$, *on obtient* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \Sigma$ *en utilisant la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

Comme $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_n\setminus\mathrm{A})$*, on obtient* $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}\in\Sigma$ *en utilisant la stabilité de* Σ *par intersection décroissante dénombrable.*

On a donc $\mathrm{B}\in\Sigma_\mathrm{A}$*, ce qui donne la stabilité de* Σ *par intersection décroissante dénombrable.*

On a bien montré que Σ_A *est une classe monotone.*

(c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.9.] En déduire que $\mathrm{T}=\Sigma$.

Corrigé – *Pour montrer que* Σ *est une algèbre, il suffit de montrer que* Σ *vérifie les propriétés* (a) *et* (b) *de la première question de l'exercice 2.9. Il est immédiat que la propriété* (a) *est vérifiée car* $\mathrm{E}\in\mathcal{A}\in\Sigma$*. Pour montrer* (b)*, on utilise la classe monotone* Σ_A *définie à la question 4 pour* $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$*.*

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{A}$*. Comme* $\mathcal{A}$ *est une algèbre, on a donc* $\mathcal{A}\subset\Sigma_\mathrm{A}$*. La classe monotone* Σ_A *contient* $\mathcal{A}$*, elle contient donc* Σ *qui est l'intersection de toutes les classes monotones contenant* $\mathcal{A}$*. On a donc :*

$$\mathrm{A}\in\mathcal{A},\ \mathrm{B}\in\Sigma\Rightarrow\mathrm{B}\in\Sigma_\mathrm{A}. \tag{2.18}$$

On remarque maintenant que, pour tout $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{P}(\mathrm{E})$*, on a :*

$$\mathrm{A}\in\Sigma_\mathrm{B}\Leftrightarrow\mathrm{B}\in\Sigma_\mathrm{A}.$$

On déduit donc de (2.18) :

$$\mathrm{A}\in\mathcal{A},\ \mathrm{B}\in\Sigma\Rightarrow\mathrm{A}\in\Sigma_\mathrm{B}.$$

Si $\mathrm{B}\in\Sigma$*, la classe monotone* Σ_B *contient donc* $\mathcal{A}$*. Elle contient alors aussi* Σ *(qui est l'intersection de toutes les classes monotones sur* E *contenant* $\mathcal{A}$*). On a donc montré :*

$$\mathrm{B}\in\Sigma,\ \mathrm{A}\in\Sigma\Rightarrow\mathrm{A}\in\Sigma_\mathrm{B}.$$

On en déduit que $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}\in\Sigma$ *si* $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\Sigma$*.*

On a bien montré que Σ *vérifie la propriété* (b) *de la première question de l'exercice 2.9 et donc que* Σ *est une algèbre.*

Pour conclure, on remarque Σ *est une classe monotone et une algèbre. C'est donc une tribu (par la question 1) contenant* $\mathcal{A}$*. Elle contient donc* T *(qui est l'intersection de toutes les tribus contenant* $\mathcal{A}$*) et on a bien, finalement,* $\Sigma=\mathrm{T}$*.*

Exercice 2.14 (Caractérisation de la tribu engendrée) Soit E un ensemble et $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\mathrm{E})$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{A}\Rightarrow\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\in\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{A},\ \mathrm{B}\subset\mathrm{A}\Rightarrow\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^c\in\mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A},\mathrm{A}_n\cap\mathrm{A}_m=\emptyset\text{ pour }n\neq m\Rightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\in\mathcal{A}.$$

Enfin, on appelle système de Dynkin un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E tel que

- $\mathrm{E}\in\mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ stable par différence,
- $\mathcal{D}$ stable par union dénombrable disjointe.

Soit $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

1. Montrer qu'il existe un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$ et contenu dans tous les systèmes de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. c'est-à-dire qu'il existe un système de Dynkin, noté $\mathcal{D}$, tel que $\mathcal{D}\supset\mathcal{C}$ et

$$\mathcal{A}\text{ système de Dynkin }\mathcal{A}\supset\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{D}\subset\mathcal{A}.$$

Corrigé – *On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des systèmes de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \in \mathcal{Z}$. Puis, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de E appartenant à tous les éléments de $\mathcal{Z}$ (c'est-à-dire que, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on a $\mathrm{A} \in \mathcal{D}$ si, pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{Z}$, $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$).*

Il est facile de voir que $\mathcal{D}$ contient E, $\mathcal{D}$ est stable par différence, $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{C}$ (car tous les éléments de $\mathcal{Z}$ vérifient ces quatres propriétés). Enfin, $\mathcal{A} \in \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, ce qui est bien la propriété demandée.

Le système de Dynkin $\mathcal{D}$ s'appelle le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$. Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$.
On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et on va montrer que $\mathcal{D}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ Ceci démontre le théorème π-λ de Dynkin.

2. Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on note $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \{\mathrm{D} \in \mathcal{D}$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{D} \in \mathcal{D}\}$.

(a) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.

Corrigé – *Soit $(\mathrm{D}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$ avec $\mathrm{D}_n \cap \mathrm{D}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On va montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$. On remarque tout d'abord que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{D}_n \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Puis, $\mathrm{A} \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{D}_n \cap \mathrm{A}) \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{D}_n \cap \mathrm{A} \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{D}_n \cap \mathrm{A}) \cap (\mathrm{D}_m \cap \mathrm{A}) = \emptyset$, si $n \neq m$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. On a donc montré que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par union dénombrable disjointe.*

Soit maintenant $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$, avec $\mathrm{D}_1 \subset \mathrm{D}_2$. On va montrer que $\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1 \in \mathrm{D}_\mathcal{A}$. Pour cela, on remarque que $\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1 \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par différence. Puis, $\mathrm{A} \cap (\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_2) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_1) \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_1$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_2 \in \mathrm{D}$, $(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_1) \subset (\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_2)$ et $\mathcal{D}$ est stable par différence. On a donc montré que $\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1 \in \mathrm{D}_\mathcal{A}$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par différence.

(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$. En déduire que $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \mathcal{D}$.

Corrigé – *Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. On a $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$) et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie), donc $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $\mathrm{B} \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$.*

On remarque aussi que $\mathrm{E} \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$ car $\mathrm{A} \cap \mathrm{E} = \mathrm{A} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par différence et stable par union dénombrable disjointe, D_A est donc un système de Dynkin. Comme $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ contient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ contient le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{D}$. On a donc $\mathcal{D}_\mathrm{A} \supset \mathcal{D}$ et, finalement, $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \mathcal{D}$.

(c) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

Corrigé – *Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. On a $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$). Comme $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$, la question précédente donne $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\mathrm{B}$ et donc $\mathrm{A} \in \mathcal{D}_\mathrm{B}$. On a donc $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $\mathrm{B} \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$.*

On en déduit, comme à la question précédente, que $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \mathcal{D}$.

On montre maintenant que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie. Soit $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\mathrm{C}$, on a $\mathrm{B} \in \mathcal{D}_\mathrm{C}$ et donc $\mathrm{C} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{D}$. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est donc aussi dans $\mathcal{D}$. Ceci prouve bien la stabilité de $\mathcal{D}$ par intersection finie (une récurrence facile donne que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ est aussi dans $\mathcal{D}$).

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Corrigé – *On remarque que $\mathrm{E} \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire car, si $\mathrm{A} \in \mathcal{D}$, on a $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par différence (et $\mathrm{E}, \mathrm{A} \in \mathcal{D}$ avec $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$). Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable (non nécessairement disjointe).*

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire, on aussi $\mathrm{A}_n^c \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} \mathrm{A}_i^c).$$

On a $B_n \in \mathcal{D}$ *car* $\mathcal{D}$ *est stable par intersection finie et* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *(en notant que* $B_n \subset A_n$ *et* $B_m \subset A_n^c$ *si* $m > n$*). Comme* $\mathcal{D}$ *est stable par union dénombrable disjointe, on en déduit* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ *et donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ *(car* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$*). Ceci prouve que* $\mathcal{D}$ *est stable par union dénombrable et donc que* $\mathcal{D}$ *est une tribu.*

On a ainsi montré que $\mathcal{D}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$ *et donc contenant la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$*, notée* $\tau(\mathcal{C})$*. D'autre part, il est facile de voir que toute tribu contenant* $\mathcal{C}$ *est un système de Dynkin contenant* $\mathcal{C}$ *et donc que* $\tau(\mathcal{C})$ *contient* $\mathcal{D}$*. On a bien montré finalement que* $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C})$*.*

2.7.2 Mesures et probabilités

Exercice 2.15 (Exemple de mesures) Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Corrigé – *Oui, l'application* m *est une mesure sur* $\mathcal{P}(E)$*. En effet, on a bien* $m(\emptyset) = 0$ *et si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ *on a* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = 0$ *si* A_n *est au plus dénombrable pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(car une réunion d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable) et* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = +\infty$ *s'ill existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* A_n *est infini non dénombrable. On a donc toujours* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ *(noter d'ailleurs qu'il est inutile de supposer les* A_n *disjoints deux à deux).*

Exercice 2.16 (Exemple de probabilité) Soit $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $p_k \geq 0\, \forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k; x_k \in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie en 1. est une probabilité

Exercice 2.17 (Mesure trace et restriction d'une mesure) Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < +\infty$, cette mesure est finie.

   Corrigé – *Soit* $B \in T_F$*, il existe donc* $A \in T$ *tel que* $B = A \cap F$*. Comme* $F \in T$*, on a donc aussi* $B \in T$*.*

   On note m_F *la restriction de* m *à* T_F*, on a donc* $m_F(B) = m(B)$ *pour tout* $B \in T_F$*. Il est alors immédiat de voir que* $m_F(\emptyset) = 0$ *et que* m_F *est* σ*-additive sur* T_F*,* m_F *est donc une mesure sur* T_F*. Si* $m(F) < +\infty$*, on a* $m_F(F) = m(F) < +\infty$*, la mesure* m_F *est donc finie (mais la mesure* m *peut ne pas être finie, c'est-à-dire que l'on peut avoir* $m(E) = +\infty$*).*

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

   Corrigé – *On note* m_a *la restriction de* m *à* $\mathcal{A}$*, on a donc* $m_a(B) = m(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{A}$*. Il est clair que* m_a *est une mesure sur* $\mathcal{A}$*.*

   Si m *est finie, on a* $m_a(E) = m(E) < +\infty$*,* m_a *est donc aussi une mesure finie.*

   Si m *est* σ*-finie, il existe une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ *et* $m(A_n) < +\infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Mais, comme les* A_n *ne sont pas nécessairement dans* $\mathcal{A}$*, la mesure* m_a *peut ne pas être* σ*-finie. On peut construire un exemple facilement de la manière suivante :*

   On suppose que m *est* σ*-finie mais n'est pas finie (on peut prendre, par exemple* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*) et on prend* $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$*. La mesure* m_a *n'est pas* σ*-finie…*

Exercice 2.18 (Différence de deux unions) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < +\infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.

Corrigé – *Soit* $x \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$*, on a donc* $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ *et* $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$*, c'est-à-dire qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in \mathrm{A}_p$ *et que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x \notin \mathrm{B}_n$*. On a donc* $x \in \mathrm{A}_p \setminus \mathrm{B}_p$*, ce qui prouve que* $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{B}_n)$ *et donc que*

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{B}_n).$$

2. Montrer que $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(m(\mathrm{A}_n) - m(\mathrm{B}_n))$.

Corrigé – *Puisque* $m(\mathrm{E}) < +\infty$*, on a, pour tout* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *tels que* $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, $m(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = m(\mathrm{A}) - m(\mathrm{B})$*. La monotonie de m, la σ-sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) = m((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n))$$

$$\le m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{B}_n)) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{B}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(m(\mathrm{A}_n) - m(\mathrm{B}_n)).$$

Exercice 2.19 (Intersection d'ensembles pleins) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(\mathrm{A}_n) = m(\mathrm{E})$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = m(\mathrm{E})$.

Corrigé – *Comme* $m(\mathrm{E}) < +\infty$*, on a* $m(\mathrm{A}^c) = m(\mathrm{E}) - m(\mathrm{A})$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*. De* $m(\mathrm{A}_n) = m(\mathrm{E})$*, on déduit alors* $m(\mathrm{A}_n^c) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Par σ-sous additivité de m, on a alors* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n^c) = 0$*. Comme* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n^c = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)^c$*, on a donc*

$$m((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)^c) = 0 \text{ et donc } m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = m(\mathrm{E}).$$

Exercice 2.20 (Sur la mesure d'une union) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$. On suppose que $m(\mathrm{A}_p) < +\infty$ pour tout p. Montrer que

$$m(\bigcup_{p=1}^{n}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_p)) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} m(\mathrm{B} \cap (\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}))\right). \tag{2.19}$$

Corrigé – *On va montrer que pour toute mesure finie, notée μ, sur* $\mathcal{A}$*, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et toute famille* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$*,*

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mu(\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j})\right). \tag{2.20}$$

Ceci est suffisant pour montrer (2.19). En effet, on pose $\mathrm{C} = \mathrm{B} \cup (\bigcup_{i=p}^{n} \mathrm{A}_p)$ *et on définit μ en posant, pour* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\mu(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ *(on a bien ainsi une mesure finie sur* $\mathcal{A}$*). L'égalité (2.19) est alors identique à (2.20).*

Pour montrer (2.20), on raisonne par récurrence sur n. L'égalité (2.20) est clairement vraie pour $n = 1$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On suppose que (2.20) est vraie pour cette valeur de n et pour toute mesure finie sur* $\mathcal{A}$ *et il s'agit donc de montrer (2.20) pour* $n + 1$ *au lieu de n.*

Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{A}$ *et* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{n+1} \in \mathcal{A}$*, on a (comme* $\mu(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mu(\mathrm{B}) + \mu(\mathrm{C}) - \mu(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ *pour tout* $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{A}$*)*

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n+1} \mathrm{A}_p) = \mu((\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p) \cup \mathrm{A}_{n+1}) = \mu(\mathrm{A}_{n+1}) + \mu(\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p) - \mu(\mathrm{A}_{p+1} \cap (\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p)). \tag{2.21}$$

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour la famille $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ *et la mesure μ. On obtient*

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mu(\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j})\right). \tag{2.22}$$

Mais, on peut aussi utiilser l'hypothèse de récurrence pour la famille $A_1, \ldots, A_n$ *et la mesure* μ_1 *définie par* $\mu_1(C) = \mu(C \cap A_{n+1})$ *pour* $C \in \mathcal{A}$ *(ce qui revient a écrire (2.19) avec* μ *au lieu de* m *et* A_{n+1} *au lieu de* B*). On obtient*

$$\mu(A_{p+1} \cap (\bigcup_{p=1}^{n} A_p)) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mu(A_{n+1} \cap (\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})) \right). \tag{2.23}$$

En utilisant (2.22) et (2.23) dans (2.21), on obtient bien (2.20), ce qui termine cette démonstration.

Exercice 2.21 (Contre-exemples) 1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?

Corrigé – *Non,* A *n'est pas nécessairement fermé. On peut prendre, par exemple* $A = \{\frac{1}{n}, n \ge 1\}$*. On a* $\lambda(A) = 0$ *et* A *n'est pas fermé (car* 0 *appartient à l'adhérence de* A *sans être dans* A*).*

2. Soit (E, T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [On pourra trouver un exemple (facile) avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 non finies. Un exemple avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 finies est aussi possible mais plus difficile à trouver. . .]

Corrigé – *On prend* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exemple facile (avec m_1, m_2 *non finies).*
On prend

$$\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}.$$

On a bien $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire que* $\mathcal{C}_1$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(voir la proposition 2.10). On prend alors* $m_1 = \lambda$ *et* $m_2 = 2\lambda$ *(c'est-à-dire* $m_2(B) = 2\lambda(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*). On a bien* $m_1(B) = m_2(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}_1$ *(car on a alors* $m_1(B) = m_2(B) = +\infty$*). Mais* $m_1 \ne m_2$ *puisque, par exemple,* $m_1(]0, 1[) = 1$ *et* $m_2(]0, 1[) = 2$.

Exemple difficile (avec m_1, m_2 *finies).*
On prend maintenant $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, \{-1, 0, 1\} \cap B = \emptyset\} \cup \{\{-1, 0\}\} \cup \{\{0, 1\}\}$ *(un élément de* $\mathcal{C}_2$ *est donc un borélien ne contenant ni* -1 *ni* 0 *ni* 1*, ou bien la partie* $\{-1, 0\}$*, ou bien la partie* $\{0, 1\}$*). On montre d'abord que* $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Il est clair que* $T(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *car* $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$*, on remarque que* $\{0\} = \{-1, 0\} \cap \{0, 1\} \in T(\mathcal{C}_2)$ *et donc que* $\{-1\} = \{-1, 0\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$, $\{1\} = \{0, 1\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$*. Finalement on voit alors que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$ *car tout borélien s'écrit comme un borélien ne contenant ni* -1 *ni* 0 *ni* 1 *(qui appartient donc à* $T(\mathcal{C}_2)$*), auquel on ajoute éventuellement 1, 2 ou 3 autre(s) élément(s) de* $T(\mathcal{C}_2)$ *(qui sont les parties* $\{0\}$, $\{-1\}$ *et* $\{1\}$*, on conclut alors avec la stabilité par union finie de la tribu* $T(\mathcal{C}_2)$*).*

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$*, on note* δ_a *la mesure de Dirac sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On a donc, pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ *si* $a \in B$ *et* $\delta_a(B) = 0$ *si* $a \notin B$*. On prend alors* $m_1 = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ *et* $m_2 = 2\delta_{-1} + 2\delta_1$*. On a clairement* $m_1 = m_2$ *sur* $\mathcal{C}_2$ *car* $m_1(B) = m_2(B) = 0$ *si* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est tel que* $\{-1, 0, 1\} \cap B = \emptyset$ *et* $m_1(\{-1, 0\}) = m_2(\{-1, 0\}) = m_1(\{0, 1\}) = m_2(\{0, 1\}) = 2$*. Enfin, on a* $m_1 \ne m_2$ *puisque, par exemple,* $m_1(\{0\}) = 1$ *et* $m_2(\{0\}) = 0$.

Exercice 2.22 (Résultat d'unicité) Soit (E, T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < +\infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T, m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.14.]

Corrigé – *On pose* $\mathcal{D} = \{A \in T, m(A) = \mu(A)\}$*. La* σ*−additivité de* m *et* μ *montre que* $\mathcal{D}$ *est stable par union dénombrable disjointe. Comme* $m(E) < +\infty$*, on peut aussi montrer que* $\mathcal{D}$ *est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). En effet, si* $A, B \in \mathcal{D}$*, avec* $B \subset A$*, on a (par additivité de* m *et* μ*)* $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$ *et* $\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$*. Comme* $m(A) < +\infty$ *et* $\mu(A) < +\infty$*, on a donc* $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ *et* $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$*, ce qui prouve que* $m(A \setminus B) = \mu(A \setminus B)$ *et donc que* $A \setminus B \in \mathcal{D}$*. Enfin,* $E \in \mathcal{D}$ *car* $E \in \mathcal{C}$.

On utilise maintenant l'exercice 2.14. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un système de Dynkin (voir l'exercice 2.14) contenant $\mathcal{C}$. Il contient donc le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, l'exercice 2.14 donne que le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (qui est T). On a donc $\mathcal{D} \supset \mathrm{T}$ et donc finalement $\mathcal{D} = \mathrm{T}$ (car, par définition, $\mathcal{D} \subset \mathrm{T}$).

On a donc bien montré que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

2. (Généralisation de la question précédente).

   On suppose qu'il existe une suite $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(\mathrm{E}_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n$. Montrer que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose $m_n(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n)$ et $\mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n)$ (noter que $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n \in \mathrm{T}$, car $\mathrm{A}, \mathrm{E}_n \in \mathrm{T}$). On obtient ainsi deux mesures sur T, m_n et μ_n. Ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$ (car $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie).*

   On raisonne alors comme à la question précédente. On pose $\mathcal{D} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m_n(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{A})\}$ et le raisonnement de la question précédente donne que $\mathrm{E} \in \mathcal{D}$ (car $\mathrm{E}_n \in \mathcal{C}$), que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et (grâce à $m_n(\mathrm{E}) < +\infty$) que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). L'ensemble $\mathcal{D}$ est donc un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. Il contient donc le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$), Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, l'exercice 2.14 donne que le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (qui est T). On a donc $\mathcal{D} \supset \mathrm{T}$ et donc finalement $\mathcal{D} = \mathrm{T}$ (car, par définition, $\mathcal{D} \subset \mathrm{T}$).

   On a donc, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$m(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n) = m_n(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n).$$

   On en déduit que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, car, par σ–additivité de m et μ, $m(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n) = \mu(\mathrm{A})$.

3. Avec $(\mathrm{E}, \mathrm{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple pour lequel $\mathrm{E} \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

   Corrigé – *Un exemple simple est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mu = 2m$ et m définie sur T par $m(\mathrm{A}) = card(\mathrm{A})$ si A a un nombre fini d'éléments et $m(\mathrm{A}) = +\infty$ sinon.*

Exercice 2.23 (Existence d'une mesure, de l'algèbre à la σ-algèbre) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}_0$ une algèbre sur Ω et m une mesure sur $\mathcal{F}_0$ (c'est-à-dire que m est une application de $\mathcal{F}_0$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $m(\emptyset) = 0$ et $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n)$ pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}_0$ disjoints deux à deux et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{F}_0$). On note $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Cette exercice montre qu'il est possible de prolonger m en une mesure sur $\mathcal{F}$.

Pour $\mathrm{A} \subset \Omega$ on pose

$$m^*(\mathrm{A}) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n),\ (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0, \mathrm{A} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\}.$$

1. Montrer que m^* vérifie les 3 propriétés suivantes :

   – $m^*(\emptyset) = 0$,

   – (monotonie de m^*) pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow m^*(\mathrm{A}) \leq m^*(\mathrm{B})$,

   – (σ-sous-additivité de m^*) pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(\mathrm{A}_n)$.

   N.B. : On dit que m^* est une mesure extérieure.

   Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

   On dit que A est m^*-mesurable si on a, pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\Omega)$, $m^*(\mathrm{E}) = m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c)$.

   On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties de E m^*-mesurables.

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que A est m^*-mesurable si et seulement si on a, pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $m^*(\mathrm{E}) < +\infty$, $m^*(\mathrm{E}) \geq m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c)$.

3. Montrer que $\mathcal{M}$ est une algèbre. [On montrera que $\Omega \in \mathcal{M}$, puis que $A \cap B^c \in \mathcal{M}$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}$.]
4. Montrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre. [On pourra montrer, par exemple, que $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable.]
5. Montrer que la restriction de m^* à $\mathcal{M}$ est une mesure.
6. Montrer que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ et que $m^* = m$ sur $\mathcal{F}_0$. En déduire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ et que la restriction de m^* à $\mathcal{F}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ prolongeant m.

Exercice 2.24 (Un pas vers l'unicité d'une mesure) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(A) = \mu_2(A) < +\infty$. On pose $\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)\}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{L}$ et $B \setminus C \in \mathcal{L}$ si $B, C \in \mathcal{L}$ avec $C \subset B$).

Corrigé – *Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}$. On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On veut montrer que $B \in \mathcal{L}$. On remarque d'abord que $B \in \mathcal{F}$ (par stabilité de $\mathcal{F}$ par union dénombrable). Puis, comme $A \cap B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap B_n)$ et que $\mu_1(A \cap B_n) = \mu_2(A \cap B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la continuité croissante de μ_1 et μ_2 donne que $\mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)$. On a donc $B \in \mathcal{L}$ et ceci montre la stabilité de $\mathcal{L}$ par union dénombrable croissante.*

On a bien $\Omega \in \mathcal{L}$ car $\mu_1(A \cap \Omega) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \mu_2(A \cap \Omega)$.

On montre maintenant la troisième propriété. Soit $B, C \in \mathcal{L}$ avec $C \subset B$. On veut montrer que $B \setminus C \in \mathcal{L}$. On remarque d'abord que $B \setminus C = B \cap C^c \in \mathcal{F}$ par stabilité de $\mathcal{F}$ par passage au complémentaire et par intersection.
Puis, on a $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Comme $\mu_1(A) < +\infty$ et $\mu_2(A) < +\infty$ on a aussi $\mu_1(A \cap C) < +\infty$ et $\mu_2(A \cap C) < +\infty$ et donc

$$\mu_1((A \cap B) \setminus (A \cap C)) = \mu_1(A \cap B) - \mu_1(A \cap C),$$
$$\mu_2((A \cap B) \setminus (A \cap C)) = \mu_2(A \cap B) - \mu_2(A \cap C).$$

Comme $B, C \in \mathcal{L}$, on en déduit que $\mu_1((A \cap B) \setminus (A \cap C)) = \mu_2((A \cap B) \setminus (A \cap C))$ et donc

$$\mu_1(A \cap (B \setminus C)) = \mu_2(A \cap (B \setminus C)).$$

Ceci montre que $B \setminus C \in \mathcal{L}$ et termine la démonstration du fait que $\mathcal{L}$ est un λ-système.

Exercice 2.25 (Mesure atomique, mesure diffuse) Soit (E, T) un espace mesurable tel que $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique s'il existe $S \in T$ tel que $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]

   Corrigé – *Soit m une mesure purement atomique et soit $S \in T$ tel que $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$. Si m est diffuse, on a $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $S = \emptyset$ et $m = 0$.*

   On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. La mesure δ_a est (pour tout $a \in \mathbb{R}$) purement atomique, il suffit de prendre $S = \{a\}$, on a bien $\delta_a(S^c) = 0$ et $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.

   Un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est donné par la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

   Corrigé – *Soit A une partie dénombrable de E. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. On a donc $A \in T$ (car $\{x_n\} \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que T est stable par union dénombrable) et $m(A) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = 0$ car m est diffuse.*

3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $\mathrm{A}_{n,k} = \{x \in \mathrm{E}_n;\ m(x) \geq \frac{1}{k}\}$.]

Corrigé – *On pose* $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E};\ m(\{x\}) > 0\}$. *Si* $x \in \mathrm{A}$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in \mathrm{E}_n$ *et il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m(\{x\}) \geq \frac{1}{k}$. *On a donc* $x \in \mathrm{A}_{n,k}$. *Ceci montre que* $\mathrm{A} = \bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_{n,k}$. *Pour montrer que* A *est au plus dénombrable, il suffit de montrer que* $\mathrm{A}_{n,k}$ *est au plus dénombrable (car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Soit donc* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $x_1, \ldots, x_p$ *p éléments distincts de* $\mathrm{A}_{n,k}$. *Par monotonie et additivité de m, on a* $\frac{p}{k} \leq \sum_{n=1}^{p} m(\{x_n\}) = m(\{x_1, \ldots, x_p\}) \leq m(\mathrm{E}_n) < +\infty$. *On en déduit que* $p \leq km(\mathrm{E}_n) < +\infty$ *et donc que* $\mathrm{A}_{n,k}$ *a un nombre fini d'éléments (ce nombre est inférieur ou égal à* $km(\mathrm{E}_n)$*). On en déduit donc que* A *est au plus dénombrable.*

(b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m_d(\mathrm{A}) = 0$ et $m_a(\mathrm{A}^c) = 0$.

Corrigé – *On considère toujours* $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E};\ m(\{x\}) > 0\}$. *On remarque tout d'abord que* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *(car* A *est au plus dénombrable, d'après la question précédente, et que les singletons, c'est-à-dire les parties réduites à un seul élément, sont dans* T*). On pose alors, pour tout* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *:*

$$m_a(\mathrm{B}) = m(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}),\ \ m_d(\mathrm{B}) = m(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^c).$$

Il est facile de voir que m_d *et* m_a *sont des mesures sur* T *et que, par additivité de m, on a bien* $m = m_a + m_d$.

La mesure m_d *est diffuse car, si* $x \in \mathrm{E}$, *on a* $m_d(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$ *(car* A *contient tous les points tels que* $m(\{x\}) > 0$*) et* $m_d(\{x\}) = m(\emptyset) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *(car* $\{x\} \cap \mathrm{A}^c = \emptyset$*).*

La mesure m_a *est purement atomique. Il suffit de prendre* $\mathrm{S} = \mathrm{A}$, *on a bien* $m_a(\mathrm{S}^c) = m(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{A}) = 0$ *et* $m_a(\{x\}) = m(\{x\}) > 0$ *si* $x \in \mathrm{S} = \mathrm{A}$.

Enfin, m_a *et* m_d *sont étrangères car* $m_d(\mathrm{A}) = 0$ *et* $m_a(\mathrm{A}^c) = 0$.

(c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

Corrigé – *On suppose que m est finie. Soit* $\mathrm{M} = \sup\{m(\{x\}),\ x \in \mathrm{E}\}$. *On veut montrer qu'il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{M} = m(\{x\})$. *On suppose* $\mathrm{M} > 0$ *(sinon, il suffit de prendre n'importe quel* $x \in \mathrm{E}$ *pour avoir* $m(\{x\}) = \mathrm{M}$*). On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que* $m(\{x\}) < \mathrm{M}$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Par définition de* M, *Il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ *tel que* $m(\{x_n\}) \to \mathrm{M}$ *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $m(\{x_n\}) < \mathrm{M}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on peut même supposer (quitte à extraire une sous-suite) que* $m(\{x_n\}) < m(\{x_{n+1}\}) < \mathrm{M}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut aussi supposer que* $m(\{x_0\}) > \frac{\mathrm{M}}{2}$. *Les points* x_n *sont alors tous distincts, ce qui donne* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = m(\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}) \leq m(\mathrm{E})$. *Ceci est impossible car* $m(\mathrm{E}) < +\infty$ *et* $m(\{x_n\}) > \frac{\mathrm{M}}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = +\infty$*).*

Exemple de mesure σ-finie pour laquelle M *n'est pas atteint.*

Sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on définit m par* $m(\mathrm{B}) = \sum_{n=2}^{+\infty}(1 - \frac{1}{n})\delta_n(\mathrm{B})$ *(où* δ_n *est la mesure de Dirac au point* $n \in \mathbb{N}$, *définie en* (2.2)*).*

Pour montrer que m est une mesure, on peut remarquer, en posant $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}\,;\ n \geq 2\}$, *que* $m(\mathrm{B}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in\mathrm{B}}(1 - \frac{1}{n})$. *Si* $\mathrm{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$ *avec* $\mathrm{B}_p \cap \mathrm{B}_q = \emptyset$ *si* $p \neq q$, *on a*

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} m(\mathrm{B}_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in\mathrm{B}_p} (1 - \frac{1}{n}) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in\mathrm{B}_p} (1 - \frac{1}{n})$$

(on utilise ici le lemme 2.38 page 42). Comme les B_p *sont disjoints deux à deux, n appartient à* B_p *pour au plus 1 p, et comme* $\mathrm{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$, *on obtient*

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in\mathrm{B}_p} (1 - \frac{1}{n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in\mathrm{B}} (1 - \frac{1}{n}) = m(\mathrm{B}).$$

Ceci prouve la σ-additivité de m. Le fait que $m(\emptyset) = 0$ est immédiat. On a donc bien montré que m est une mesure.

La mesure m est bien σ-finie, il suffit de remarquer que $m([-n,n]) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$. enfin, pour cette mesure m, on a $\mathrm{M} = \sup\{m(\{x\}),\ x \in \mathrm{E}\} = 1$ et il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $m(\{x\}) = 1$. En fait, m est purement atomique car $m((\mathbb{N}_2)^c) = 0$ et on a $0 < m(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbb{N}_2$.

4. Pour $(\mathrm{E},\mathrm{T}) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

Corrigé – *Un tel exemple est obtenu en modifiant légèrement la mesure construite à la question précédente. Sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on définit m par $m(\mathrm{B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\delta_n(\mathrm{B})$. Une démonstration analogue à celle faite à la question précédente montre que m est bien une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, m est finie (on a $m(\mathbb{R}) = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$), et m est atomique car $m((\mathbb{N}^\star)^c) = 0$ et $0 < m(\{x\}) < 1$, pour tout $x \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble des atomes de m est infini, c'est $\mathbb{N}^\star$.*

Exercice 2.26 (Limites sup et inf d'ensembles) *Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$. On rappelle que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p.$$

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(\bigcup_{p\geq n_0} \mathrm{A}_p) < +\infty$. Montrer que

$$m(\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) \leq m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n).$$

Corrigé –

- *La propriété de continuité croissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne :*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p).$$

La monotonie de m donne $m(\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \leq m(\mathrm{A}_q)$ pour tout $q \geq n$. On a donc $m(\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \leq \inf_{p\geq n} m(\mathrm{A}_p)$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} m(\mathrm{A}_p)),$$

soit encore

$$m(\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n).$$

- *De $\inf_{p\geq n} m(\mathrm{A}_p) \leq \sup_{p\geq n} m(\mathrm{A}_p)$, on déduit*

$$\liminf_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n).$$

- *Comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(\bigcup_{p\geq n_0} \mathrm{A}_p) < +\infty$, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne*

$$m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p).$$

La monotonie de m donne $m(\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \geq m(\mathrm{A}_q)$ pour tout $q \geq n$. On a donc

$$m(\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \geq \sup_{p\geq n} m(\mathrm{A}_p)$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \geq \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} m(\mathrm{A}_p))$, c'est-à-dire

$$m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n).$$

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E, T, m) *et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$*) pour lequel :*

$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé – *On prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $A_n = [n, n+1[$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On obtient alors :*

$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) = 1 > 0 = m(\emptyset) = m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < +\infty$*) pour lequel*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) < \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé – *On prend* $(E, T, m)=([0,4], \mathcal{B}([0,4]), \lambda)$ *(plus précisément,* λ *est ici la restriction à* $\mathcal{B}([0,4])$ *de* λ *qui est une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $A_{2n} = [0,2]$, $A_{2n+1} = [1,4]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On obtient* $\limsup_{n\to+\infty} A_n = [0,4]$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} A_n = [1,2]$*. On a ainsi :*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) = 1, \qquad \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) = 2,$$
$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) = 3, \qquad m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 4.$$

4. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < +\infty$*. Montrer que* $m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$*.*

Corrigé – *De* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < +\infty$ *on déduit* $\sum_{p=n}^{+\infty} m(A_p) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc* $m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *(car, par σ-sous additivité de m, on a* $m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} m(A_p)$*).*
Par continuité décroissante de m, on en déduit alors $m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$*.*

Exercice 2.27 (Petit ouvert dense...) On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $|x - a| < \varepsilon$.]

Corrigé – *La réponse est oui.... Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable, il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$*, bijective. On considère alors* $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$*.* O *est bien un ouvert (comme réunion d'ouverts), dense dans* $\mathbb{R}$ *(car* $O \supset \mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*) et, par σ-sous additivité d'une mesure, on a* $\lambda(O) \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$*.*

Exercice 2.28 (Non existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$)
On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: $x R y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A \subset [0,1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $A_q = \{y \in [0,1[; y = x+q \text{ ou } y = x+q-1, x \in A\}$, c'est-à-dire $A_q = \{y \in [0,1[\,; y-q \in A \text{ ou } y-q+1 \in A\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q = [0,1[$.

Corrigé – *Soit* $y \in [0,1[$*, il existe* $x \in A$ *tel que* yRx *(car* A *contient un élément dans chaque classe d'équivalence), c'est-à-dire* $y-x \in \mathbb{Q}$*. Comme* $y-x \in]-1,1[$ *(car* $x, y \in [0,1[$*), on a donc* $y-x = q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$ *ou* $y-x+1 = q \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$*. Ceci donne* $y \in A_q$*. On a donc* $[0,1[\subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$*. Comme* $A_q \subset [0,1[$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$*, on a finalement* $[0,1[= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} A_q$*.*

Il est important aussi de remarquer que les A_q *sont disjoints deux à deux. En effet, si* $y \in A_q \cap A_{q'}$*, il existe* $x, x' \in A$ *tels que* $y - x = q$ *ou* $(q-1)$ *et* $y - x' = q'$ *ou* $(q'-1)$*. On en déduit* $x - x' \in \mathbb{Q}$ *et donc* $x = x'$ *(car* A *contient un seul élément de chaque classe d'équivalence). Ceci donne* $q = q' = y - x$ *(si* $y - x \in [0,1[$*) ou* $q = q' = y - x + 1$ *(si* $y - x \in]-1,0[$*).*

2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. En particulier, montrer que l'application λ^*, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On suppose que m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant $m([0,1[) = 1$. La σ- additivité de m donne alors, avec la première question,*

$$1 = \sum_{q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q). \tag{2.24}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{B}+x = \{y+x,\ y \in \mathrm{B}\}$. On suppose que m est invariante par translation, on a donc $m(\mathrm{B}+x) = m(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $\mathrm{A}_q = ((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[) \cup ((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$. De plus, si $y \in ((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[) \cap ((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[)$, il existe $x,x' \in \mathrm{A}$ tels que $y = x+q = x'+q-1$, donc $x'-x = 1$, ce qui est impossible. Ceci montre que $((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[) \cap ((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[) = \emptyset$. On a donc, en utilisant l'additivité de m, l'invariance par translation de m et le fait que $\mathrm{A}+q \subset [0,2[$, $m(\mathrm{A}_q) = m((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[) + m((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[) = m((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[) + m((\mathrm{A}+q)\cap[1,2[) = m(\mathrm{A}+q) = m(\mathrm{A})$, pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$. On en déduit $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q) = 0$ si $m(\mathrm{A}) = 0$ et $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q) = +\infty$ si $m(\mathrm{A}) > 0$, et donc $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q) \neq 1$, en contradiction avec (2.24). Il n'existe donc pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([0,1[) = 1$.

Si m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. On montre que $m[0,1[= 1$ en utilisant la continuité croissante de m et le fait que $[0,1[= \bigcup_{n\geq1}[0,1-\frac{1}{n}]$. Il est donc impossible de trouver une telle mesure.

L'application λ^* définie en cours sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est invariante par translation et vérifie $\lambda^*([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Elle n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.29 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnant la longueur) Cet exercice est plus général que le précédent car on veut montrer qu'il n'existe pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, sans l'hypothèse d'invariance par translation de l'exercice précédent.

Soit E un ensemble non dénombrable, sur lequel on suppose qu'il existe un ordre total, noté $\leq$, tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble $\{y \in \mathrm{E}; y \leq x\}$ est au plus dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une application f_x injective de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathrm{E} = [0,1]$, on peut démontrer l'existence d'un tel ordre (ceci est une conséquence de l'axiome du continu). Soit m une mesure sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$; on suppose que m est finie, *i.e.* $m(\mathrm{E}) < +\infty$, et diffuse. On se propose de montrer que m est nulle, *i.e.* $m(\mathrm{A}) = 0$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. On pose, pour $x \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_{x,n} = \{y \in \mathrm{E}; y \geq x \text{ et } f_y(x) = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x,y \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_{x,n} \cap \mathrm{A}_{y,n} = \emptyset$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathrm{E}; m(\mathrm{A}_{x,n}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable (utiliser le fait que m est finie).
2. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$.
3. En déduire que m est nulle (montrer pour cela que $m(\mathrm{E}) = 0$ en utilisant la question précédente et le fait que m est diffuse).
4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b-a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

Exercice 2.30 (Une caractérisation de la mesure de Lebesgue) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(\mathrm{I}) = m(\mathrm{I}+x)$ (avec $\mathrm{I}+x = \{a+x,\ a \in \mathrm{I}\}$) et $m([0,1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (*i.e.* m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0,1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

Corrigé – *On pose $m(\{0\}) = \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $\mathrm{I} = \{0\}$ (I est bien un intervalle) de sorte que $\mathrm{I}+x = \{x\}$. On a alors $\alpha = m(\{0\}) = m(\mathrm{I}) = m(\mathrm{I}+x) = m(\{x\})$. On a donc montré que $m(\{x\}) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\alpha = 0$, il suffit, par exemple, de remarquer que, en utilisant la σ-additivité de m :*

$$1 = m([0,1]) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} m(\{\frac{1}{n}\}) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha.$$

On en déduit $\alpha = 0$ (sinon, le membre de droite de la précédente inégalité est égal à $+\infty$ et l'inégalité est alors fausse).

On a donc bien montré que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci donne, en particulier que $1 = m([0,1]) = m([0,1[)+m(\{1\}) = m([0,1[)$.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^\star$. On a $m([\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[) = m([0,\frac{1}{q}[)$ pour tout $i \in \{0,\ldots,q-1\}$, car $[\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[= [0,\frac{1}{q}[+\frac{i}{q}$. On en déduit :

$$1 = m([0,1[) = \sum_{i=0}^{q-1} m([\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[) = qm([0,\frac{1}{q}[),$$

et donc $m([0,\frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$. Ceci donne aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m([x,x+\frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$, car $[x,x+\frac{1}{q}[= [0,\frac{1}{q}[+x$.

En utilisant l'additivité de m, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$m([0,\frac{p}{q}[) = \sum_{i=0}^{p-1} m([\frac{i}{q},\frac{i+1}{q}[) = \frac{p}{q}. \tag{2.25}$$

De (2.25), on va déduire $m([\alpha,\beta[) = \beta-\alpha$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. En effet, soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Comme $[\alpha,\beta[= [0,\gamma[+\alpha$, avec $\gamma = \beta-\alpha$, on a $m([\alpha,\beta[) = m([0,\gamma[)$. Il existe alors deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^\star$ telles que $r_n \uparrow \gamma$ et $s_n \downarrow \gamma$ quand $n \to +\infty$. Comme $[0,r_n[\subset [0,\gamma[\subset [0,s_n[$, on a, grâce à (2.25), $r_n = m([0,r_n[) \leq m([0,\gamma[) \leq m([0,s_n[) = s_n$. Eh faisant $n \to +\infty$, on en déduit que $m([0,\gamma[) = \gamma$ et donc $m([\alpha,\beta[) = \beta-\alpha$.

Enfin, comme $m(\{\alpha\}) = 0$, on a aussi

$$m(]\alpha,\beta[) = \beta-\alpha, \text{ pour tout } \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta.$$

La partie "unicité" du théorème de Carathéodory donne alors $m = \lambda$.

Exercice 2.31 (Support d'une mesure sur les boréliens) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

Corrigé – *On note A l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle pour m. L'ensemble A est non vide (car l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle). On pose :*

$$\mathrm{O} = \bigcup_{\omega\in\mathrm{A}} \omega.$$

L'ensemble O est donc la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Il est clair que O est ouvert (car c'est une réunion d'ouverts) et qu'il contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ de mesure nulle. Pour montrer que O est le plus grand ouvert de mesure nulle, il suffit donc de montrer que O est de mesure nulle. Pour cela, on va montrer que O est une réunion dénombrable d'ouverts de mesure nulle.

Soit $x = (x_1,\ldots,x_d)^t \in \mathrm{O}$. Il existe $\omega \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \omega$. Comme ω est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\prod_{i=1}^{d}]x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon[\subset \omega.$$

Pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$ il existe $\gamma_{i,x} \in]x_i-\varepsilon,x_i[\cap \mathbb{Q}$ et $\delta_{i,x} \in]x_i,x_i+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$. On a donc :

$$x \in \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[\subset \omega \subset \mathrm{O}.$$

Par monotonie d'une mesure, on a $m(\prod_{i=1}^d]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[) \le m(\omega) = 0$, *et donc*

$$m(\prod_{i=1}^d]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[) = 0.$$

Comme $O = \bigcup_{x\in O}\{x\}$, *on a aussi :*

$$O = \bigcup_{x\in O}\prod_{i=1}^d]\gamma_{i,x},\delta_{i,x}[= \bigcup_{x\in O} P_{\gamma_x,\delta_x}, \tag{2.26}$$

en posant $\gamma_x = (\gamma_{1,x},\ldots,\gamma_{d,x})^t$, $\delta_x = (\delta_{1,x},\ldots,\delta_{d,x})^t$ *et* $P_{\gamma,\delta} = \prod_{i=1}^d]\gamma_i,\delta_i[$ *(si* $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d)^t$ *et* $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_d)^t$*).*

On remarque maintenant que, pour tout $x \in O$, $\gamma_x, \delta_x \in \mathbb{Q}^d$. *L'égalité (2.26) donne donc :*

$$O = \bigcup_{(\gamma,\delta)\in B} P_{\gamma,\delta},$$

où B *est une partie de* $\mathbb{Q}^{2d}$ *et* $m(P_{\gamma,\delta}) = 0$ *pour tout* $(\gamma,\delta)\in B$. *Comme* $\mathbb{Q}^{2d}$ *est dénombrable, la partie* B *est au plus dénombrable et la* σ−*sous additivité d'une mesure donne alors que* $m(O) = 0$.

Exercice 2.32 (Ensemble de Cantor)
On considère l'espace mesuré $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. On pose $C_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \ge 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n}[a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}}[a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1,\ldots,2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n\alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \bigcap_{n\ge 0} C_n$ (C s'appelle ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

   Corrigé – *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, *la longueur de l'intervalle* $[a_p^n, b_p^n]$ *est* α_n. *Comme* $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$ *et que* $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$ *et* $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, *on a* $[a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}] \subset [a_p^n, b_p^n]$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $p\in\{1,\ldots,2^n\}$. *En prenant l'union sur* $p\in\{1,\ldots,2^n\}$, *on en déduit* $C_{n+1}\subset C_n$.

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

   Corrigé – *L'ensemble* C *est fermé (dans* $\mathbb{R}$*) car c'est une intersection de fermés (chaque* C_n *est fermé). D'autre part* $C \subset [0,1]$, C *est donc compact (car fermé et borné dans* $\mathbb{R}$*).*

   Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$, *on a toujours* $b_p^n < a_{p+1}^n$ *(pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $p\in\{1,\ldots,2^n-1\}$*). Les intervalles composant* C_n *sont donc disjoints deux à deux et de longueur* α_n. *Ceci montre que* $x,y\in[0,1]$, $(y-x) > \alpha_n$ *implique* $]x,y[\not\subset C_n$. *Comme* $\alpha_n \to 0$ *quand* $n\to+\infty$ *(noter que* $\alpha_n \le \frac{1}{2^n}$*), on en déduit que* $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *ne contient aucun intervalle ouvert (non vide) et donc que* $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

3. Montrer que C est non dénombrable.

   Corrigé – *On commence par définir, par récurrence sur* $n\in\mathbb{N}^*$, *des points* x_c *pour* $c\in\{1,2\}^n$.

   Pour $n = 1$, $x_{(1)} = a_1^0$ *et* $x_{(2)} = b_1^0$.

   Soit $n \ge 1$. *Supposons que* x_c *est construit pour tout* $c\in\{1,2\}^n$ *et que pour chaque* $c\in\{1,2\}^n$, $x_c \in \{b_p^{n-1}, p = 1,\ldots,2^{n-1}\}\cup\{a_p^{n-1}, p=1,\ldots,2^{n-1}\}$. *On construit maintenant* x_c *pour* $c\in\{1,2\}^{n+1}$. *Soit donc* $c\in\{1,2\}^{n+1}$, *on pose* $c = \{\overline{c}, b\}$ *avec* $\overline{c}\in\{1,2\}^n$ *et* $d\in\{1,2\}$ *et on distingue 4 cas :*

   (a) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, *avec* $p\in\{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. *On pose alors* $x_c = a_{2p}^n$,

(b) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, *avec* $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. *On pose alors* $x_c = b_{2p}^n$,

(c) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, *avec* $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. *On pose alors* $x_c = a_{2p-1}^n$,

(d) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, *avec* $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. *On pose alors* $x_c = b_{2p-1}^n$.

Il est intéressant de noter, avec ces formules, que $|x_c - x_{\overline{c}}| \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$ *et que* $x_c \in \mathrm{C}$.

On note S *l'ensemble des suites indexées par* $\mathbb{N}^*$, *prenant leurs valeurs dans* $\{1,2\}$. *Si* $c \in \mathrm{S}$, *on note* c_n *l'élément de* $\{1,2\}^n$ *formé par les n premiers termes de la suite et on note* $x_n = x_{c_n}$. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy (car* $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$*) et incluse dans* C, *elle converge donc vers un point* $x_c \in \mathrm{C}$. *On remarque que si c et c′ sont deux suites différentes, alors* $x_c \neq x_{c'}$. *En effet soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $c_n = c'_n$ *et* $c_{n+1} \neq c'_{n+1}$, *on alors* $|x_{c_m} - x_{c'_m}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$ *pour tout* $m > n$ *et donc, en passant à la limite quand* $m \to +\infty$, $|x_c - x_{c'}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$, *ce qui donne* $x_c \neq x_{c'}$. *L'application* $c \mapsto x_c$ *est donc une injection de* S *dans* C. *Ceci montre que* C *est infini non dénombrable (car* S *est infini non dénombrable).*

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(\mathrm{C}) = 0$. En déduire que si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

Corrigé – *La construction des points* a_p^n *et* b_p^n *donne*

$$\lambda([a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}]) = 2\alpha_{n+1} = \rho_n\alpha_n = \rho_n\lambda([a_p^n, b_p^n]).$$

En prenant l'union sur $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, *on en déduit* $\lambda(\mathrm{C}_{n+1}) = \rho_n\lambda(\mathrm{C}_n)$.

Si ρ_n *ne dépend pas de n, c'est-à-dire* $\rho_n = \rho$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 < \rho < 1$, *on a donc* $\lambda(\mathrm{C}_{n+1}) = \rho\lambda(\mathrm{C}_n)$. *Ceci donne, comme* $\lambda(\mathrm{C}_0) = 1$, $\lambda(\mathrm{C}_n) = \rho^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Par continuité décroissante de* λ, *on en déduit* $\lambda(\mathrm{C}) = \lim_{n\to+\infty}\lambda(\mathrm{C}_n) = 0$.

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0} \subset]0,1[$ telle que $\lambda(\mathrm{C}) = \epsilon$.

Corrigé – *Soit* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]\varepsilon,1]$ *telle que* $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon_n \to \varepsilon$ *quand* $n \to +\infty$ *(on peut prendre, par exemple,* $\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{1-\varepsilon}{n+1}$*).*

On prend $\rho_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On a bien* $0 < \rho_n < 1$ *et, comme* $\lambda(\mathrm{C}_{n+1}) = \rho_n\lambda(\mathrm{C}_n)$ *(ceci a été démontré à la question précédente), on a donc* $\lambda(\mathrm{C}_n) = \varepsilon_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Par continuité décroissante de* λ, *on en déduit* $\lambda(\mathrm{C}) = \lim_{n\to+\infty}\lambda(\mathrm{C}_n) = \varepsilon$.

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ tel que $\lambda(\mathrm{A}) = 0$, alors $f(\mathrm{A})$ est un compact de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(f(\mathrm{A})) = 0$.

Corrigé – *Comme f est continue, f transforme les compacts en compacts. Donc,* $f(\mathrm{A})$ *est bien un compact de* $\mathbb{R}$ *(et donc appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

On montre maintenant que $\lambda(f(\mathrm{A})) = 0$.

Soit $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$ *tel que* $|f(y) - f(x)| \leq \mathrm{L}|y - x|$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$. *On commence par montrer un petit résultat préliminaire. Soit* $\mathrm{I} = [a,b]$ *un intervalle fermé de* $[0,1]$ *(*I *est donc compact). Comme f est continue sur* $[a,b]$, *il existe* $x, y \in [a,b]$ *tels que* $f(x) = m = \min\{f(z),\ z \in [a,b]\}$ *et* $f(y) = \mathrm{M} = \max\{f(z),\ z \in [a,b]\}$. *On a donc* $f(\mathrm{I}) \subset [m,\mathrm{M}]$ *(en fait,* $f(\mathrm{I}) = [m,\mathrm{M}]$*), d'où :*

$$\lambda(f(\mathrm{I})) \leq \mathrm{M} - m = f(y) - f(x) \leq \mathrm{L}|y - x| = \mathrm{L}\lambda(\mathrm{I}). \tag{2.27}$$

Soit $\eta > 0$. *Comme* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *d'après la régularité de* λ *(voir le théorème 2.43), il existe* O, *ouvert de* $\mathbb{R}$, *tel que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ *et* $\lambda(0) \leq \eta$. *D'après le lemme 2.44 page 47,* O *est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux.*

En prenant éventuellement la restriction à $[0,1]$ *de ces intervalles, on obtient donc une famille dénombrable, notée* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *d'intervalles inclus dans* $[0,1]$, *disjoints deux à deux tels que* $\mathrm{A}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{I}_n\subset\mathrm{O}$. *On en déduit*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda(\mathrm{I}_n)=\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{I}_n)\le\eta \text{ et } f(\mathrm{A})\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f(\mathrm{I}_n)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f(\bar{\mathrm{I}}_n).$$

On a donc $\lambda(f(\mathrm{A}))\le\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda(f(\bar{\mathrm{I}}_n))$. *En utilisant (2.27), on a donc*

$$\lambda(f(\mathrm{A}))\le \mathrm{L}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda(\bar{\mathrm{I}}_n)=\mathrm{L}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda(\mathrm{I}_n)\le\mathrm{L}\eta.$$

Comme η *est arbitrairement petit, on a donc* $\lambda(f(\mathrm{A}))=0$.

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que si A est un compact de $[0,1]$ tel que $\lambda(\mathrm{A})=0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(\mathrm{A}))=0$ (mais $f(\mathrm{A})$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon>0$ (cf question 5).]

Corrigé – *On note* C *l'ensemble obtenu dans la question 4, c'est-à-dire avec* $\rho_n=\rho$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $0<\rho<1$ *(par exemple,* $\rho=\frac{2}{3}$*). On note* a_n^p, b_n^p, C_n *les points et ensembles utilisés pour construire* C *et on note aussi* $\mathrm{D}=\{a_n^p,\ n\in\mathbb{N},\ p\in\{1,\ldots,2^n\}\}\cup\{b_n^p,\ n\in\mathbb{N},\ p\in\{1,\ldots,2^n\}\}$. *(Noter que* $\mathrm{D}\subset\mathrm{C}$.*)*

Soit $\varepsilon>0$. *On note* $\tilde{\mathrm{C}}$ *l'ensemble* C *obtenu à la question 5. On a donc* $\lambda(\mathrm{C})=\varepsilon$. *On note* $\tilde{a}_n^p$, $\tilde{b}_n^p$, $\tilde{\mathrm{C}}_n$ *les points et ensembles utilisés pour construire* $\tilde{\mathrm{C}}$ *et on note aussi*

$$\tilde{\mathrm{D}}=\{\tilde{a}_n^p,n\in\mathbb{N},p\in\{1,\ldots,2^n\}\}\cup\{\tilde{b}_n^p,n\in\mathbb{N},p\in\{1,\ldots,2^n\}\}.$$

(Noter que $\tilde{\mathrm{D}}\subset\tilde{\mathrm{C}}$.*)*

Soit $n\in\mathbb{N}$ *et* $p\in\{1,\ldots,2^n\}$. *On construit une fonction* f *sur l'intervalle* $[b_{2p-1}^{n+1},a_{2p}^{n+1}]$ *en prenant* f *affine et telle que* $f(b_{2p-1}^{n+1})=\tilde{b}_{2p-1}^{n+1}$ *et* $f(a_{2p-1}^{n+1})=\tilde{a}_{2p-1}^{n+1}$. *On remarque que*

$$f:(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D}\to(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{\mathrm{C}}_n^c)\cup\tilde{\mathrm{D}}$$

est strictement croissante. Comme $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)^c=\mathrm{C}$ *et que* C *est d'intérieur vide,* f *est définie sur une partie dense de* $[0,1]$ *et, comme* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{\mathrm{C}}_n^c)^c=\tilde{\mathrm{C}}$ *et que* $\tilde{\mathrm{C}}$ *est d'intérieur vide, l'image de* f *est dense dans* $[0,1]$.

Il est maintenant facile de définir f *par densité sur tout* $[0,1]$. *En effet, soit* $x\in[0,1]\setminus(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D}$, *il existe une suite de points de* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D}$, *notée* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *convergeant en croissant vers* x *et une suite de points de* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D}$, *notée* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *convergeant en décroissant vers* x *(en fait, ces points peuvent même être pris dans* D*). Comme* f *et croissante, la suite* $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc en croissant vers un certain* $\gamma\in[0,1]$ *et la suite* $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers un certain* $\delta\in[0,1]$ *(la croissance de* f *donne aussi que ces limites ne dépendent que du choix de* x *et non du choix des suites* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*). Comme* f *est croissante, on a* $\gamma\le\delta$ *et comme l'image de* f *(définie pour l'instant seulement sur* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D}$*) est dense dans* $[0,1]$, *on a nécessairement* $\gamma=\delta$ *(l'intervalle* $[\gamma,\delta]$ *ne rencontre pas l'image de* f*). On peut donc poser* $f(x)=\gamma=\delta$.

La fonction f *est donc maintenant définie sur tout* $[0,1]$ *à valeurs dans* $[0,1]$. *Elle est strictement croissante et son image est dense dans* $[0,1]$, *elle est donc continue (par le même raisonnement que celui fait pour définir* $f(x)$ *en tout point* $x\in[0,1]\setminus(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D}$*). Comme une application continue transforme un compact en compact, on a donc* $f([0,1])=[0,1]$ *et ceci prouve en particulier que*

$$f([0,1]\setminus(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{C}_n^c)\cup\mathrm{D})=[0,1]\setminus(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{\mathrm{C}}_n^c)\cup\tilde{\mathrm{D}}$$

Comme $f(\mathrm{D})=\tilde{\mathrm{D}}$, *on a aussi* $f(\mathrm{C})=\tilde{\mathrm{C}}$. *Pour que* f *soit définie sur* $\mathbb{R}$ *et continue, on ajoute* $f(x)=0$ *pour* $x<0$ *et* $f(x)=1$ *pour* $x>1$. *On a toujours* $f(\mathrm{C})=\tilde{\mathrm{C}}$. *Ceci donne bien le résultat désiré car* $\lambda(\mathrm{C})=0$ *et* $\lambda(\tilde{\mathrm{C}})=\varepsilon>0$.

Exercice 2.33 (Mesure complète) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. Une partie B de E est dite "négligeable" si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{\mathrm{T}}=\{\mathrm{A}\cup\mathrm{N};\ \mathrm{A}\in\mathrm{T},\ \mathrm{N}\in\mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Corrigé – *(a) On montre d'abord que* $\overline{T}$ *est une tribu.*

– $\emptyset \in \overline{T}$ *car* $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ *et* $\emptyset$ *appartient à* T *et* $\mathcal{N}_m$ *(car il est de mesure nulle).*

– $\overline{T}$ *est stable par passage au complémentaire :*

Soit $C \in \overline{T}$. *Il existe* $A \in T$ *et* $N \in \mathcal{N}_m$ *tels que* $C = A \cup N$. *Comme* $N \in \mathcal{N}_m$, *il existe* $B \in T$ *tel que* $N \subset B$ *et* $m(B) = 0$.

On remarque alors que $C^c = (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap N^c \cap B)$. *Comme* $A^c \cap B^c \in T$ *(par les propriétés de stabilité de* T*) et* $(A^c \cap N^c \cap B) \in \mathcal{N}_m$ *(car inclus dans* B*), on en déduit que* $C^c \in \overline{T}$. *Donc,* $\overline{T}$ *est stable par passage au complémentaire.*

– $\overline{T}$ *est stable par union dénombrable :*

Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$. *Il existe* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *et* $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ *tels que* $C_n = A_n \cup N_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Comme, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, *il existe* $B_n \in T$ *tel que* $N_n \subset B_n$ *et* $m(B_n) = 0$. *On a alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n).$$

On remarque que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in T$$

et $m(B) = 0$ *par σ-sous additivité de m. Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_m$ *comme* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$, *on a finalement* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \overline{T}$. *Ce qui prouve bien que* $\overline{T}$ *est stable par union dénombrable.*

On a bien montré que $\overline{T}$ *est une tribu sur* E.

(b) On montre maintenant que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

– *Si* $A \in T$, *on a* $A = A \cup \emptyset$. *Comme* $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, *on en déduit* $A \in \overline{T}$. *Donc,* $T \subset \overline{T}$.

– *Si* $N \in \mathcal{N}_m$, *on a* $N = \emptyset \cup N$. *Comme* $\emptyset \in T$, *on en déduit* $N \in \overline{T}$. *Donc,* $\mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Finalement, on a bien $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

2. Soit $A_1, A_2 \in T$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_m$ tels que $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.

Corrigé – *Soit* $B_2 \in T$ *tel que* $N_2 \subset B_2$ *et* $m(B_2) = 0$. *On a :*

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup B_2.$$

Donc, par monotonie et sous additivité de m, $m(A_1) \le m(A_2 \cup B_2) \le m(A_2) + m(B_2) = m(A_2)$. *En changeant les rôles de* A_1 *et* A_2, *on a aussi* $m(A_2) \le m(A_1)$. *On a donc* $m(A_1) = m(A_2)$.

Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in \mathcal{N}_m$ tel que $B = A \cup N$, on pose $\overline{m}(B) = m(A)$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m}_{|T} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{T}$ égale à m sur T.

Corrigé – *(a) On montre d'abord que* $\overline{m}$ *est une mesure sur* $\overline{T}$.

Comme $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ *et* $\emptyset \in T \cap \mathcal{N}_m$, *on a* $\overline{m}(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.

Soit maintenant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T}$ *telle que* $C_n \cap C_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$. *Il existe des suites* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *et* $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ *telles que* $C_n = A_n \cup N_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Comme, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $N_n \in \mathcal{N}_m$, *il existe* $B_n \in T$ *tel que* $N_n \subset B_n$ *et* $m(B_n) = 0$.

On a donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n).$$

On a déjà vu que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_n \in \mathcal{N}_m$. *Par définition de* $\overline{m}$, *on a donc*

$$\overline{m}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n).$$

Comme $\mathrm{C}_n \cap \mathrm{C}_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, *on a aussi* $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *(car* $\mathrm{A}_p \subset \mathrm{C}_p$ *pour tout* p*). La* σ*-additivité de* m *(et la définition de* $\overline{m}(\mathrm{C}_n)$*) donne(nt) alors :*

$$\overline{m}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(\mathrm{C}_n).$$

Ce qui prouve la σ*-additivité de* $\overline{m}$.

(b) *On montre maintenant que* $\overline{m}_{|\mathrm{T}} = m$.

Si $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, *on a* $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \emptyset$. *Comme* $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, *on a donc (*$\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{T}}$, *on le savait déjà, et)* $\overline{m}(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A})$. *Donc,* $\overline{m}_{|\mathrm{T}} = m$.

(c) *Enfin, on montre que* $\overline{m}$ *est la seule mesure sur* $\overline{\mathrm{T}}$ *égale à* m *sur* T.

Soit $\tilde{m}$ *une mesure sur* $\overline{\mathrm{T}}$ *égale à* m *sur* T.

Soit $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$. *Il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *et* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$ *tel que* $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{N}$. *Comme* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$, *il existe* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ *et* $m(\mathrm{B}) = 0$. *On a alors* $\mathrm{A} \subset \mathrm{C} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. *La monotonie de* $\tilde{m}$, *le fait que* $\tilde{m} = m$ *sur* T *et la sous additivité de* m *donnent :*

$$m(\mathrm{A}) = \tilde{m}(\mathrm{A}) \leq \tilde{m}(\mathrm{C}) \leq \tilde{m}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = m(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{B}) = m(\mathrm{A}).$$

On a donc $\tilde{m}(\mathrm{C}) = m(\mathrm{A}) = \overline{m}(\mathrm{C})$. *Ce qui prouve que* $\tilde{m} = \overline{m}$.

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

Corrigé – *On a déjà vu (à la question 1) que* $\mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

- *Il est facile de voir que* $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{\overline{m}}$. *En effet, soit* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$. *Il existe* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ *et* $m(\mathrm{B}) = 0$. *Comme* $\mathrm{T} \subset \overline{\mathrm{T}}$ *et que* $\overline{m} = m$ *sur* T, *on a donc aussi* $\mathrm{B} \in \overline{\mathrm{T}}$ *et* $\overline{m}(\mathrm{B}) = 0$, *ce qui prouve que* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$.
- *Soit maintenant* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$. *Il existe* $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$ *tel que* $\mathrm{N} \subset \mathrm{C}$ *et* $\overline{m}(\mathrm{C}) = 0$. *Comme* $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$, *il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{M} \in \mathcal{N}_m$ *et* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{B}) = 0$ *et* $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{M} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. *la définition de* $\overline{m}$ *donne que* $\overline{m}(\mathrm{C}) = m(\mathrm{A})$, *on a donc* $m(\mathrm{A}) = 0$. *On en déduit* $m(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{B}) = 0$, *et donc, comme* $\mathrm{C} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, *on a bien* $\mathrm{C} \in \mathcal{N}_m$.

On a bien montré que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

Cet exercice montre la différence dérisoire, du point de vue de l'intégration, entre $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et son complété $(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{T}}, \overline{m})$.

Exercice 2.34 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. La première question de cet exercice consiste à montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente. Puis, dans la deuxième question, il s'agit de montrer que, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente, la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ ne dépend pas de φ, dés que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente. [On pourra raisonner par l'absurde.]

Corrigé – *On suppose que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *n'est pas absolument convergente. La suite* $(\sum_{p=0}^{n} |a_p|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc en croissant vers* $+\infty$. *Comme* $|a_p| = a_p^+ + a_p^-$ *et que* $a_p^+ = \max\{a_p, 0\} \geq 0$ *et* $a_p^- = \max\{-a_p, 0\} \geq 0$, *les deux suites* $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont donc aussi croissantes et l'une des deux, au moins, converge vers* $+\infty$.

On suppose que la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $+\infty$ *(un raisonnement analogue à ce qui suit permettrait de traiter le cas où la suite* $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $+\infty$*). On va construire ci-après une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$. *Ceci prouvera que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ *est non convergente pour au moins une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

On note $\mathrm{P} = \{n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0\}$ *et* $\mathrm{N} = \{n \in \mathbb{N},\ a_n < 0\}$ *(de sorte que* $\mathrm{P} \cap \mathrm{N} = \emptyset$ *et* $\mathrm{P} \cup \mathrm{N} = \mathbb{N}$*). Soit* φ_1 *et* φ_2 *les deux applications strictement croissantes de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telles que* $\mathrm{P} = \{\varphi_1(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ *et* $\mathrm{N} = \{\varphi_2(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

On commence par montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *telle que* $a_0 = 0$ *et :*

$$a_{\varphi_2(n)} + \sum_{p=a_n}^{a_{n+1}-1} a_{\varphi_1(p)} \geq 1. \tag{2.28}$$

Pour montrer l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on pose* $a_0 = 0$*. Puis, on raisonne par récurrence sur n. Si* $a_0, \ldots, a_n$ *sont construits, l'existence de* a_{n+1} *découle du fait que*

$$\sum_{p=a_n}^{+\infty} a_{\varphi_1(p)} = \sum_{p=\varphi_1(a_n)}^{+\infty} a_p^+ = +\infty.$$

La construction de la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *se fait alors en prenant* $\varphi_1(a_0), \ldots, \varphi_1(a_1 - 1)$ *puis* $\varphi_2(0)$ *puis* $\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_2 - 1)$ *puis* $\varphi_2(1)\ldots$ *puis* $\varphi_1(a_n), \ldots, \varphi_1(a_{n+1} - 1)$ *puis* $\varphi_2(n)\ldots$

Pour décrire précisément cette application φ*, on pose* $b_0 = 0$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$*,* $b_{n+1} = b_n + a_{n+1} - a_n + 1$ *(la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante et tend donc vers* $+\infty$ *quand* $n \to +\infty$*). On définit alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $\varphi(q)$ *lorsque* $q \in \{b_n, \ldots b_{n+1} - 1\}$ *par :*

$$\begin{aligned}
&\varphi(b_n + p) = \varphi_1(a_n + p) \text{ pour } p \in \{0, \ldots, a_{n+1} - a_n - 1\},\\
&\varphi(b_{n+1} - 1) = \varphi_2(n).
\end{aligned}$$

On a bien ainsi défini une application de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *car* $b_{n+1} - 1 = b_n + p$*, pour* $p = a_{n+1} - a_n$*. L'application* φ *est surjective car* $\{\varphi(q),\ q \in \mathbb{N}\} = \mathrm{P} \cup \mathrm{N}$*. Elle est injective car chaque valeur de* φ_1 *et* φ_2 *n'est prise qu'une seule fois par* φ*. Enfin, on a bien* $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$*. En effet, on remarque que, grâce à (2.28) :*

$$\sum_{q=0}^{b_{n+1}-1+p} a_{\varphi(q)} \geq \sum_{q=0}^{b_{n+1}-1} a_{\varphi(q)} \geq n,$$

pour tout $p \geq 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, ce qui donne, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $\liminf_{p\to+\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \geq n$*, et donc*

$$\sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \to +\infty, \text{ quand } p \to +\infty.$$

2. On suppose maintenant que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente (et donc convergente). On pose $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} = a$.

   Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *est absolument convergente, il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum_{n\geq \mathrm{N}} |a_n| \leq \varepsilon$*. Pour* $i \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\}$*, soit* $n_i \in \mathbb{N}$ *tel que* $\varphi(n_i) = i$*. On a alors*

$$n \geq \max\{n_0, \ldots, n_{\mathrm{N}}\} \Rightarrow |\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} - \sum_{p=0}^{n} a_p| \leq \sum_{p=\mathrm{N}}^{\infty} |a_p| \leq \varepsilon.$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p = a$*, on en déduit que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} = a$*.*

Exercice 2.35 (Lemme de Borel-Cantelli)
Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T.
On pose

$$\mathrm{B}_n = \bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k \text{ et } \mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$$

(on rappelle que $\mathrm{A} = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(\mathrm{A}_n) < +\infty$ alors $p(\mathrm{A}) = 0$.

Corrigé – *Cette question a été traitée dans l'exercice 2.26, question 4.*

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $A_0, \ldots, A_n$ sont indépendants.
   On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

   Corrigé – *Comme cela a été vu à l'exercice 2.26, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne* $p(A) = \lim_{n\to+\infty} p(B_n)$. *Il suffit donc de montrer que* $p(B_n) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ *; supposons d'abord qu'iil existe* $k \geq n$ *tel que* $p(A_k) = 1$. *On a alors, par monotonie de* p, *que* $p(B_n) \geq p(A_k) = 1$ *et donc* $p(B_n) = 1$. *On suppose maintenant que* $p(A_k) < 1$ *pour tout* $k \geq n$. *Comme* $B_n^c = \bigcap_{k\geq n} A_k^c$, *la continuité décroissante de* p *et l'indépendance des* A_k *donne :*

$$p(B_n^c) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m} p(A_k^c) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k)).$$

   Comme $\ln(1-x) \leq -x$ *pour tout* $x < 1$ *(ou, de manière équivalente,* $\ln(u) \leq u - 1$ *pour tout* $u > 0$, *ceci est une conséquence, par exemple, de la concavité de la fonction* $\ln$*), on a, pour* $m > n$ *:*

$$\ln\Big(\prod_{k=n}^{m}(1-p(A_k))\Big) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1-p(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{m} p(A_k).$$

   De l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$, *on déduit*

$$\lim_{m\to+\infty} \ln\Big(\prod_{k=n}^{m}(1-p(A_k))\Big) = -\infty,$$

   et donc $p(B_n^c) = 0$. *Ceci donne bien* $p(B_n) = 1$ *et termine la démonstration.*

Exercice 2.36 (Probabilité sur S^1) On considère $S^1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x,y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0, 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose

$$R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z + \alpha), \sin(\theta_z + \alpha))^t.$$

Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, telle que T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in]\alpha, \beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et telle que μ soit invariante par rotation, c'est-à-dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z), z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$. [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

Corrigé – *On note* Θ *l'application* $z \mapsto \theta_z$ *de* S^1 *dans* $\mathbb{R}$ *(cette application est bijective de* S^1 *dans* $[0, 2\pi[$*). On prend alors* $T = \{\Theta^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. *C'est bien une tribu sur* S^1 *(voir l'exercice 2.4).*

Soit $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ *et* $E = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in]\alpha, \beta[\}$. *On a* $E \subset S^1$ *et, si* $z \in S^1$, *on a* $z \in E$ *si et seulement s'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\theta_z + 2k\pi \in]\alpha, \beta[$. *Ceci prouve que*

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[),$$

et donc que $E \in T$ *car* $\Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[) \in T$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

On définit maintenant μ. *Soit* $A \in T$. *On pose* $\Theta_A = \{\theta_z, z \in A\}$. *Comme* $A \in T$, *il existe* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $A = \Theta^{-1}(B)$, *et donc* $A = \Theta^{-1}(B \cap [0, 2\pi[)$. *Comme* Θ *est une bijection de* S^1 *dans* $[0, 2\pi[$, *on a alors* $\Theta_A = B \cap [0, 2\pi[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On pose* $\mu(A) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\Theta_A)$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Montrons que μ *est bien une mesure sur* T. *En effet, on a* $2\pi\mu(\emptyset) = \lambda(\Theta_\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. *Puis, si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* T, *disjoints deux à deux, la suite* $(\Theta_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *disjoints deux à deux. La* σ*-additivité de* μ *découle alors de celle de* λ.

Il reste à montrer que μ *est invariante par rotation. Soit* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *et* $A \in T$. *Comme on l'a vu précédemment, il existe* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $A = \Theta^{-1}(B \cap [0, 2\pi[)$. *On a donc*

$$A = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in B \cap [0, 2\pi[\}.$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, *on note* $B_\beta = \{\theta + \beta,\ \theta \in B\}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}
R_\alpha(A) &= \{(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))^t,\ \theta \in B \cap [0, 2\pi[\} \\
&= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi + \alpha[\} \\
&= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[\} \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[\} \\
&= \Theta^{-1}(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) \cup \Theta^{-1}(B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[).
\end{aligned}$$

La propriété d'invariance par translation de λ *permet de dire que* $B_\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$. *On a donc* $R_\alpha(A) \in T$ *et, par additivité d'une mesure et définition de* μ,

$$2\pi\mu(R_\alpha(A)) = \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[).$$

L'invariance par translation de λ *donne*

$$\lambda(B_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[) = \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
2\pi\mu(R_\alpha(A)) &= \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(B_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[) \\
&= \lambda(B_\alpha \cap [\alpha, \alpha + 2\pi[) \\
&= \lambda(B \cap [0, 2\pi[).
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$.

Exercice 2.37 (Sur la continuité de la fonction de répartition) Soient p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et F la fonction de répartition de p. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F est continue en a si et seulement si $p(\{a\}) = 0$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$ si p ne charge pas les points.