# LICENCE 3 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE. MATHEMATIQUES GENERALES. L3MiMG.

| Expédition dans la semaine n° | Etape | Code UE | N° d'envoi de l'UE |
|---|---|---|---|
| 46 | **2L3MAT** | **SMI5U1T** | **2** |

***Nom de l'UE : Intégration et transformée de Fourier (UE 5-3)***

**- Contenu de l'envoi : Polycopié, chapitres 3 et 4. Corrigés des exercices des chapitres 3 et 4**

**- Guide du travail à effectuer**

**Semaine 1 :**

Etudier le chapitre 3, sections 1, 2 (fonctions étagées) et 3 (fonctions mesurables)

Exercices proposés (avec corrigés) : 3.1, 3.3, 3.6, 3.7, 3.11

Semaine 2 :

Etudier le chapitre 3, sections 3.5 (convergence p.p., convergence en mesure)

Exercices proposés (avec corrigés) : 3.25, 3.27, 3.28 (difficile), 3.33

L'exercice 3.30 fait partie du premier devoir.

Semaine 3 :

Etudier le chapitre 4, sections 4.1, 4.2 (intégrale des fonctions mesurables positives) et 4.3 (convergence monotone, lemme de Fatou)

Exercices proposés (avec corrigés) : 4.3, 4.10, 4.11

L'exercice 4.9 fait partie du premier devoir.

Semaine 4 :

Etudier le chapitre 4, section 4.5 (fonctions intégrables)

Exercices proposés (avec corrigés) : 4.5, 4.8, 4.12 (question 1), 4.13, 4.16, 4.22.

L'exercice 4.25 fait partie du premier devoir.

Le premier devoir est à rendre à la réception du troisième envoi (en janvier).

**-Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi**

T. Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/int et me poser des questions par email.

# Chapitre 3

# Fonctions mesurables, variables aléatoires

## 3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale des fonctions réglées, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable $(E, T)$. Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de suite de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités : c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa loi de probabilité) que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé $(E, T, p)$ restant souvent mal connu.

**Remarque 3.1**

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (et à la notion de convergence croissante) et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir la définition 3.2).
2. On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble F muni d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant $\emptyset$ et F, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. On rappelle aussi que, dans un espace topologique, $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$, signifie que, pour tout O ouvert contenant $x$, il existe $n_0$ tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geq n_0$.
3. Soit F un espace topologique et $G \subset F$. On appelle topologie trace sur G la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si $O \subset G$, O est un ouvert de G si et seulement s'il existe U ouvert de F tel que $O = U \cap G$. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire $G \in \mathcal{B}(F)$, $\mathcal{B}(F)$ étant la tribu engendrée par les ouverts de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathcal{B}(G) = \{B \subset G\,;\, B \in \mathcal{B}(F)\}$, ceci est démontré dans l'exercice 2.3 page 54.
4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de $F = \mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a, b) = |b - a|$.

**Définition 3.2 (Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$)** $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

*1. Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. $O$ est un ouvert si pour tout $a \in O$ on a :*

*(a) Si $0 < a < +\infty$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset O$,*

*(b) si $a = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $[0, \alpha[\subset O$,*

*(c) si $a = +\infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $]\alpha, +\infty] \subset O$.*

*2. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on peut montrer (voir la remarque 3.3 ci après) que $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$).*

**Remarque 3.3 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$)**

1. La topologie sur $\mathbb{R}_+$ est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ (la démonstration de ce résultat est un exercice de topologie, exercice 3.4). L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est donc égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et c'est aussi l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir la remarque 3.1). On remarque aussi que $\{+\infty\} \in B(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (car $\{+\infty\}$ est, par exemple, une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$). On en déduit que, si $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $B \cap \mathbb{R} = B \cap \mathbb{R}_+$).
2. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, $A$ est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $A = B \cup \{+\infty\}$, avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to +\infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to +\infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe $n_0$ tel que $x_n \in ]\alpha, +\infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers $+\infty$).
4. On peut aussi montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty];\ a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a, +\infty[\cap \mathbb{R}_+;\ a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a, +\infty[;\ a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $T(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $T(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$). Voir à ce propos les exercices 3.13 et 3.14.

## 3.2 Fonctions étagées

**Définition 3.4 (Fonction caractéristique d'un ensemble)** *Soient $(E, T)$ un espace mesurable et soit $A \in T$. On appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble $A$, et on note $1_A$ (ou $\chi_A$) la fonction définie par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.*

**Définition 3.5 (Fonction étagée)** *Soient $(E, T)$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$.*

*1. On dit que $f$ est étagée (ou $T$-étagée) si $f$ est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ et $n$ réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.*

*2. On dit que $f$ est étagée positive si $f$ est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*

*On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.*

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles $A_i$ peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 3.6 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive)** *Soit* $(E, T)$ *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times T$ *telle que* $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$, *pour tout* $i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, *et* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

DÉMONSTRATION – Soient $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$, $(b_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble $\mathrm{Im} f$ des valeurs prises par $f$ est donc fini. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{Im} f \setminus \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ avec $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in E; f(x) = 0\} = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$.) Il reste à montrer que $A_i \in T$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $I_i = \{K \subset \{1, \ldots, p\}$ ; $a_i = \sum_{k \in K} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i = \bigcup_{K \in I_i} C_K$, avec $C_K = \bigcap_{j=1}^p D_j$, $D_j = B_j$ si $j \in K$ et $D_j = B_j^c$ si $j \notin K$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $A_i \in T$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc trouvé la décomposition voulue de $f$. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$ et $A_i = \{x \in E; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de $f$ comme $\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$. En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction etagée avec une décomposition plus générale (non unique) grâce au lemme suivant :

**Lemme 3.7** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive non nulle, telle que*

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} \text{ et } f = \sum_{i=1}^p b_i 1_{B_i}$$

*où* $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_p$ *sont des réels strictement positifs,* $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ *et* $(B_i)_{i=1,\ldots,p} \subset T$ *sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *et* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^p b_j m(B_j). \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION – On pose, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$, $C_{ij} = A_i \cap B_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^p B_j$, on écrit $A_i = \bigcup_{j=1}^p C_{ij}$ et $B_j = \bigcup_{i=1}^n C_{ij}$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i m(C_{ij})$$

et

$$\sum_{j=1}^p b_j m(B_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n b_j m(C_{ij})$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $C_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

**Lemme 3.8 (Décomposition d'une fonction étagée avec une partition)** *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T})$ *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}$ *une fonction étagée. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R}\times\mathrm{T}$ *telle que* $a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$, *pour tout* $i$, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, $\mathrm{E} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{A}_i$ *et* $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est très voisine de celle donnée pour la décomposition d'une fonction étagée positive (lemme 3.6). L'ensemble $\{a_i,\ i \in \{0,\ldots,n\}\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs prises par $f$ (et pas seulement les valeurs non nulles) et $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) = a_i\}$. ■

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 3.9 (Structure vectorielle de $\mathcal{E}$)** *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T})$ *un espace mesurable, l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des fonctions étagées est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *De plus, si* $f, g \in \mathcal{E}$, *on a aussi* $fg \in \mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION – Soiet $f, g \in \mathcal{E}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition de $f$ et $g$ donnée dans le lemme 3.8. Elle donne $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ et $g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{\mathrm{B}_i}$. Comme les familles $(\mathrm{A}_i)_{\{i\in\{0,\ldots,n\}\}}$ et $(\mathrm{B}_j)_{\{j\in\{0,\ldots,m\}\}}$ forment des partitions de E, on a

$$f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i 1_{\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_j 1_{\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j},$$

de sorte que $\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (\alpha a_i + \beta b_i) 1_{\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j}$, ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

D'autre part, on remarque aussi que $fg = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_i 1_{\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$. ■

On montrera aussi les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.3).

## 3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de passage à la limite pour définir l'intégrale de telles fonctions.
On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction $f$ de E dans F. L'espace de départ, E, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, F, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathrm{F} = \overline{\mathbb{R}}_+$). On peut aussi considérer le cas où F est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur F).

**Définition 3.10 (Fonction mesurable)** *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T})$ *un espace mesurable et* F *un ensemble muni d'une topologie (par exemple :* $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). Une fonction* $f$*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* T*-mesurable si* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$, *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$ *(ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathrm{F})) = \{f^{-1}(\mathrm{B}),\ \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})\,;\, f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ *contient* $\mathcal{B}(\mathrm{F})$*, voir l'exercice 2.4 sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*T*-mesurable".*

*Plus généralement, si* F *n'est pas muni d'une topologie (et donc de la tribu* $\mathcal{B}(\mathrm{F})$*) mais est muni directement d'une tribu* $\mathcal{T}$ *(on a alors deux espaces mesurables :* $(\mathrm{E},\mathrm{T})$ *et* $(\mathrm{F},\mathcal{T})$*), une fonction* $f$*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* $(\mathrm{T},\mathcal{T})$*-mesurable si* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$*, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$*. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(\mathrm{B}),$

$B \in \mathcal{T}\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F)\,;\ f^{-1}(B) \in T\}$ *contient* $\mathcal{T}$*.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*$(T,\mathcal{T})$*-mesurable".*

*Enfin, si* E *et* F *sont deux espaces munis d'une topologie, on dit que* $f$ *est borélienne si* $f$ *est mesurable pour les tribus boréliennes sur* E *et* F *(c'est-à-dire les tribus engendrées par les ouverts)* .

**Remarque 3.11** Une fonction étagée est toujours mesurable. En effet, soit $(E,T)$ un espace mesurable et soit $f \in \mathcal{E}$ (donc $f$ est une application de E dans $\mathbb{R}$). D'après le lemme 3.8, il existe une partition $(A_0,\ldots,A_n)$ de E, et $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $A_i \in T$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$. Pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(B) = \bigcup_{\{i;\,a_i \in B\}} A_i \in T$, ce qui prouve que $f$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Noter que si $f \in \mathcal{E}_+$, on a donc aussi $f$ mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir l'exercice 3.5).

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou "vecteur aléatoire" (selon l'espace d'arrivée) au lieu de "fonction mesurable" (ou "application mesurable").

**Définition 3.12 (Variable aléatoire, vecteur aléatoire)**

1. *Soit* $(E,T)$ *un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) une fonction* X *définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et* T*-mesurable,i.e. telle que* $X^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*
2. *Plus généralement, soient* $(E,T)$ *et* $(F,\mathcal{T})$ *deux espaces probabilisables. Une fonction* X*, définie de* E *dans* F*, est une variable aléatoire si c'est une fonction* $(T,\mathcal{T})$*-mesurable (c'est-à-dire si* $X^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{T}$*). Lorsque* F *est un espace vectoriel, on dit que* X *est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

**Remarque 3.13** Comme cela a été dit dans la proposition 3.10, on dit, en l'absence d'ambiguïté, "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire" ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.12, on a noté X la variable aléatoire plutôt que $f$ car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

**Définition 3.14 (Tribu engendrée par une fonction mesurable)** *Soient* $(E,T)$ *un espace mesurable (resp. probabilisable) et* $f$ *(resp.* X*) une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble* $\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *(resp.* $\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*) est une tribu sur* E *qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable* $f$ *(resp. la variable aléatoire* X*). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par* $f$ *(resp.* X*).*

**Définition 3.15 (Espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$)** *Soit* $(E,T)$ *un espace mesurable, on note :*

- $\mathcal{M}(E,T) = \{f : E \to \mathbb{R}$*, mesurable*$\}$,
- $\mathcal{M}_+(E,T) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, mesurable*$\}$.

*En l'absence d'ambiguïté, on notera* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E,T)$ *et* $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E,T)$.

**Proposition 3.16 (Première caractérisation de la mesurabilité)**
*Soient* $(E,T)$ *un espace mesurable et* $f : E \to F$*, avec* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. Soit* $\mathcal{C}$ *une partie de* $\mathcal{P}(F)$ *engendrant la tribu borélienne de* F*. On a alors :* $f$ *est mesurable si et seulement* $f^{-1}(C) \in T$ *pour tout* $C \in \mathcal{C}$*. En particulier,* $f$ *est mesurable si et seulement si* $f$ *vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

*1.* $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$, *pour tout* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

*2.* $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Dans cette caractérisation, l'ensemble* $]\alpha,\beta[$ *(ou* $]\alpha,+\infty[$*) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de* F *appartenant à* $]\alpha,\beta[$ *(ou* $]\alpha,+\infty[$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus. Par exemple, soit $f$ de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la fonction $f$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$ pour tout $\alpha > 0$ (par contre, $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $\alpha \geq 0$ n'implique pas que $f$ est mesurable).

La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir le chapitre suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

**Proposition 3.17 (Mesurabilité positive)** *Soient* $(E,T)$ *un espace mesurable et* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, *telle que :*

*1. pour tout* $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$,

*2.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $x \in E$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

*Les deux conditions précédentes seront notées dans la suite sous la forme* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[).$$

Comme $f_n$ est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la remarque 3.11), on a $f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha,+\infty],\ \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que $f$ est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{M}_+$. On va construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, \text{ avec } p \in \{0,\ldots,n2^n - 1\} \\ n \text{ si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = n1_{\{x\in E; f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in E; f(x)\in[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\}}.$$

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, on a $\{x \in E; f(x) \geq n\} \in T$ et $\{x \in E; f(x) \in [\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\} \in T$ pour tout $n$ et tout $p$, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

*Premier cas.* On suppose $f(x) < +\infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

*Deuxième cas.* On suppose $f(x) = +\infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue trois cas :

*Premier cas.* On suppose $f(x) \geq n+1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$.

*Deuxième cas.* On suppose $n \leq f(x) < n+1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1},\ldots,(n+1)2^{n+1}-1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}},\frac{i+1}{2^{n+1}}[$.
On a alors $f_n(x) = n \leq \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.

*Troisième cas.* On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[ = [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. ∎

**Proposition 3.18 (Mesurabilité sans signe)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ *un espace mesurable, et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. *On suppose que* $f$ *est mesurable. Il existe alors une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *telle que, pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – On définit la fonction $f^+ : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On remarque que $f^+ \in \mathcal{M}_+$ (et $f^+ \in \mathcal{M}$, voir l'exercice 3.5). En effet, $f^+$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(f^+)^{-1}(]\alpha, +\infty]) = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathrm{T}$ si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha, +\infty], \alpha > 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathcal{M}_+$. La proposition 3.17 donne l'existence de suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telles que $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to +\infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{E}$. D'autre part, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (voir la proposition 3.9 page 87), on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. ∎

La proposition précédente nous donnera, avec les propriétés de stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ (voir la proposition 3.19) une deuxième caractérisation de la mesurabilité, voir la proposition 3.20.

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très stable, c'est-à-dire que des opérations usuelles (comme addition, multiplication, limite...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de $(\mathrm{E}, \mathrm{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il est difficile de trouver des fonctions non mesurables (comme il est difficile de trouver des parties non boréliennes, bien que le cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit égal au cardinal de $\mathbb{R}$ et donc strictement inférieur au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). En pratique, on peut en gros supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables (bien qu'il y ait "beaucoup" de fonctions non mesurables).

**Proposition 3.19 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$)** *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ *un espace mesurable.*

1. *Soit* $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$.

   *Soit* $(f_n)_{n\in\mathrm{I}} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   *Soit* $(f_n)_{n\in\mathrm{I}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}$.
   *De même, si* $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}$.
2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\limsup_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.
   *De même, si* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.
3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$.

   *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Alors* $f \in \mathcal{M}$.
4. $\mathcal{M}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et si* $f, g \in \mathcal{M}$, *alors* $fg \in \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Il est clair que $f = \sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Puis, Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$f^{-1}(]\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in \mathrm{T}.$$

Comme $\{]\alpha,+\infty]\cap\overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que $f$ est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f\in\mathcal{M}_+$.

De même la fonction $f=\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est aussi bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (elle prend même ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si les $f_n$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ceci n'est pas vrai avec la fonction $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$). On remarque ensuite que

$$f^{-1}([-\infty,\alpha[)=\bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}([-\infty,\alpha[) \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Comme $\{[-\infty,\alpha[\cap\overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que $f$ est mesurable de E dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, c'est-à-dire $f\in\mathcal{M}_+$.

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$. La fonction $f=\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)=\bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ et que $\{]\alpha,+\infty[,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même, la fonction $f=\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}([-\infty,\alpha[)=\bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}([-\infty,\alpha[)$ et que $\{]-\infty,\alpha[,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}_+$. On pose $f=\limsup_{n\to+\infty} f_n$, la fonction $f$ est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $x\in\mathrm{E}$, on a
$$f(x)=\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} f_p(x))=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p(x)),$$
c'est-à-dire $f=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$. En utilisant les résultats précédents (avec sup puis inf), on a donc $f\in\mathcal{M}_+$. Un raisonnement similaire donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p)\in\mathcal{M}_+$.
Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}$. On suppose que
$$f=\limsup_{n\to+\infty} f_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$$
(qui est bien définie dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les $f_n$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors remarquer que la fonction $\sup_{p\geq n} f_p$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a donc, avec la propriété démontrée en 1, $\sup_{p\geq n} f_p\in\mathcal{M}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puis, utilisant encore la propriété démontrée en 1, $f=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)\in\mathcal{M}$. Un raisonnement analogue donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p)\in\mathcal{M}$ dès que l'on suppose que $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. Cette question est immédiate grâce à la précédente. Il suffit de remarquer que dès que la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement égale à la limite supérieure (ou la limite inférieure) de cette même suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x\in\mathrm{E}$). Ici on remarque donc simplement que $f=\limsup_{n\to+\infty} f_n$ et on applique la propriété 2.
4. Soit $f,g\in\mathcal{M}$ et soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ On pose $h=\alpha f+\beta g$. D'après la proposition 3.18, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}$ telles que $f_n(x)\to f(x)$ et $g_n(x)\to g(x)$, quand $n\to+\infty$, pour tout $x\in\mathrm{E}$. On pose $h_n=\alpha f_n+\beta g_n$, de sorte que $h_n(x)\to h(x)$, quand $n\to+\infty$, pour tout $x\in\mathrm{E}$. La proposition 3.9 donne que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}\subset\mathcal{M}$ (voir la remarque 3.11), la propriété 3 ci-dessus donne alors que $h\in\mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

   Soit $f,g\in\mathcal{M}$. On pose $h=fg$. On raisonne comme ci-dessus, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}$ telle que $f_n(x)\to f(x)$ et $g_n(x)\to g(x)$, quand $n\to+\infty$, pour tout $x\in\mathrm{E}$. On pose $h_n=f_ng_n$, de sorte que $h_n(x)\to h(x)$, quand $n\to+\infty$, pour tout $x\in\mathrm{E}$. La proposition 3.9 donne aussi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}\subset\mathcal{M}$. La propriété 3 ci-dessus donne alors que $h\in\mathcal{M}$.

■

**Proposition 3.20 (Deuxième caractérisation de la mesurabilité)** *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f:\mathrm{E}\to\mathbb{R}$. *Alors,* $f$ *est mesurable si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}$ *telle que pour tout* $x\in\mathrm{E}$, $f_n(x)\to f(x)$, *quand* $n\to+\infty$.

DÉMONSTRATION – Cette caractérisation est donnée par la proposition 3.18 pour le sens “seulement si” et par la propriété 3 de la proposition 3.19 pour le sens “si”. ■

On rappelle aussi qu'une fonction $f$ de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_+$) si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ (voir la proposition 3.17).

**Remarque 3.21** Il est intéressant de remarquer que la proposition 3.20 peut être fausse si on prend pour F un espace topologique quelconque (elle reste vraie, par exemple, si F est un espace vectoriel normé de dimension finie) avec une définition immédiate de $\mathcal{E}$ généralisant celle donnée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

**Définition 3.22** *Soient* E *un ensemble et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on pose :*

- $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,
- $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$,
- $|f|(x) = |f(x)|$.

**Proposition 3.23** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}$. *On a alors* $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ *et* $f^+$, $f^-$, $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ est immédiat. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 3.18, que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ et donc que $f^+, f^- \in \mathcal{M}$ (voir l'exercice 3.5). La proposition 3.19 donne que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a donc $|f| \in \mathcal{M}$ et donc aussi $|f| \in \mathcal{M}_+$ car $|f| \geq 0$. ■

## 3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes

Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ et $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est $(\mathrm{F}, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) et $f$ une fonction mesurable de E vers F. Si $m$ est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de $f$ et $m$, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

**Proposition 3.24 (Mesure image)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* $f$ *une fonction mesurable de* E *vers* F *(c'est-à-dire* $(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable). Alors, l'application* $m_f$ *définie de* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *par :* $m_f(\mathrm{A}) = m(f^{-1}(\mathrm{A}))$, *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$, *est une mesure sur* $\mathcal{T}$, *appelée mesure image par* $f$.

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que $m_f$ est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que $m_f$ est $\sigma-$additive, ce qui découle naturellement des propriétés de $m$. ■

**Définition 3.25 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.)**
*Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de* E, *muni de la tribu* T, *dans* $\mathbb{R}$, *muni de la tribu borélienne). On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire* X *la probabilité* $p_\mathrm{X}$ *image de* $p$ *par* X *(cette probabilité est donc définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*). On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire* X *la fonction de répartition de la probabilité* $p_\mathrm{X}$.

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire. Une conséquence immédiate du théorème 2.61 est que la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par sa fonction de répartition. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

**Proposition 3.26 (Égalité de deux lois)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *et* $(\mathrm{E}', \mathrm{T}', p')$ *des espaces probabilisés,* $\mathrm{X}$ *une variable aléatoire réelle sur* $\mathrm{E}$ *(c'est-à-dire une fonction mesurable de* $\mathrm{E}$*, muni de* $\mathrm{T}$*, dans* $\mathbb{R}$ *muni de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $\mathrm{X}'$ *une variable aléatoire réelle sur* $\mathrm{E}'$*. On a alors* $p_\mathrm{X} = p_\mathrm{Y}$ *si et seulement si* $p(\{\mathrm{X} \le t\}) = p'(\{\mathrm{Y} \le t\})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. On a aussi* $p_\mathrm{X} = p_\mathrm{Y}$ *si et seulement si* $p(\{s \le \mathrm{X} \le t\}) = p'(\{s \le \mathrm{Y} \le t\})$ *pour tout* $s, t \in \mathbb{R}$*,* $s < t$*. (Les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges.)*

DÉMONSTRATION – Cette proposition est une conséquence des théorèmes 2.61 et 2.62. Il suffit de remarquer que $p(\{\mathrm{X} \le t\}) = p_\mathrm{X}(]-\infty, t])$ et $p(\{s \le \mathrm{X} \le t\}) = p_\mathrm{X}([s,t])$ (et les mêmes égalités avec Y au lieu de X). ■

On rappelle que la notation $p(\{\mathrm{X} \le t\})$ (si X est une v. a. réelle sur l'espace probabilisé $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$) signifie $p(\{\omega \in \mathrm{E}\,;\ \mathrm{X}(\omega) \le t\})$. Cette notation sera parfois abrégée sous la forme $p(\mathrm{X} \le t)$.

**Définition 3.27 (Variables aléatoires équidistribuées)**
*Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *et* $(\mathrm{E}', \mathrm{T}', p')$ *des espaces probabilisés,* $\mathrm{X}$ *(resp.* $\mathrm{X}'$*) une variable aléatoire de* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *(resp.* $(\mathrm{E}', \mathrm{T}', p')$*) dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, on dit que les variables aléatoires* $\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{X}'$ *sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.*

**Définition 3.28 (Variable aléatoire discrète, entière, continue)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* $\mathrm{X}$ *une variable aléatoire réelle sur* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$*,* $p_\mathrm{X}$ *la loi de la variable aléatoire* $\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{F}_\mathrm{X}$ *sa fonction de répartition ;*

1. *Si* $\mathrm{X}(\mathrm{E})$ *est dénombrable, on dit que la variable aléatoire* $\mathrm{X}$ *est discrète.*
2. *Si* $\mathrm{X}(\mathrm{E}) \subset \mathbb{N}$*, on dit que la variable aléatoire* $\mathrm{X}$ *est entière.*
3. *Si la fonction de répartition* $\mathrm{F}_\mathrm{X}$ *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$ *est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

**Définition 3.29 (Variables aléatoires indépendantes)** *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $\mathrm{N} > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *une famille de variables aléatoires réelles. On dit que* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *sont indépendantes (ou que la famille (* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$*) est indépendante) si les tribus engendrées par* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *(on notera souvent* $\tau(\mathrm{X})$ *ou* $\sigma(\mathrm{X})$ *la tribu engendrée par la variable aléatoire* $\mathrm{X}$*) sont indépendantes.*
2. *Soit* $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles. On dit cette suite est indépendante (ou que les v.a.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ *sont indépendantes) si, pour tout* $\mathrm{N} > 1$*, les v.a.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ *sont indépendantes.*

On appellera “suite de v.a.r.i.i.d. ” une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (ce dernier point signifiant que toutes les v.a. de la suite ont même loi).

Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ trois v.a.r. (c'est-à-dire variables aléatoires réelles). Le fait que $\mathrm{X}_1$ soit indépendante de $\mathrm{X}_2$ et $\mathrm{X}_3$ n'implique pas que $\mathrm{X}_1$ soit indépendante de (par exemple) $\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3$, même si $\mathrm{X}_2$ et $\mathrm{X}_3$ sont indépendantes. Mais, on a bien $\mathrm{X}_1$ indépendante de $\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3$ si la famille $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$ est indépendante. Ceci est une conséquence de la proposition suivante.

**Proposition 3.30 (Indépendance et composition)** *Soit* $(E, T, p)$ *un espace probabilisé,* $n \geq 1$*,* $m \geq 1$ *et* $X_1, \ldots,$ $X_n$*,* $Y_1, \ldots, Y_m$ *des v.a.r. indépendantes. Soit* $\varphi$ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\psi$ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors, les v.a.r.* $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ *et* $\psi(Y_1, \ldots, Y_m)$ *sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale de v.a.r. indépendantes en 2 groupes. la proposition peut se généraliser à une décomposition en un nombre quelconque de groupes.*

DÉMONSTRATION – La notation $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est un peu incorrecte (mais est toujours utilisée). Elle désigne (comme on le devine facilement) la composition de $\varphi$ (qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) avec l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ donnée par les $X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

La démonstration de cette proposition (et de sa généralisation à un nombre quelconque de groupes) est une conséquence simple de la proposition 2.59 dés que l'on remarque que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$, ce que nous démontrons maintenant.

On note $\tau$ la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ et X l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\omega \in E$ associe $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))^t$. Il est facile de voir que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X^{-1}(A) \in \tau\}$ est une tribu (sur $\mathbb{R}^n$). Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i) \in \tau$$

(car $X_i^{-1}(A_i)$ appartient à $\tau(X_i)$ et donc à $\tau$). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par l'ensemble des produits de boréliens de $\mathbb{R}$ (et même par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.7), on en déduit que

$$\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X^{-1}(A) \in \tau\} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \tau$ car $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (puisque $\varphi$ est borélienne), ce qui prouve bien que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$. ■

Nous verrons au chapitre 7 la conséquence principale de l'indépendance. Cette conséquence est que, si X, Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple $(X, Y)$ est le produit des lois $P_X$ et $P_Y$ (c'est-à-dire , avec les notations du Chapitre 7, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$). Une propriété analogue est vraie pour une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a.r. indépendantes.

Nous terminons ce paragraphe par un théorème très utile en probabilités sur la représentation d'une v.a. mesurable par rapport à une autre v.a..

**Théorème 3.31 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)**
*Soient* X *et* Y *deux v.a. réelles définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Alors, la v.a.* Y *est mesurable par rapport à la tribu engendrée par* X *(notée* $\tau(X)$*) si et seulement si il existe une fonction borélienne* $f$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $Y = f(X)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 3.17. Il est intéressant de remarquer que la démonstration de ce théorème effectuée dans l'exercice 3.17 donne les informations complémentaires suivantes :

- Y est $\tau(X)$-mesurable bornée si et seulement s'il existe $f$ borélienne bornée t.q. $Y = f(X)$,
- Y est $\tau(X)$-mesurable positive si et seulement s'il existe $f$ borélienne positive t.q. $Y = f(X)$.

La partie "si" de ces deux résultats est immédiate. Pour la partie "seulement si", il suffit de remarquer que la démonstration faite dans l'exercice 3.17 donne $f$ t.q.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(t),\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(Y) \cup \{0\}, \text{ avec } \mathrm{Im}(Y) = \{Y(\omega),\ \omega \in \Omega\}.$$

■

## 3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

**Définition 3.32 (Égalité presque partout)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* F *un ensemble et* $f$ *et* $g$ *des fonctions définies de* E *dans* F *(*$\mathrm{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathrm{F} = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* $f = g$ *m-presque partout (et on note* $f = g$ *m-p.p.) si l'ensemble* $\{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ *est négligeable, c'est-à-dire qu'il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{A}) = 0$ *et* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}^c$.

On peut remarquer que si $f$ et $g$ sont des fonctions mesurables de E (muni de la tribu T et de la mesure $m$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), l'ensemble $\{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ (noté aussi $\{f \neq g\}$) appartient à T. Le fait que $f = g$ $m$ p.p. revient donc à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$. Dans la cas où $f$ ou $g$ n'est pas mesurable, l'ensemble $\{f \neq g\}$ peut être négligeable sans appartenir à T (il appartient nécessairement à T si la mesure est complète, voir la définition 2.26).

En l'absence de confusion possible, on remplace $m$-p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

**Définition 3.33 (Égalité presque sûre)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* X *et* Y *des variables aléatoires réelles. On dit que* $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ *presque sûrement (et on note* $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ *p.s.), si l'ensemble* $\{x \in \mathrm{E}\,;\, \mathrm{X}(x) \neq \mathrm{Y}(x)\}$ *est négligeable.*

**Définition 3.34 (Convergence presque partout)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* F *un ensemble,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* $f$ *une fonction de* E *dans* F *(*$\mathrm{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathrm{F} = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* $f_n$ *converge presque partout vers* $f$ *(*$f_n \to f$ p.p.*) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* $x$ *de* $\mathrm{A}^c$*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$.

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

La définition 3.34 se traduit en langage probabiliste par :

**Définition 3.35 (Convergence presque sûre)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle. On dit que* $\mathrm{X}_n$ *converge presque sûrement vers* X *(*$\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *p.s.) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* $x$ *de* $\mathrm{A}^c$*, la suite* $(\mathrm{X}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\mathrm{X}(x)$.

**Définition 3.36 (Convergence presque uniforme)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* $f_n$ *converge presque uniformément vers* $f$ *(*$f_n \to f$ *p.unif. ) si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ *et* $f_n$ *converge uniformément vers* $f$ *sur* $\mathrm{A}^c$.

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.26).

Attention, la convergence presque uniforme ne donne pas la convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle. La convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle est reliée à la convergence essentiellement uniforme, c'est-à-dire la convergence pour le sup essentiel, défini ci-après, ou pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ que nous verrons dans la section 6.1.2.

**Définition 3.37 (Sup essentiel)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* $f$ *est essentiellement bornée si il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \le C$ *p.p.. On appelle alors sup essentiel de* $|f|$, *et on le note* $\|f\|_\infty$, *l'infimum des valeurs* $C$ *telles que* $|f| \le C$ *p.p.. Si* $f$ *n'est pas essentiellement bornée, on pose* $\|f\|_\infty = \infty$.

Remarquons que dans le cas où $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue (ceci fait l'objet de la proposition 6.18).

**Définition 3.38 (Convergence essentiellement uniforme)** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* $f_n$ *converge essentiellement uniformément vers* $f$ *(*$f_n \to f$ *ess. unif. ) si* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse (voir l'exercice 3.27). Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

**Théorème 3.39 (Egorov)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré, tel que* $m(E) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n \to f$ *p.p.. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \le \varepsilon$ *et* $f_n$ *converge uniformément vers* $f$ *sur* $A^c$. *(Autrement dit, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* $f$*.)*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 3.27. Attention, lorsque $m(E) = +\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

**Définition 3.40 (Convergence en mesure)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* $f_n$ *converge en mesure vers* $f$ *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E \ ; |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

**Définition 3.41 (Convergence en probabilité)** *Soient* $(E, T, p)$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* $X$ *une variable aléatoire réelle . On dit que* $X_n$ *converge en probabilité vers* $X$ *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in X_n \ ; |X(x) - X_n(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

On peut montrer (cf exercice 3.25) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si $m$ est une mesure finie, $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.
On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si $f_n$ converge vers $f$ presque partout, et si $m(\mathrm{E}) < +\infty$, alors $f_n$ converge vers $f$ en mesure. Réciproquement, si $f_n$ converge vers $f$ en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f$ presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(\mathrm{E}) = +\infty$ (voir exercice 3.28).

On donne maintenant un résumé des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux. Les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sûre et convergence en probabilité) sont étudiées dans l'exercice 3.28. (On en introduira bientôt encore quelques-unes)

| **Terminologie analyste** | **Terminologie probabiliste** |
| --- | --- |
| convergence simple (cs) | |
| convergence uniforme (cu) | |
| convergence presque partout (cpp) | convergence presque sûre (cps) |
| convergence presque uniforme (cpu) | |
| convergence en mesure (cm) | convergence en probabilité (cp) |

On a les implications suivantes :

| **Terminologie analyste** | **Terminologie probabiliste** |
| --- | --- |
| (cu) $\Rightarrow$ (cs) $\Rightarrow$ (cpp) | |
| (cu) $\Rightarrow$ (cpu) $\Rightarrow$ (cpp) | |
| (cpp) $\Rightarrow$ (cpu) si la mesure est finie | |
| (cm) $\Rightarrow$ (cpu) pour une sous-suite | (cp) $\Rightarrow$ (cps) pour une sous-suite |
| (cpp) $\Rightarrow$ (cm) si la mesure est finie | (cps) $\Rightarrow$ (cp) |
| (cpu) $\Rightarrow$ (cm) | |

## 3.6 Exercices

**Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables)** Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T})$ un espace mesurable et $f$ une application de E dans $\mathbb{R}$ ;

1. Montrer que $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ est une tribu.

   **Corrigé –** *Cette question est un cas particulier (avec* $\mathrm{F} = \mathbb{R}$*) de la question 2 de l'exercice 2.4.*

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $f$ est mesurable,
   (ii) $f^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathrm{T}$, pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$.

   **Corrigé –** *On remarque que $f$ mesurable signifie simplement que* $\mathrm{T}_f$ *(définie à la question précédente) contient* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   *Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   *Pour le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque que* $\mathrm{T}_f$ *est une tribu. Donc, si* $\mathrm{T}_f$ *contient $\mathcal{C}$, on a aussi* $\mathrm{T}_f$ *contient* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Ceci donne $f$ mesurable. Donc, on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i)*

**Exercice 3.2 (Mesurabilité pour $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$)** Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur $\Omega$. Soit $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

1. Montrer que $f$ est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\ f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

   **Corrigé** – *On pose $\mathcal{C} = \{]-\infty, x[,\ x \in \mathbb{R}\}$. Compte tenu de la proposition 3.16 (voir aussi l'exercice 3.1), il suffit de montrer que $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   *Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont des ouverts, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   *Pour montrer l'inclusion inverse, on commence par remarquer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a (grâce aux propriétés de stabilité d'une tribu) $[a, b[ = ]-\infty, b[ \setminus ]-\infty, a[ \in \mathrm{T}(\mathcal{C})$, puis $]a, b[ = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}[a + (1/n), b[ \in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert est une union au plus dénombrable d'intrevalles ouverts bornés (voir le lemme 2.11), on en déduit que $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ contient tous les ouverts et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Finalement, on a bien $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2. Montrer que $f$ est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\ f(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$.

   **Corrigé** – *On pose ici $\mathcal{D} = \{]-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$. Compte tenu de proposition 3.16, il suffit de montrer que $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   *Comme les éléments de $\mathcal{D}$ sont des fermés, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   *Pour montrer l'inclusion inverse, on remarque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $]-\infty, x[ = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}]-\infty, x-(1/n)]$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$ (où $\mathcal{C}$ est l'ensemble défini à la question précédente). On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$. Finalement, on a donc bien $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

**Exercice 3.3 (Composition de fonctions mesurables)** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ et $(\mathrm{F}, \mathrm{S})$ deux espaces mesurables. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\varphi : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que $f$ et $\varphi$ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

**Corrigé** – *Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathrm{B}))$. Comme $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{S}$ car $\varphi$ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathrm{B})) \in \mathrm{T}$ car $f$ est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).*

**Exercice 3.4 (Topologie de $\mathbb{R}_+$)** On définit la topologie de $\mathbb{R}_+$ comme étant la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}_+$, l'ensemble O est donc un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{O} = \mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+$.

1. Soit $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\mathrm{O} = \mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+$. (Ceci montre que la topologie de $\mathbb{R}_+$ est aussi la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.)
2. Montrer que L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et est aussi égal à l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que, si $\mathrm{B} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} = \mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+$).

**Exercice 3.5 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+\ldots$)** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \ge 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que $\varphi$ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si $\varphi$ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

**Corrigé** – *On suppose $\varphi$ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a donc $\mathrm{B}\cap\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la définition 3.2 page 85). Comme $\varphi$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $\varphi$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) = \varphi^{-1}(\mathrm{B}\cap\mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne donc que $\varphi$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

*Réciproquement, on suppose maintenant $\varphi$ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (mais $\varphi$ ne prend jamais la valeur $\infty$, on peut donc la considérer comme étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc aussi $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $\varphi$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci prouve que $\varphi$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

**Exercice 3.6 (Stabilité de $\mathcal{M}$)**

1. Soient $(E, T)$, $(E', T')$, $(E'', T'')$ des espaces mesurables, $f$ (resp. $g$) une application de $E$ dans $E'$ (resp. de $E'$ dans $E''$). On suppose que $f$ et $g$ sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de $E$ dans $E''$.

   **Corrigé** – *Cette question est identique à celle de l'exercice 3.3 avec $E''$ au lieu de $\mathbb{R}$. La démonstration est semblable :*

   *Soit $B \in T''$, on remarque que $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Comme $g^{-1}(B) \in T'$ car $g$ est mesurable (de $E'$ dans $E''$), on a donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in T$ car $f$ est mesurable (de $E$ dans $E'$). Ceci montre bien que $g \circ f$ est mesurable (de $E$ dans $E''$).*

2. Soit $(E, T)$ un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ; soient $f$ et $g$ des fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Pour $x \in E$ on pose $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Montrer que $f^+$ et $f^-$ sont des fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$.

   **Corrigé** – *Cette question est démontrée dans la proposition 3.23 page 92.*

   (b) Montrer que $f + g$, $fg$ et $|f|$ sont des fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$.

   **Corrigé** – *Le fait que $f + g$, $fg \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.19 et le fait que $|f| \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.23 (car $|f|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|f| \in \mathcal{M}_+$, on conclut avec l'exercice 3.5.*

3. Soient $(E, T)$ un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $E$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Montrer que $f$ est une fonction mesurable de $E$ dans $\mathbb{R}$.

   **Corrigé** – *La démonstration de cette question est donnée dans la proposition 3.19 page 90 (propriété 3).*

4. Soit $(E, T)$ un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ tel que $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A\setminus B}$ n'est pas mesurable (de $E$ dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

   **Corrigé** – $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors que* $h^{-1}(\{1\}) = B \notin T$, *donc $h$ n'est pas mesurable. Par contre $|h| = 1_A$ est mesurable car* $A \in T$.

**Exercice 3.7 (Mesurabilité des fonctions continues)** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose $f$ continue. Montrer que $f$ est mesurable (on dit aussi que $f$ est borélienne).

   **Corrigé** – *Soit $O$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme $f$ est continue, $f^{-1}(O)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme l'ensemble des ouverts engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que $f$ est mesurable (on utilise ici la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.16 page 88).*

2. On suppose $f$ continue à droite (resp. gauche). Montrer que $f$ est mesurable.

   **Corrigé** – *On suppose $f$ continue à droite. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $f_n$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ x \le -n, \\ f(\frac{p}{n}) \ \ si\ -n < x \le n \ et\ p \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ \frac{p-1}{n} < x \le \frac{p}{n}, \\ 0 \ \ si\ x > n, \end{cases}$$

   *de sorte que*

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) 1_{]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]}.$$

*On a $f_n \in \mathcal{E}$ car $]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout n et p. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n > |x|$, on a $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} - \frac{1}{n} < x \le \frac{p}{n}$ (p dépend de n, x est fixé). Comme $f$ est continue à droite en x, on a $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$ (car $\frac{p}{n} \to x$, avec $\frac{p}{n} \ge x$). La deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.20 page 91) donne alors $f \in \mathcal{M}$.*

3. On suppose $f$ croissante. Montrer que $f$ est mesurable.

   **Corrigé** – *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\mathrm{A} = f^{-1}([\alpha, \infty[)$. On suppose $\mathrm{A} \neq \emptyset$ (si $\mathrm{A} = \emptyset$, on a bien $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Si $x \in \mathrm{A}$, on a $f(x) \ge \alpha$ et, comme $f$ est croissante, on a aussi $f(y) \ge \alpha$ pour tout $y \ge x$. Donc, $[x, \infty[ \subset \mathrm{A}$. En posant $a = \inf \mathrm{A} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on en déduit que $]a, \infty[ \subset \mathrm{A} \subset [a, \infty[$. A est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est $\infty$), ce qui prouve que $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\{[\alpha, \infty[, \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que $f$ est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.16 page 88).*

**Exercice 3.8 (Mesurabilité de $1_{\mathbb{Q}}$)** On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est-elle mesurable ?

**Corrigé** – *Oui, la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable. En effet, si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (et même si $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$), on a $1_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mathrm{A}) = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (selon que 1 et 0 appartiennent ou non à A). Comme ces 4 ensembles sont des boréliens, on en déduit que $1_{\mathbb{Q}}$ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quand $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne).*

**Exercice 3.9 (Loi de probabilité de la v.a.r. nulle)** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et X une v.a.r.. On suppose que $\mathrm{X} = 0$ p.s.. Donner la loi de probabilité $p_{\mathrm{X}}$ de X.

**Corrigé** – *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $0 \in \mathrm{A}$ on a $p(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})) = 1$ et si $0 \notin \mathrm{A}$ on a $p(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A})) = 0$. Ceci montre que $\mathrm{P}_{\mathrm{X}}$ est la mesure de Dirac en 0 (notée $\delta_0$).*

**Exercice 3.10** Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que : $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ implique $\mathrm{B} = \emptyset$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{A}$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A.

   **Corrigé** – *Soit $f$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. (L'ensemble E est muni de la tribu $\mathcal{A}$ et, comme d'habitude, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.)*

   *On peut supposer $\mathrm{A} \neq \emptyset$ (et même A non réduit à un seul élément, sinon il n'y a rien à démontrer !).*

   *Soit $x \in \mathrm{A}$, on pose $\alpha = f(x)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap f^{-1}(\{\alpha\})$. Comme $f$ est mesurable et que $\{\alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et que $\mathrm{B} \neq \emptyset$ (car $x \in \mathrm{B}$) on a nécessairement $\mathrm{B} = \mathrm{A}$, ce qui prouve que $f$ est constante sur A (et $f(y) = \alpha$ pour tout $y \in \mathrm{A}$).*

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, montrer qu'une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition.

   **Corrigé** – *Soit $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une partition de E. On a donc $\cup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On peut aussi supposer aussi que $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.*

   *Selon l'exercice 2.11, on a alors*

   $$\mathcal{A} = \{\cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i, \text{ avec } \mathrm{J} \subset \mathrm{I} \text{ et } \mathrm{J} \text{ ou } \mathrm{J}^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

   *Soit $f$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.*

   *Soit $i \in \mathrm{I}$. Comme les $\mathrm{A}_j$ sont disjoints deux à deux et non vides et que tout élément de $\mathcal{A}$ est une réunion de $\mathrm{A}_j$, on a*

   $$\mathrm{B} \in \mathcal{A},\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A}_i \Rightarrow \mathrm{B} = \emptyset \text{ ou } \mathrm{B} = \mathrm{A}_i.$$

   *On peut donc appliquer la première question, elle donne que $f$ est constante sur $\mathrm{A}_i$.*

3. Donner un exemple de fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable pour la tribu engendrée par cette partition. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons]

**Corrigé** – *Comme cela est suggéré, on prend* $E = \mathbb{R}$ *et comme partition l'ensemble des singletons, c'est-à-dire* $\{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}$*. La tribu engendrée par cette partition, notée* $\mathcal{A}$*, est donc l'ensemble des parties de* $\mathbb{R}$ *au plus dénombrable ou dont le complémentaire est au plus dénombrable. La tribu* $\mathcal{A}$ *est incluse dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(car les singletons appartiennent à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) mais est différente de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(par exemple, l'intervalle* $]0,1[$ *appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais n'appartient pas à* $\mathcal{A}$*). La fonction* $f$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *n'est donc par mesurable (par exemple,* $f^{-1}(]0,1[) = ]0,1[ \notin \mathcal{A}$*) mais est bien constante sur chaque élément de la partition.*

**Exercice 3.11 (Égalité presque partout)** 1. Soient $f$ et $g$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda$ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ $\lambda$ p.p. si et seulement si $f = g$.

**Corrigé** – *Si* $f = g$ *(c'est-à-dire* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*), on a bien* $f = g$ $\lambda$ *p.p. car* $f = g$ *sur* $\emptyset^c$ *et* $\lambda(\emptyset) = 0$*.*

*Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si* $O$ *est un ouvert non vide, il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\alpha < \beta$ *et* $]\alpha, \beta[ \subset O$*, on a donc* $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha,\beta[) \le \lambda(O)$*.*

*On suppose maintenant que* $f = g$ $\lambda$ *p.p., il existe* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda(A) = 0$ *et* $f = g$ *sur* $A^c$*. On a alors* $\{f(x) \ne g(x)\} \subset A$*. Or,* $\{f(x) \ne g(x)\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{R}^*)$ *est un ouvert car* $(f-g)$ *est continue (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) et* $\mathbb{R}^*$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*. Donc* $\{f(x) \ne g(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et la monotonie de* $\lambda$ *donne* $\lambda(\{f(x) \ne g(x)\}) \le \lambda(A) = 0$*. On en déduit que* $\{f(x) \ne g(x)\} = \emptyset$ *(car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc* $f = g$*.*

2. Soient $f$ et $g$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\delta_0$ la mesure de Dirac en 0 (définie en (2.2)) ; montrer que $f = g$ $\delta_0$ p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

**Corrigé** – *Si* $f(0) = g(0)$*, on prend* $A = \{0\}^c$*. On a bien* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $\delta_0(A) = 0$ *et* $f = g$ *sur* $A^c$ *car* $A^c = \{0\}$*. Donc,* $f = g$ $\delta_0$ *p.p..*

*Réciproquement, on suppose maintenant que* $f = g$ $\delta_0$ *p.p., il existe donc* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $f = g$ *sur* $A^c$ *et* $\delta_0(A) = 0$*. Comme* $\delta_0(A) = 0$*, on a donc* $0 \notin A$*, c'est-à-dire* $0 \in A^c$ *et donc* $f(0) = g(0)$*.*

**Exercice 3.12 (Mesurabilité)** Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^*$). on suppose que $f$ est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que $f$ est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$ ; on définit la fonction $f_n$, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x,y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[.$$

On se limite à $N = 1$.

1. Montrer que $f_n$ converge simplement vers $f$ lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *Soit* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a donc* $f_n(x,y) = f(x, \frac{p}{n})$ *avec* $\frac{p}{n} \le y < \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$*. Noter que x et y sont fixés et que p dépend de n. Quand* $n \to +\infty$*, on a donc* $\frac{p}{n} \to y$ *avec* $\frac{p}{n} \le y$*. Comme* $f(x,\cdot)$ *est continue à gauche en y, on a donc* $f(x,\frac{p}{n}) \to f(x,y)$ *quand* $n \to +\infty$*, c'est-à-dire* $f_n(x,y) \to f(x,y)$ *quand* $n \to +\infty$*.*

2. Montrer que $f_n$ est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 57.]

**Corrigé** – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Pour* $p \in \mathbb{Z}$*, on pose* $g_p = f(\cdot, \frac{p}{n})$*. On a donc, par hypothèse,* $g_p$ *mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

*Soit* $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Soit* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$*. Il existe donc* $p \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$*. On a alors* $f_n(x,y) = g_p(x)$ *et donc* $f_n(x,y) \in C$ *si et seulement* $g_p(x) \in C$*. On en déduit que :*

$$f_n^{-1}(C) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[).$$

*Comme* $g_p$ *est mesurable, on a* $g_p^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On a aussi* $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[ \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 57). Comme* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *est stable par union dénombrable, on en déduit* $f_n^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et donc* $f_n$ *mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

3. Montrer que $f$ est mesurable.

**Corrigé** – *Comme $f_n$ mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f_n(x,y) \to f(x,y)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$, la propriété 3 de la proposition 3.19 donne que $f$ est mesurable (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).*

**Exercice 3.13 (Sur la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+$)**
On note T l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ contenant les deux points 0 et $+\infty$ ou ne contenant aucun de ces deux points, c'est-à-dire $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ avec

$$\mathrm{T}_1 = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0,\infty\} \subset \mathrm{A}\} \text{ et } \mathrm{T}_2 = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0,\infty\} \subset \mathrm{A}^c\}$$

1. Montrer que T est une tribu et que T est strictement incluse dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. On pose $\mathcal{C} = \{]\alpha,\beta[,\ 0 \le \alpha < \beta \le +\infty[\}$. Déduire de la première question que $\mathcal{C}$ n'engendre pas la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

**Exercice 3.14 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$)**

1. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

**Corrigé** – *On note $\mathcal{C}_1 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$.*

- *Comme $[0,\beta[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.*
- *Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on a $\{[\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+^*\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.*
  *Comme $[0,\infty] = [0,1[\cup[1,\infty] \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$, on a aussi $\{[\alpha,\infty], \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.*
  *Par stabilité d'une tribu par intersection, on a alors $\{[\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.*
  *Par stabilité d'une tribu par union dénombrable, on montre alors que $\{]\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$ et $\{]\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.*
  *Comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles du type $]\alpha,\beta[$ (avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), $[0,\beta[$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$) et $]\beta,\infty]$ (avec $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$), on en déduit que tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est dans $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$ et donc $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.*

*On a bien montré que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.*

2. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

**Corrigé** – *On note $\mathcal{C}_2 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$. Si $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on remarque que $[0,\beta[= \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^*, \alpha<\beta}[0,\alpha[$. On en déduit que $[0,\beta[\in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. On a donc $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ et $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$.*

*Comme $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on a aussi $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.*

3. Montrer que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

**Corrigé** – *Cette question peut se faire comme dans l'exercice 3.13. On donne ici une autre méthode. On prend un ensemble E (ayant au moins 2 éléments) et une tribu T sur E différente de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ (par exemple, $\mathrm{T} = \{\emptyset, \mathrm{E}\}$). Soit alors $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{A} \notin \mathrm{T}$. On définit $f$ de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $f(x) = \infty$ si $x \in \mathrm{A}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{A} \notin \mathrm{T}$, la fonction $f$ est non mesurable. On a pourtant $f^{-1}(]0,\beta[) = \emptyset \in \mathrm{T}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Ceci montre que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.*

**Exercice 3.15 (Graphe d'une fonction borélienne)** Soit $f$ une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de $f$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant que l'on verra au chapitre 7 :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(x,y) = f(x)$ et $\mathrm{H}(x,y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

**Corrigé** – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a* $F^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R}$. *Comme* $f$ *est mesurable,* $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *(3.2) donne* $f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et donc* $F^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On a donc* F *mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

*Le fait que* H *est mesurable se démontre de manière semblable en remarquant que* $H^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A$ *(ou en utilisant la continuité de* H*).*

2. On pose $G(f) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de $f$). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

**Corrigé** – *L'ensemble de fonctions mesurables est un espace vectoriel, on a donc* $F - H$ *mesurable. On en déduit que* $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *en remarquant que* $G(f) = (F - H)^{-1}(\{0\})$ *et* $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**Exercice 3.16 (Mesurabilité au sens de Lusin)** Soit $m$ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que $m$ est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert tel que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est mesurable au sens de Lusin si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_1$ compact, $K_1 \subset K$, tel que $m(K \setminus K_1) \le \varepsilon$ et $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $f$ est mesurable au sens de Lusin. [Construire $K_1$ avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de $m$ appliquée à l'ensemble A.]

**Corrigé** – *Soit* K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la régularité de m, il existe* F *fermé et* O *ouvert t.q.* $F \subset A \subset O$ *et* $m(O \setminus F) < \varepsilon$. *On prend* $K_1 = (K \cap F) \cup (K \cap O^c)$.

*Les ensembles* $K \cap F$ *et* $K \cap O^c$ *sont fermés (car l'intersection d'un compact et d'un fermé est un compact). L'ensemble* $K_1$ *est donc compact car il est l'union de deux compacts. Comme* $K_1 = K \setminus (O \setminus F)$, *on a bien* $K_1 \subset K$ *et* $(K \setminus K_1) \subset (O \setminus F)$. *On en déduit* $m(K \setminus K_1) \le m(O \setminus F) \le \varepsilon$.

*On montre maintenant que* $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$. *Soit* $x \in K_1$. *On distingue deux cas :*

**Premier cas.** *Si* $x \in K \cap F$, *on a alors* $x \in O$. *Comme* O *est ouvert il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B(x, \delta) \subset O$ *(où* $B(x, \delta)$ *est la boule ouverte de centre x et de rayon* $\delta$*). On a donc* $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap F \subset A$, *ce qui prouve que* $f_{|K_1}$ *est constante et égale à* 1 *sur* $K_1 \cap B(x, \delta)$ *et donc* $f_{|K_1}$ *est continue en x (car constante dans un voisinage de x).*

**Deuxième cas.** *Si* $x \in K \cap O^c$, *on raisonne de manière similaire. On a* $x \in F^c$. *Comme* $F^c$ *est ouvert il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B(x, \delta) \subset F^c$. *On a donc* $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap O^c \subset A^c$, *ce qui prouve que* $f_{|K_1}$ *est constante et égale à* 0 *sur* $K_1 \cap B(x, \delta)$ *et donc* $f_{|K_1}$ *est continue en x.*

2. On suppose, dans cette question, que $f$ est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que $f$ est mesurable au sens de Lusin.

**Corrigé** –
*Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. *On pose* $f_i = 1_{A_i}$, *de sorte que* $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$.

*Soit* K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la question 1, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *il existe* $K_1^{(i)}$ *compact,* $K_1^{(i)} \subset K$, *tel que* $m(K \setminus K_1^{(i)}) \le \varepsilon/n$ *et* $(f_i)_{|K_1^{(i)}} \in C(K_1^{(i)}, \mathbb{R})$. *On prend alors :*

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^{n} K_1^{(i)}.$$

**Exercice 3.25 (Convergence en mesure)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe $f$ et $g$ fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $f$ et $g$, alors $f = g$ p.p..
   [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0$, $m(\{x \in E ; |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$.]

**Corrigé** – *Pour $h : E \to \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note toujours $\{h > \delta\} = \{x \in E ; h(x) > \delta\}$, $\{h \geq \delta\} = \{x \in E ; h(x) \geq \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E ; h(x) < \delta\}$ et $\{h \leq \delta\} = \{x \in E ; h(x) \leq \delta\}$.*

*Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. On en déduit $\{|f - f_n| \leq \frac{\delta}{2}\} \cap \{|f_n - g| \leq \frac{\delta}{2}\} \subset \{|f - g| \leq \delta\}$ et donc, en passant au complémentaire,*

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\}. \tag{3.6}$$

*Par sous additivité de m, on a donc $m(\{|f - g| > \delta\}) \leq m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\})$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$.*

*On remarque maintenant que $\{x \in E ; f(x) \neq g(x)\} = \{|f - g| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{|f - g| > \frac{1}{n}\}$ et donc, par σ-sous additivité de m, on obtient $m(\{x \in E ; f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{|f - g| > \frac{1}{n}\}) = 0$ et donc $f = g$ p.p..*

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

**Corrigé** – *Soit $\delta > 0$. En reprenant la démonstration de (3.6), on montre que*

$$\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\}.$$

*Par sous additivité de m, ceci donne $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \leq m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\})$ et donc que $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a bien montré que $f_n + g_n \to f + g$ en mesure quand $n \to +\infty$.*

3. On suppose maintenant que $m$ est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g$, alors $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.
   [On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{x \in E ; |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$.] Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = +\infty$.

**Corrigé** – *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (3.6) donne ici $\{|f_n| > k\} \subset \{|f| > \frac{k}{2}\} \cup \{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}$ et donc*

$$m(\{|f_n| > k\}) \leq m(\{|f| > \frac{k}{2}\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}). \tag{3.7}$$

*On pose $A_k = \{|f| > \frac{k}{2}\}$. On a $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$, $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ (car $f$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme E est de mesure finie, on a $m(A_k) < \infty$ (pour tout k) et on peut appliquer la continuité décroissante de m. Elle donne :*

$$m(A_k) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{3.8}$$

*Soit $\varepsilon > 0$. Par (3.8), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(A_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par la convergence en mesure de $f_n$ vers $f$, il existe alors $n_0$ tel que $m(\{|f_n - f| > \frac{k_0}{2}\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$ et l'inégalité (3.7) donne $m(\{|f_n| > k_0\}) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On en déduit (comme $\{|f_n| > k\} \subset \{|f_n| > k_0\}$ si $k \geq k_0$) :*

$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{|f_n| > k\}) \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

*On montre maintenant que $f_n g_n \to fg$ en mesure.*

*Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour cela, on remarque que $|f_n g_n - fg| \le |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc*

$$\{|f_n| \le k\} \cap \{|g_n - g| \le \frac{\delta}{2k}\} \cap \{|g| \le k\} \cap \{|f_n - f| \le \frac{\delta}{2k}\} \subset \{|f_n g_n - fg| \le \delta\}$$

*et, en passant au complémentaire,*

$$\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \subset \{|f_n| > k\} \cup \{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| > k\} \cup \{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\},$$

*ce qui donne*

$$\begin{aligned} m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) &\le m(\{|f_n| > k\}) + m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \\ &\quad + m(\{|g| > k\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

*Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0$ et $n_0$ de manière à avoir (3.9). En utilisant (3.8) avec g au lieu de $f$, il existe aussi $k_1$ tel que $m(\{|g| > k\}) \le \varepsilon$ pour $k \ge k_1$. On choisit alors $k = \max\{k_0, k_1\}$. En utilisant la convergence en mesure de $f_n$ vers $f$ et de $g_n$ vers g, il existe $n_1$ tel que $m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \le \varepsilon$ et $m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}) \le \varepsilon$ pour $n \ge n_1$. Finalement, avec $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on obtient :*

$$n \ge n_2 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \le 4\varepsilon.$$

*Ce qui prouve la convergence en mesure de $f_n g_n$ vers $fg$, quand $n \to +\infty$.*

*Pour obtenir un contre-exemple à ce résultat si $m(E) = \infty$, on prend $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \ge 1$ on définit $f_n$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on définit $g_n$ par $g_n(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n \to 0$ en mesure, $g_n \to g$ en mesure, avec $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f_n g_n \not\to 0$ en mesure car $m(\{|f_n g_n| > \delta\}) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\delta > 0$.*

**Exercice 3.26 (Convergence p.u. et convergence p.p.)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ tel que $m(A) \le \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A^c$). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *Soit $A_n \in T$ tel que $m(A_n) \le \frac{1}{n}$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A_n^c$. On pose $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, de sorte que $A \in T$ et $m(A) = 0$ car $m(A) \le m(A_n) \le \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Soit $x \in A^c$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in A_n$ et on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$. Comme $m(A) = 0$, ceci donne bien $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.*

**Exercice 3.27 (Théorème d'Egorov)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\ge n} A_{p,j}$$

1. Montrer que à $j$ fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.

**Corrigé** – *On remarque d'abord que $A_{n,j} = (|f - f_n|)^{-1}([\frac{1}{j}, \infty[) \in T$ car $|f - f_n| \in \mathcal{M}$. On a donc aussi $B_{n,j} \in T$.*

*D'autre part, comme $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$, il existe $C \in T$ tel que $m(C) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in C^c$.*

*On va montrer que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to +\infty$ (on rappelle que $j \in \mathbb{N}^*$ est fixé), en utilisant la continuité décroissante de $m$. On remarque en effet que $m(B_{n,j}) < \infty$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) car $m(E) < \infty$ (et c'est seulement ici que cette hypothèse est utile), puis que $B_{n+1,j} \subset B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité de décroissante de $m$ donne donc*

$$m(B_{n,j}) \to m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}).$$

*Or, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, on a $x \in B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_{n,j}$, c'est-à-dire $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}$. Comme $j$ est fixé, ceci montre que $f_n(x) \not\to f(x)$ quand $n \to +\infty$, et donc que $x \in C$. On en déduit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j} \subset C$ et donc que $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}) = 0$ et finalement que $m(B_{n,j}) \to 0$, quand $n \to +\infty$.*

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A^c$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.39).
   [On cherchera A sous la forme : $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$, avec un choix judicieux de $n_j$.]

   **Corrigé** – *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la question précédente donne qu'il existe $n(j) \in \mathbb{N}$ tel que $m(B_{n,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. On pose $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n(j),j}$, de sorte que $B \in T$ et, par $\sigma$-sous additivité de $m$ :*

   $$m(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{n(j),j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

   *On montre maintenant que $f_n \to f$ uniformément sur $B^c$ (ce qui conclut la question en prenant $A = B$).*

   *Comme $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}(\bigcup_{p\geq n(j)} A_{p,j})$, on a, en passant au complémentaire,*

   $$B^c = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*}(\bigcap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j}).$$

   *Soit $\eta > 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{j} \leq \eta$. Soit $x \in B^c$, comme $x \in \bigcap_{p\geq n(j)} A^c_{p,j}$, on a donc $x \in A^c_{p,j}$ pour tout $p \geq n(j)$, c'est-à-dire :*

   $$p \geq n(j) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \leq \eta.$$

   *Comme $n(j)$ ne dépend que de $j$ (et donc que de $\eta$) et pas de $x \in B^c$, ceci prouve la convergence uniforme de $f_n$ vers $f$ sur $B^c$.*

3. Montrer, par un contre–exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.

   **Corrigé** – *On prend, par exemple, $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$ (plus précisément, $\lambda$ est ici la restriction à $\mathcal{B}(]0,1[)$ de $\lambda$, qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).*

   *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in ]0,1[$).*

   *Soit maintenant $B \in \mathcal{B}(]0,1[)$ tel que $\lambda(B) = 0$. On va montrer que $f_n$ ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur $B^c$ (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$ dans le théorème d'Egorov).*

   *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Il est clair que $B^c \cap ]0, \frac{1}{n}[ \neq \emptyset$. En effet, sinon on a $]0, \frac{1}{n}[ \subset B$ et donc $\frac{1}{n} = \lambda(]0, \frac{1}{n}[) \leq \lambda(B) = 0$. Il existe donc $x \in B^c$ tel que $f_n(x) = 1$. On a donc*

   $$\sup_{x\in B^c} |f_n(x)| = 1,$$

   *ce qui prouve bien que $f_n$ ne tend pas uniformément vers 0 sur $B^c$, quand $n \to +\infty$.*

4. Montrer, par un contre–exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(E) = +\infty$.

**Corrigé** – *On prend, par exemple,* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})\lambda)$.

*Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on prend* $f_n = 1_{]n,n+1[}$, *de sorte que* $f_n \to 0$ *p.p., quand* $n \to +\infty$ *(et même,* $f_n(x) \to 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*).*

*Soit maintenant* $0 < \varepsilon < 1$ *et* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda(\mathrm{B}) \le \varepsilon$. *On va montrer que* $f_n$ *ne peut pas tendre uniformément vers* $0$ *sur* $\mathrm{B}^c$ *(ceci prouve bien que le théorème d'Egorov peut être mis en défaut si* $m(\mathrm{E}) = \infty$*).*

*Soit* $n \in \mathbb{N}$, *Il est clair que* $\mathrm{B}^c \cap ]n,n+1[ \neq \emptyset$ *(car sinon,* $]n,n+1[ \subset \mathrm{B}$ *et donc* $1 = \lambda(]n,n+1[) \le \lambda(\mathrm{B}) \le \varepsilon$, *en contradiction avec* $\varepsilon < 1$*). Il existe donc* $x \in \mathrm{B}^c$ *tel que* $f_n(x) = 1$. *On a donc*

$$\sup_{x\in \mathrm{B}^c} |f_n(x)| = 1,$$

*ce qui prouve bien que* $f_n$ *ne tend pas uniformément vers* $0$ *sur* $\mathrm{B}^c$, *quand* $n \to +\infty$.

**Exercice 3.28 (Convergence en mesure et convergence p.p.)** Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $f$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

(a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f$ presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f$ en mesure [Utiliser le théorème d'Egorov.]

**Corrigé** – *Soit* $\varepsilon > 0$, *on veut montrer que* $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} &\forall \delta > 0,\ \exists n_0,\ t.q. \\ &n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \delta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

*Soit donc* $\delta > 0$. *D'après le théorème d'Egorov (théorème 3.39 page 96), il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{A}) \le \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* $\mathrm{A}^c$. *La convergence uniforme sur* $\mathrm{A}^c$ *nous donne donc l'existence de* $n_0$ *tel que,* $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}^c$, *si* $n \ge n_0$. *On a donc, pour* $n \ge n_0$, $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset \mathrm{A}$, *et donc* $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le m(\mathrm{A}) \le \delta$. *On a bien montré (3.11) et donc la convergence en mesure de* $f_n$ *vers* $f$, *quand* $n \to +\infty$.

(b) Montrer par un contre–exemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

**Corrigé** – *L'exemple donné ici sera repris au début de la section 4.7 pour montrer que la convergence dans* $\mathrm{L}^1$ *n'entraîne pas la convergence presque partout.*

*On prend* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m) = ([0,1[,\mathcal{B}([0,1[),\lambda)$ *(on a bien* $m(\mathrm{E}) < \infty$*) et on construit ainsi la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Il existe un unique* $p \in \mathbb{N}^\star$ *et* $\frac{(p-1)p}{2} \le n < \frac{p(p+1)}{2}$. *On pose alors* $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$ *et on prend* $f_n = 1_{[\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}[}$.

*Il faut noter ici que* $k+1 \le \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = p$ *et donc* $\frac{k+1}{p} \le 1$.

*Lorsque* $n \to +\infty$, *on a* $p \to \infty$ *et donc* $m(\{|f_n| > 0\}) = \frac{1}{p} \to 0$, *ce qui prouve, en particulier, que* $f_n \to 0$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$.

*Enfin, on remarque que, pour tout* $x \in [0,1[$, $f_n(x) \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *En effet, soit* $x \in [0,1[$. *Soit* $p \in \mathbb{N}^\star$. *Il existe alors (un unique)* $k \in \{0,\ldots,p-1\}$ *tel que* $x \in [\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}[$, *de sorte que* $f_{\varphi(p)}(x) = 1$ *en choisissant* $\varphi(p) = \frac{(p-1)p}{2} + k$. *On a ainsi construit* $(f_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}^\star}$, *sous-suite de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(car* $\varphi$ *est strictement croissante de* $\mathbb{N}^\star$ *dans* $\mathbb{N}$*), t.q.* $f_{\varphi(p)}(x) \not\to 0$ *quand* $p \to +\infty$ *(puisque* $f_{\varphi(p)}(x) = 1$ *pour tout* $p$*). Ceci montre bien que* $f_n(x) \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$ mais on suppose maintenant (pour la suite de l'exercice) que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $f$.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure c'est-à-dire que

$$\forall\,\varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p, q \geq n \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta.$$

**Corrigé** –
*Notation : Pour $g$ fonction de E dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note toujours $\{g > a\}$ l'ensemble $\{x \in \mathrm{E};\ g(x) > a\}$.*

*Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)|$. On en déduit que*

$$\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\} \subset \{|f_p - f| > \varepsilon\} \cup \{|f_q - f| > \varepsilon\}.$$

*On a donc*

$$m(\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\}) \leq m(\{|f_p - f| > \varepsilon\}) + m(\{|f_q - f| > \varepsilon\}).$$

*Comme $f_n \to f$ en mesure, il existe $n_0$ tel que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \delta.$$

*On a donc*

$$p, q \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\}) \leq 2\delta.$$

*Ceci montre bien que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure.*

3. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $g$ et une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\varphi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), vérifiant la propriété suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g$ sur $\mathrm{A}^c$.
[On pourra construire $\varphi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T t.q. $m(\mathrm{A}_n) \leq 2^{-n}$ avec $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| > 2^{-n}\}$ pour tout $n$. Puis, chercher A sous la forme $\bigcup_{k\geq p} \mathrm{A}_k$, où $p$ est convenablement choisi.]

**Corrigé** – *D'après la question précédente, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc (en prenant $\varepsilon = \delta = 2^{-n}$ dans la définition donnée à la question précédente) $\psi(n) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$p, q \geq \psi(n) \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| > 2^{-n}\}) \leq 2^{-n}.$$

*Pour obtenir, à partir de $\psi$, une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on choisit alors $\varphi(0) = \psi(0)$ et $\varphi(n) = \max\{\psi(n), \varphi(n-1) + 1\}$ pour $n \geq 1$. On obtient bien une fonction $\varphi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et, comme $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq \psi(n)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$m(\mathrm{A}_n) \leq 2^{-n} \text{ avec } \mathrm{A}_n = \{|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| > 2^{-n}\}.$$

*Pour construire la fonction $g$, on pose maintenant $\mathrm{B}_p = \cup_{k\geq p} \mathrm{A}_k$ et $\mathrm{B} = \cap_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$. On va montrer que pour tout $x \in \mathrm{B}^c$ la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ (et $g(x)$ sera alors défini comme étant la limite de cette suite).*

*Soit $x \in \mathrm{B}^c$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathrm{B}_p^c$. Ceci donne $x \in \mathrm{A}_k^c$ pour tout $k \geq p$, c'est-à-dire*

$$k \geq p \Rightarrow |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq 2^{-k}. \tag{3.12}$$

*On en déduit que la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ et donc que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, pour passer de la série à la suite, il suffit de remarquer que*

$$f_{\varphi(n)}(x) = f_{\varphi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)). \tag{3.13}$$

*On a donc montré que pour tout $x \in \mathrm{B}^c$ la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et on pose alors*

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x) \text{ si } x \in \mathrm{B}^c.$$

*La fonction $g$ est ainsi définie sur $\mathrm{B}^c$. Pour qu'elle soit définie partout, on pose $g(x) = 0$ sur B. La fonction $g$ est bien mesurable car est la limite simple des fonctions $f_{\varphi(n)} 1_{\mathrm{B}^c}$ qui sont toutes mesurables (noter, en particulier, que $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ car les $\mathrm{A}_n$ sont tous dans T).*

*Soit $p \in \mathbb{N}$. On remarque maintenant que sur $B_p^c$ la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)$ converge uniformément (grâce à (3.12)). La suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc aussi uniformément sur $B_p^c$ (grâce à (3.13)). Or, par σ-sous additivité de m, on a*

$$m(B_p) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} m(A_k) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-p+1}.$$

*Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $A = B_p$ avec $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-p+1} \leq \varepsilon$ on a donc $m(A) \leq \varepsilon$ et $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (vers g) sur $A^c$.*

*Enfin, on peut aussi remarquer que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers g car $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(x)$ pour tout $x \in B^c$ et la continuité décroissante de m donne $m(B) = \lim_{p\to+\infty} m(B_p) = 0$.*

4. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f$ presque partout. [On pourra commencer par montrer que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente converge presque partout et en mesure.]

**Corrigé** – *On reprend les notations et résultats du corrigé de la question précédente. On sait déjà que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers g. On montre maintenant qu'elle converge en mesure vers g.*

*Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $m(B_p) \leq \delta$. Comme $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $B_p^c$ vers g, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\varphi(n)}(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in B_p^c$. On a donc*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \{|f_{\varphi(n)} - g| \geq \varepsilon\} \subset B_p \Rightarrow m(\{|f_{\varphi(n)} - g| \geq \varepsilon\} \leq m(B_p) \leq \delta.$$

*Ceci montre bien que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers g.*

*Comme on a déjà, par hypothèse, que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f, on a donc $f = g$ p.p. (voir la première question de l'exercice 3.25). Finalement, on obtient donc la convergence p.p. de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.*

**Exercice 3.29 (Convergence en mesure et fonctions continues)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \to X$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varphi$ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

*On a donc $\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \eta\}$ et*

$$m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq m(\{|X_n - X| > \eta\}).$$

*Comme $X_n \to X$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\{|X_n - X| > \eta\}) = 0$, on a donc aussi*

$$\lim_{n\to+\infty} m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) = 0.$$

*Ce qui prouve que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.*

2. On suppose, dans cette question, que $m$ est finie (par exemple, la mesure $m$ peut être une probabilité, on a alors $m(\Omega) = 1$, les fonctions mesurables sont des v.a.r. et la convergence en mesure est la convergence en probabilité). Soit $\varphi$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$.]

**Corrigé** – *Le fait que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$ est une conséquence de la continuité décroissante d'une mesure (on utilise ici que m est finie).*

*Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $m(\{|X| \geq a\}) \leq \delta$. Comme φ est uniformément continue sur $[-a-1, a+1]$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$x, y \in [-a-1, a+1], |x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

*En posant $\bar{\eta} = \min\{\eta, 1\} > 0$, on a aussi*

$$x \in [-a, a], |x - y| \leq \bar{\eta} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

*On a donc $\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \bar{\eta}\} \cup \{|X| \geq a\}$ et*

$$\begin{aligned} m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) &\leq m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) + m(\{|X| \geq a\}) \\ &\leq m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) + \delta. \end{aligned}$$

*Comme $X_n \to X$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) = 0$, il existe donc $n_0$ tel que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) \leq \delta.$$

*on a donc*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq 2\delta.$$

*Ce qui prouve que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.*

3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement $X_n$ et X), qu'on peut avoir $X_n \to X$ en mesure (quand $n \to +\infty$) et $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure pour certaines fonctions $\varphi$ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   **Corrigé** – *On prend $X(x) = x$ et $X_n(x) = x + 1/n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien $X_n \to X$ en mesure. On choisit $\varphi$ définie par $\varphi(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(X_n(x)) - \varphi(X(x)) = 2x/n + 1/n^2$. On en déduit que*

   $$\lambda(\{\varphi(X_n(x)) - \varphi(X(x)) \geq \varepsilon\}) = +\infty \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

   *Ce qui montre que $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure.*

**Exercice 3.30 (suite bornée et convergence en mesure)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$.
On suppose aussi qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq M$ p.p.

1. Soit $\varepsilon > 0$ Montrer que $\{|f| > M + \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n| > M\}$. En déduire que $|f| \leq M + \varepsilon$ p.p..
2. Montrer que $|f| \leq M$ p.p..

**Exercice 3.31 (Mesurabilité d'une limite p.p.)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(E, T)$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p..

1. Montrer que $f \in \mathcal{M}(E, \overline{T})$, où $(E, \overline{T}, \overline{m})$ est le complété de $(E, T, m)$ (voir le théorème 2.28).
2. En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement $(E, T, m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f$), montrer qu'on peut avoir $f \notin \mathcal{M}(E, T)$.

**Exercice 3.32 (Convergence essentiellement uniforme et presque uniforme)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \leq C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.

   **Corrigé** – *Comme $A_f \neq \emptyset$ et $\|f\|_\infty = \inf A_f$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_f$ t.q. $a_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$.*

   *Soit $n \in \mathbb{N}$, de $a_n \in A_f$ on déduit qu'il existe $B_n \in T$ tel que $m(B_n) = 0$ et $|f(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in B_n^c$.*

   *On pose $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On a donc $B \in T$ et, par $\sigma$-additivité de m, $m(B) = 0$ (car $m(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n)$). Enfin, pour tout $x \in B^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$, on a $|f(x)| \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to +\infty$, on en déduit que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$. On a donc $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p., c'est-à-dire $\|f\|_\infty \in A_f$.*

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

(a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

**Corrigé** – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathrm{A}_n^c$. On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. On a donc $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{A}) = 0$, $|(f_n - f)(x) \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$. Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur $\mathrm{A}^c$. Enfin, comme $m(\mathrm{A}) \le \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré la convergence presque uniforme de $f_n$ vers $f$.*

(b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f$), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to +\infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

**Corrigé** – *On prend, par exemple, $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 0$ et $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

*Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\mathrm{A} = [0, \varepsilon]$, de sorte que $m(\mathrm{A}) = \varepsilon$. On a bien $f_n \to 0$ uniformément sur $\mathrm{A}^c$, quand $n \to +\infty$, car $f_n = 0$ sur $\mathrm{A}^c$ pour tout $n$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc, $f_n \to f$ presque uniformément quand $n \to +\infty$.*

*Mais $f_n$ ne tend pas vers $0$ essentiellement uniformément, quand $n \to +\infty$, car $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en effet, $f_n \le 1$ sur tout $\mathbb{R}$, $f_n = 1$ sur $[0, \frac{1}{n}]$) et $\lambda([0, \frac{1}{n}]) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).*

**Exercice 3.33 (Mesurabilité des troncatures)** Soit $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f$ une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction tronquée suivante :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } f(x) > a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \le a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que $f_a$ est mesurable.

**Corrigé** – *Soit $a > 0$. On définit $\mathrm{T}_a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\mathrm{T}_a(s) = \begin{cases} a & \text{si} \quad s > a \\ s & \text{si} \quad |s| \le a \\ -a & \text{si} \quad s < -a \end{cases}$$

*La fonction $\mathrm{T}_a$ peut aussi s'écrire $\mathrm{T}_a(s) = \max\{-a, \min\{a, s\}\}$ pour $s \in \mathbb{R}$. On remarque que la fonction $\mathrm{T}_a$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne).*

*Comme $f_a = \mathrm{T}_a \circ f$, on en déduit que $f_a$ est mesurable car c'est la composée d'applications mesurables.*

**Exercice 3.34 (Mesurabilité de l'ensemble des points de convergence)** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ un espace mesurable. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). On note A l'ensemble des points $x \in \mathrm{E}$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

**Corrigé** – *Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $x \in \mathrm{A}$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $i, j$ avec $j > i \ge n$ tels que $|f_j(x) - f_i(x)| > (1/p)$. Ceci montre que*

$$\mathrm{A} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=n}^{+\infty} \bigcup_{j=i+1}^{+\infty} |f_j - f_i|^{-1}(]\frac{1}{p}, +\infty[).$$

*Comme $|f_j - f_i|^{-1}(]\frac{1}{p}, +\infty[) \in \mathrm{T}$ (car les $f_k$ sont mesurables), les propriétés de stabilité de $\mathrm{T}$ par union et intersection dénombrable donnent que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.*

**Exercice 3.35 (Tribu et partition)** Soit $\Omega$ un ensemble. On appelle partition de $\Omega$ une famille finie ou dénombrable de parties non vides de $\Omega$ et disjointes deux à deux et dont l'union est égale à $\Omega$. Les éléments d'une partition sont appelés atomes.

# Chapitre 4

# Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré $(E, T, m)$ (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), on voudrait généraliser la notion d'intégrale grâce à cet espace, c'est-à-dire introduire une application qui à $f$, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure $m$, que nous noterons $\int f dm$, tel que :

- Si $f = 1_A$, $A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,
- L'application ainsi définie soit linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f$ et $g$ définies de E dans $\mathbb{R}$,

$$\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm, \ \forall \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".
La construction de cette nouvelle intégrale se déroule, comme pour l'intégrale des fonctions continues décrite au chapitre 1 en 3 étapes, que nous pouvons dans le cas (non limitatif) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, décrire ainsi :

1. Mesurer presque toutes les parties de $\mathbb{R}$ (et pas seulement les intervalles).
2. Définir l'intégrale des fonctions étagées, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (et pas seulement des fonctions en escalier).
3. Par un passage à la limite, définir l'intégrale des fonctions limites (en un sens convenable) de fonctions étagées.

Pour être plus précis, dans l'étape 1 ci-dessus, on cherche une application

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta. \tag{4.1}$$

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n), \ \forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ si } n \neq m. \tag{4.2}$$

(Dans toute la suite de ce cours, la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ est identique à $\sum_{n=0}^{+\infty}$.)
Une telle application sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'existe pas (voir l'exercice 2.29), mais on sait qu'elle existe si on se limite à une partie convenable de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par exemple, la tribu de Borel définie précédemment.

Pour l'étape 2, on intégrera les fonctions prenant un nombre fini de valeurs et pour lesquelles chaque étage est dans la tribu de Borel et est de mesure finie. De telles fonctions seront dites étagées et intégrables.

Enfin, à l'étape 3, l'idée principale est de définir l'intégrale des fonctions positives qui sont limites croissantes d'une suite de fonctions étagées (on remplace donc la convergence uniforme utilisée pour la définition de l'intégrale des fonctions réglées par une convergence simple en croissant).

## 4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{E}_+$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Si $f \in \mathcal{E}_+$, $f$ non nulle, le lemme 3.6 nous donne, en particulier, l'existence d'une famille $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. D'autre part, le lemme 3.7 nous permet d'affirmer que, pour une fonction étagée positive qu'on écrit sous la forme : $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$, où les $\mathrm{A}_i$ sont deux à deux disjoints et les $a_i$ sont strictement positifs, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i)$ est indépendante de la décomposition choisie. On peut donc définir l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ de la manière suivante :

**Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$)** *Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et soit $f$ de $\mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}_+$). Soient $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q. $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et $n$ réels $a_1,\ldots,a_n$ strictement positifs tels que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. On définit l'intégrale de $f$, qu'on note $\int f dm$, par : $\displaystyle\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i)$ (on a donc $\int f dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$). D'autre part, si $f = 0$, on pose $\int f dm = 0$.*

**Remarque 4.2** En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ est t.q. $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et où les réels $a_1,\ldots,a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i).$$

**Proposition 4.3 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$)** *Soient $f$ et $g \in \mathcal{E}_+$, $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

- *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, et $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*
- *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.*

Démonstration – Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et $f$ et $g$ non nulles. Soit donc $f, g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après le lemme 3.6 sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } g = \sum_{j=1}^m b_j 1_{\mathrm{B}_j},$$

avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ pour tout $i$, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $\mathrm{B}_j \neq \emptyset$ pour tout $j$, $\mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $\mathrm{A}_0 = (\bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i)^c$ et $\mathrm{B}_0 = (\bigcup_{j=1}^n \mathrm{B}_j)^c$, on a aussi

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{\mathrm{B}_j}$$

et on peut écrire

$$f + g = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_i + b_j)1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j} = \sum_{(i,j)\in \mathrm{K}}(a_i + b_j)1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j},$$

avec $\mathrm{K} = \{(i,j) \in \{0,\ldots,n\} \times \{0,\ldots,m\} \setminus (0,0)\}$.

On a donc $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int (f+g)dm = \sum_{(i,j)\in \mathrm{K}}(a_i + b_j)m(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int (f+g)dm &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i m(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_j m(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j m(\mathrm{B}_j)\end{aligned}$$

(car $(\mathrm{A}_0,\ldots,\mathrm{A}_n)$ et $(\mathrm{B}_0,\ldots,\mathrm{B}_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré que

$$\int (f+g)dm = \int f dm + \int g dm.$$

Il reste à montrer la monotonie. Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ (on rappelle que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.9) ; et comme $\int (f-g)dm \geq 0$, la linéarité positive nous donne que

$$\int f dm = \int (f-g)dm + \int g dm \geq \int g dm.$$

. ■

**Remarque 4.4**

1. Une conséquence directe de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de $f$ : $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1,\ldots,a_n \geq 0$ et $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ (on ne suppose plus $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité positive :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{\mathrm{A}_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i),$$

en posant $a_i m(\mathrm{A}_i) = 0$ si $a_i = 0$.

2. Une conséquence de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, on a :

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

## 4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

**Lemme 4.5** *Soient* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$*, et* $g \in \mathcal{E}_+$*, tels que :*

- *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in$ E,*
- *$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in$ E,*

*alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, dm \geq \int g \, dm. \tag{4.3}$$

*Noter que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$, donc sa limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

DÉMONSTRATION – Pour $x \in$ E, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cette limite existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il se peut que $f \notin \mathcal{E}_+$, mais on a toujours $f \in \mathcal{M}_+$ et les hypothèses du lemme donnent $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Soit $\alpha \in ]0,1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}\,;\, \alpha g(x) \leq f_n(x)\}.$$

On a donc

$$\mathrm{A}_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0,+\infty[) \in \mathrm{T}, \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$$

(car $f_n \leq f_{n+1}$) et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. En effet, si $x \in$ E, on distingue deux cas :

1. Si $g(x) = 0$, alors $x \in \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$,
2. Si $g(x) > 0$, on a alors

$$\alpha g(x) < g(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

   Il existe donc $n_x$ (dépendant de $x$) tel que $x \in \mathrm{A}_n$ pour $n \geq n_x$. Donc, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

On a donc bien montré que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

(Comme $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(\alpha g 1_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et en croissant vers la fonction $\alpha g$.)

On remarque maintenant que $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \in \mathcal{E}_+$, $f_n \in \mathcal{E}_+$ et que, grâce à la définition de $\mathrm{A}_n$, on a $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \leq f_n$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm \leq \int f_n dm. \tag{4.4}$$

En utilisant la décomposition canonique de $g$ (lemme 3.6), il existe une famille $(b_i, \mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p}$ telle que $0 < b_1 < \ldots < b_p$, $\mathrm{B}_i \neq \emptyset$ pour tout $i$, $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $g = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{\mathrm{B}_i}$. On a donc

$$\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i 1_{\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n}$$

et donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n).$$

Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap \mathrm{E} = \mathrm{B}_i$, la continuité croissante de $m$ donne $m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) \to m(\mathrm{B}_i)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i m(\mathrm{B}_i) = \int \alpha g dm.$$

On peut donc passer à la limite, quand $n \to +\infty$, dans (4.4) et obtenir :

$$\int \alpha g dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

Enfin, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne $\int \alpha g dm = \alpha \int g dm$. On conclut la démonstration du lemme en faisant tendre $\alpha$ vers 1. ■

**Remarque 4.6** Dans la démonstration précédente, on a besoin de $\alpha < 1$ pour pouvoir écrire $\alpha g(x) \le f_n(x)$ pour $n \ge n_x$, avec $n_x \in \mathbb{N}$ pouvant dépendre de $x$. Un tel $n_x$ pourrait ne pas exister en prenant $\alpha = 1$.

Le lemme suivant est une conséquence simple du lemme 4.5.

**Lemme 4.7** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Soient deux suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+$ *convergeant simplement et en croissant vers* $f$. *On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm. \tag{4.5}$$

DÉMONSTRATION –
On applique le lemme 4.5 avec $g = g_p$, $p$ fixé. On obtient $\int g_p dm \le \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm$. Puis, en passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{p\to+\infty} \int g_p dm \le \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

On obtient enfin (4.5) en changeant les rôles de $f_n$ et $g_p$. ■

Le lemme 4.7 permet donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

**Définition 4.8 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré, et* $f \in \mathcal{M}_+$. *D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *telle que* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire :*

- *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$,
- $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

*On définit l'intégrale de* $f$ *en posant :*

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \quad (\in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives :

**Lemme 4.9** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors*

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}.$$

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.
La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f_n\}$ (voir la remarque 4.4). Comme $f_n \le f$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f_n\} \le \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}.$$

La définition de $\int f dm$ donne alors :

$$\int f dm \le \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, considérons une fonction $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \le f$. Comme $f_n \uparrow f$, le lemme 4.5 donne

$$\int g dm \le \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm.$$

On a donc

$$\sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \le f\} \le \int f dm.$$

■

**Proposition 4.10 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$)** *Soient $f$ et $g \in \mathcal{M}_+$, $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

- *linéarité positive :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$, *et* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,
- *monotonie :* $f \ge g \Rightarrow \int f dm \ge \int g dm$.

DÉMONSTRATION – La linéarité positive se démontre de manière très simple à partir de la linéarité positive sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.3). et de la définition 4.8.

La monotonie est une conséquence immédiate du lemme 4.9. ■

**Remarque 4.11 (A propos de $(+\infty) \times 0 \ldots$)** Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$. On note $\mathrm{I}_\mathrm{A}$ la fonction indicatrice de l'ensemble A. Cette fonction est définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $\mathrm{I}_\mathrm{A}(x) = +\infty$ si $x \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{I}_\mathrm{A}(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{A}$. Cette fonction est souvent notée aussi $(+\infty)1_\mathrm{A}$. Il est clair que $\mathrm{I}_\mathrm{A} \in \mathcal{M}_+$ et que $\mathrm{I}_\mathrm{A}$ est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n 1_\mathrm{A}$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int \mathrm{I}_\mathrm{A} dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

**Lemme 4.12** *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. On note $f 1_\mathrm{A} \in \mathcal{M}_+$ la fonction définie par $f 1_\mathrm{A}(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{A}$ et $f 1_\mathrm{A}(x) = 0$ si $x \in \mathrm{A}^c$. On définit $\int_\mathrm{A} f dm$ par $\int f 1_\mathrm{A} dm$. On suppose que $m(\mathrm{A}) = 0$. Alors, $\int_\mathrm{A} f dm = 0$.*
2. *Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int f dm = \int g dm$.*
3. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = 0$.*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$. Soit $\mathrm{I}_\mathrm{A}$ la fonction indicatrice de l'ensemble A (définie dans la remarque 4.11). On a évidemment $f 1_\mathrm{A} \le \mathrm{I}_\mathrm{A}$ et donc, par monotonie, $\int f 1_\mathrm{A} dm = 0$.

2. Soit $f$, $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f 1_{\mathrm{A}^c} = g 1_{\mathrm{A}^c}$. On a donc $f 1_{\mathrm{A}^c}$, $g 1_{\mathrm{A}^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f 1_{\mathrm{A}^c} dm = \int g 1_{\mathrm{A}^c} dm$. D'autre part, comme $\int f 1_\mathrm{A} dm = \int g 1_\mathrm{A} dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive

$$\int f dm = \int f 1_{\mathrm{A}^c} dm + \int f 1_\mathrm{A} dm = \int f 1_{\mathrm{A}^c} dm$$

(et de même pour $g$). Donc,

$$\int f dm = \int g dm.$$

3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. ■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

**Définition 4.13 (Intégrabilité sans mesurabilité)** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $f$ *définie sur* $A^c$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\overline{\mathbb{R}}_+$*), avec* $A \in T$*,* $m(A) = 0$ *(on dit que* $f$ *est définie p.p., car* $f$ *n'est pas définie sur* $A$*).*

1. *$f$ est m-mesurable (resp. m-mesurable positive) s'il existe $g \in \mathcal{M}$ (resp. $g \in \mathcal{M}_+$) t.q. $f = g$ p.p.. (c'est-à-dire qu'il existe $B \in T$ tel que $m(B) = 0$, $B \supset A$ et $f = g$ sur $B^c$).*
2. *Soit $f$ m-mesurable positive. On pose $\int f dm = \int g dm$, avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de $g$, grâce au lemme 4.12).*

**Remarque 4.14** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré. Il est facile de montrer les résultats suivants :

1. Soit $f$ de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im} f) < +\infty$.
2. Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f$ de $A^c$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $f$ est $m$-mesurable si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p. (voir l'exercice 4.18).
3. Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f$ de $A^c$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f$ est $m$-mesurable positive si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev (voir la section 4.9) en découlent facilement.

**Lemme 4.15** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $t \in \mathbb{R}_+^*$ *; alors :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f dm. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION – On définit $A_t = \{f \geq t\} = \{x \in E\,;\, f(x) \geq t\}$. On a $A_t \in T$ et $f \geq t 1_{A_t}$. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.6. ■

## 4.3 Convergence monotone et lemme de Fatou

**Théorème 4.16 (Convergence monotone (1))** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in E$*. On pose, pour tout* $x \in E$*,* $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$*. Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f_n dm \to \int f dm$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

DÉMONSTRATION –
Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge simplement et en croissant vers $f$, la proposition 3.19 donne $f \in \mathcal{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \leq \int f dm.$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm \geq \int f\,dm. \tag{4.7}$$

Pour montrer (4.7), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p\to\infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in\mathcal{M}_+$ ; il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}_+$ t.q. $f_{n,p}\uparrow f_n$ lorsque $p$ tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p}$$

On note que :

1. $g_p\in\mathcal{E}_+$ car $g_p$ est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_+$ (donc $g_p$ est mesurable, $\mathrm{Im}(g_p)\subset\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g_p))<\infty$, ce qui donne $g_p\in\mathcal{E}_+$).
2. $g_{p+1}\geq g_p$, pour tout $p\in\mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1}\geq f_{n,p}$ (pour tout $n$ et $p$), on a
$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1},\sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$
On peut donc définir, pour $x\in\mathrm{E}$, $g(x)=\lim_{p\to\infty} g_p(x)\in\overline{\mathbb{R}}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).
3. $g=f$. En effet, on remarque que $g_p\geq f_{n,p}$ si $n\leq p$. On fixe $n$ et on fait tendre $p$ vers l'infini, on obtient $g\geq f_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En faisant $n\to+\infty$ on en déduit $g\geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p}\leq f_n\leq f$ pour tout $n$ et tout $p$. On a donc $g_p\leq f$ pour tout $p$. En faisant $p\to\infty$ on en déduit $g\leq f$. On a bien montré que $f=g$.
4. $g_p\leq f_p$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p}\leq f_n\leq f_p$ si $n\leq p$. On a donc $g_p=\sup_{n\leq p} f_{n,p}\leq f_p$.

Les points 1 à 3 ci-dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}\in\mathcal{E}_+$ et $g_p\uparrow f$ quand $p\to\infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f\,dm=\lim_{p\to\infty}\int g_p dm$.

Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) $\int g_p dm\leq\int f_p dm$, on en déduit

$$\int f\,dm = \lim_{p\to\infty}\int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty}\int f_p dm.$$

Finalement, on obtient bien $\int f\,dm=\lim_{p\to\infty}\int f_p dm$. ■

On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone, où l'on suppose seulement une convergence en croissant presque partout de la suite de fonctions :

**Théorème 4.17 (Convergence Monotone (2))** *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n\uparrow f$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $\mathrm{A}\in\mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{A})=0$ *et* $f_n(x)\uparrow f(x)$ *pour tout* $x\in\mathrm{A}^c$*). La fonction* $f$ *(définie p.p.) est alors m−mesurable positive (c'est-à-dire que il existe* $g\in\mathcal{M}_+$ *t.q.* $f=g$ *p.p.) et* $\int f_n dm\to\int f\,dm$.
*On rappelle que, par définition (voir la définition 4.13),* $\int f\,dm=\int g\,dm$ *avec* $g\in\mathcal{M}_+$ *t.q.* $f=g$ *p.p..*

Démonstration – Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A})=0$ et $f_n\uparrow f$ sur $\mathrm{A}^c$, quand $n\to+\infty$. On pose $g_n=f_n 1_{\mathrm{A}^c}$ (c'est-à-dire $g_n(x)=f_n(x)$ si $x\in\mathrm{A}^c$ et $g_n(x)=0$ si $x\in\mathrm{A}$). On a $g_n\in\mathcal{M}_+$ et $g_n\uparrow g$ avec $g=f1_{\mathrm{A}^c}$ (c'est-à-dire $g(x)=f(x)$ si $x\in\mathrm{A}^c$ et $g(x)=0$ si $x\in\mathrm{A}$). Comme $g\in\mathcal{M}_+$ et $f=g$ p.p., on a donc $f$ $m$−mesurable positive. Puis, le théorème 4.16 donne $\int g_n dm\to\int g\,dm$ quand $n\to+\infty$. D'autre part, on a $\int g_n dm=\int f_n dm$ (car $f_n=g_n$ p.p.) et $\int g\,dm=\int f\,dm$ (par définition de $\int f\,dm$), donc

$$\int f_n dm\to\int f\,dm.$$

■

**Corollaire 4.18 (Séries à termes positifs ou nuls)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *; on pose, pour tout* $x \in E$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm$.

DÉMONSTRATION – On applique le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{p=0}^{n} \int f_p dm = \int g_n dm \to \int f dm.$$

■

**Lemme 4.19 (Fatou)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$.
*On pose, pour tout* $x \in E$,

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

*Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm).$$

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ (pour tout $x \in E$), de sorte que $g_n \in \mathcal{M}_+$ (cf. proposition 3.19) et $g_n \uparrow f$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int f dm$. Or, $g_n \leq f_p$ si $p \geq n$. On a donc $\int g_n dm \leq \int f_p dm$ si $p \geq n$ et donc (en fixant $n$) $\int g_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int f_p dm$. On en déduit

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm) = \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

■

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable (voir les paragraphes suivants). On utilise pour cela le corollaire (immédiat) suivant :

**Corollaire 4.20** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$, *pour presque tout* $x \in E$, *lorsque* $n \to +\infty$. *On suppose qu'il existe* $C \geq 0$ *tel que* $\int f_n dm \leq C$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors,* $f$ *est* $m$*−mesurable positive et* $\int f dm \leq C$.

DÉMONSTRATION – Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \to f$ p.p., on a bien $f$ $m$-mesurable positive. On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ (c'est-à-dire $g(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$). On a donc $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p. donc $\int f dm = \int g dm$ par définition de l'intégrale des fonctions $m$-mesurables (définition 4.13).

Le lemme de Fatou donne $\int f dm = \int g dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm$ et donc $\int f dm \leq \mathrm{C}$ car $\int f_n dm \leq \mathrm{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

## 4.4 Mesures et probabilités de densité

### 4.4.1 Définitions

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

**Définition 4.21 (Mesure de densité)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$*. Pour* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*, on rappelle que* $f 1_\mathrm{A}$ *est la fonction (de* $\mathrm{E}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) définie par* $f 1_\mathrm{A}(x) = f(x)$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $f 1_\mathrm{A}(x) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$ *(cette fonction appartient à* $\mathcal{M}_+$*) et on définit* $\int_\mathrm{A} f dm$ *par* $\int f 1_\mathrm{A} dm$*.*

*On définit alors* $\mu : \mathrm{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par :*

$$\mu(\mathrm{A}) = \int f 1_\mathrm{A} dm = \int_\mathrm{A} f dm, \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{T}.$$

*L'application* $\mu$ *ainsi définie est une mesure sur* $\mathrm{T}$ *(ceci est démontré dans l'exercice 4.26), appelée mesure de densité* $f$ *par rapport à* $m$*, et notée* $\mu = fm$*.*

**Proposition 4.22** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\mu$ *la mesure de densité* $f$ *par rapport à* $m$*. Alors, la mesure* $\mu$ *est absolument continue par rapport à la mesure* $m$*, c'est-à-dire que si* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *est tel que* $m(\mathrm{A}) = 0$*, alors* $\mu(\mathrm{A}) = 0$*.*

DÉMONSTRATION – Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$. On a alors $f 1_\mathrm{A} = 0$ $m$-p.p. et donc $\mu(\mathrm{A}) = \int f 1_\mathrm{A} dm = 0$ d'après le lemme 4.12. ■

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac en 0, définie en (2.2), n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.29 et proposition 2.30).
Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité, voir la définition 6.74.

### 4.4.2 Exemples de probabilités de densité

**Définition 4.23 (Probabilité de densité)** *Soit* $p$ *une probabilité sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on dit que* $p$ *est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe* $f \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $\int f d\lambda = 1$ *et* $p(\mathrm{A}) = \int f 1_\mathrm{A} d\lambda = \int_\mathrm{A} f d\lambda$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Les lois de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, données dans la proposition suivante seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités. (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

**Définition 4.24 (Quelques lois de densité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)** *On donne ici trois exemples de lois de densité.*

1. *Loi uniforme, $\mathcal{U}(a,b)$ Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}$ : $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{b-a}\int 1_{[a,b]}1_{\mathrm{A}}d\lambda$, $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Loi exponentielle, $\mathcal{E}(\tau)$ Soit $\tau > 0$ ; la loi exponentielle est définie par la densité $f$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ \tau e^{-\tau x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

3. *Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ Soit $(\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ; la loi de Gauss de paramètre $(\mu,\sigma)$ est définie par la densité $f$ définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

## 4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathcal{M}$, la proposition 3.23 donne que $|f|$, $f^+$, $f^- \in \mathcal{M}_+$ et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne

$$\int f^+ dm \leq \int |f| dm \text{ et } \int f^- dm \leq \int |f| dm.$$

Ceci va nous permette de définir l'espace $\mathcal{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ (définition 4.8 page 125).

**Définition 4.25 (Espace $\mathcal{L}^1$ et intégrale de Lebesgue)** *Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$. On dit que $f$ est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si $\int |f| dm < +\infty$. Dans ce cas, on a aussi*

$$\int f^+ dm < +\infty \text{ et } \int f^- dm < +\infty.$$

*On pose alors :*

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \;\; (\in \mathbb{R}).$$

*On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions intégrables.*

Soit $f \in \mathcal{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm$. On voit donc que $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$.

**Proposition 4.26 (Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$)**
*Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. On a alors :*

1. *$\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $f \mapsto \int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.*

*3. Monotonie : soient $f$ et $g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \le g$ ; alors $\displaystyle\int f dm \le \int g dm$.*

*4. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int f dm| \le \int |f| dm$.*

DÉMONSTRATION –

1. On sait déjà que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.19). Pour montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer, en utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f+g| dm \le \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int \alpha f dm = \alpha \int f dm. \tag{4.8}$$

Cas 1. Si $\alpha = 0$, (4.8) est bien vraie.

Cas 2. Si $\alpha > 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = \alpha(\int f^+ dm - \int f^- dm) = \alpha \int f dm$.

Cas 3. Si $\alpha < 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ et $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = (-\alpha)(\int f^- dm - \int f^+ dm) = \alpha \int f dm$.

(b) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

On utilise les deux décompositions de $f+g$ : $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. On en déduit $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit

$$\int (f+g)^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int (f+g)^- dm + \int f^+ dm + \int g^+ dm.$$

On en déduit (noter que tous les termes de l'égalité précédente sont dans $\mathbb{R}_+$)

$$\int (f+g)^+ dm - \int (f+g)^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm,$$

et donc $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

On a bien montré que l'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \le g$. On remarque que $f^+ - f^- \le g^+ - g^-$, donc $f^+ + g^- \le g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit que

$$\int f^+ dm + \int g^- dm \le \int g^+ dm + \int f^- dm$$

et donc que

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \le \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $|\int f dm| = |\int f^+ dm - \int f^- dm| \le \int f^+ dm + \int f^- dm = \int |f| dm$.

■

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi–norme de la manière suivante :

**Définition 4.27 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{L}^1$. *On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm.$$

*L'application de* $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $f \mapsto \|f\|_1$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}_1$.

On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1$. Le fait que $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$ découle alors de la partie 1 de la démonstration de la proposition 4.26, c'est-à-dire du fait que

$$\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm \text{ et } \int |f + g| dm \le \int |f| dm + \int |g| dm,, \ \forall f, g \in \mathcal{M}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Par contre, $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ mais seulement $f = 0$ p.p., comme cela est démontré à la proposition suivante.

**Proposition 4.28** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré.*

*1. Soit* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors* $\int f dm = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*

*2. Soit* $f \in \mathcal{L}^1$. *Alors* $\|f\|_1 = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*

*3. Soit* $f, g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Alors* $\int f dm = \int g dm$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$.
   (a) On suppose que $f = 0$ p.p.. On a alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. (ceci est donné par le troisième point du lemme 4.12.)
   (b) On suppose que $\int f dm = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le lemme 4.15 page 127 donne $\int f dm \ge \frac{1}{n} m(\{f \ge \frac{1}{n}\})$. On a donc
   $$m(\{f \ge \frac{1}{n}\}) = 0 \text{ et } m(\{f > 0\}) \le \sum_{n \in \mathbb{N}^*} m(\{f \ge \frac{1}{n}\}) = 0$$
   (on a utilisé ici la σ-sous additivité de $m$). Comme $\{f = 0\}^c = \{f > 0\}$, on en déduit $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. La propriété démontrée ci-dessus donne $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p., et donc $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On a
   $$|\int f dm - \int g dm| = |\int (f - g) dm| \le \int |f - g| dm = 0$$
   (on a utilisé le quatrième point de la proposition 4.26 et $|f - g| = 0$ p.p.). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

La dernière assertion de la proposition précédente nous permettra, dans la prochaine section, de définir l'intégrale sur un espace appelé $L^1$.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

**Proposition 4.29** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le g$ *p.p.. On a alors* $f \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *et* $\int f_n dm \to \int f dm$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$, Il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$. Puis, comme $|f_n| \le g$ p.p., il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in T$ tel que $m(B_n) = 0$ et $|f_n| \le g$ sur $B_n^c$. On pose $C = A \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Par σ-sous additivité de $m$, on a aussi $m(C) = 0$. On pose alors $h_n = f_n 1_{C^c}$, $h = f 1_{C^c}$ $G = g 1_{C^c}$, de sorte que $h_n = f_n$ p.p., $h = f$ p.p. et $G = g$ p.p.. De plus les fonctions $h_n$, $h$ et G sont toujours mesurables et donc $h_n \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{L}^1$.

Comme $|h_n(x)| \le G(x)$ pour tout $x \in E$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in E$. On a aussi $|h| \le G$. Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^1$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

On pose maintenant $F_n = 2G - |h_n - h|$. Comme $|h_n - h| \le 2G$, on a $F_n \in \mathcal{M}_+$ et on peut donc appliquer le lemme de Fatou (lemme 4.19) à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\liminf_{n\to+\infty} F_n = 2G$, on obtient :

$$\int 2G dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\ge n} \int (2G - |h_n - h|) dm). \tag{4.9}$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ donne $\int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \int |h_n - h| dm$. Donc :

$$\inf_{p\ge n} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \sup_{p\ge n} \int |h_n - h| dm$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm.$$

L'inégalité 4.9 devient alors (en remarquant que $\int 2G dm \in \mathbb{R}$) :

$$\limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm \le 0.$$

On a donc $\|h_n - h\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$ et, comme $h_n - h = f_n - f$ p.p., on en déduit $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et donc $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$ (grâce au quatrième point de la proposition 4.26). ■

## 4.6 L'espace $L^1$

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré $(E, T, m)$.

On définit maintenant une relation d'équivalence, l'égalité presque partout, notée $(= p.p.)$, sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ (= p.p.) \ g \text{ si } f = g \ \ p.p..$$

**Définition 4.30 (L'espace $L^1$)** *L'ensemble $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $(= p.p.)$ définie sur $\mathcal{L}^1$, i.e. $L^1 = \mathcal{L}^1/(= p.p.)$.*

Dans la suite, $L^1$ désigne $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

**Remarque 4.31**

1. Un élément de $L^1$ est donc une partie de $\mathcal{L}^1$.
2. Si $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^1 ; g = f \text{ p.p.}\}$. $\tilde{f}$ est donc un élément de $L^1$, c'est l'élément de $L^1$ auquel $f$ appartient (on l'appelle la classe de $f$).

**Définition 4.32 (Structure vectorielle sur $L^1$)** *On munit $L^1$ d'une structure vectorielle (faisant de $L^1$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$)*

*1. Soient $F \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et on pose $\alpha F = \{g \in \mathcal{L}^1 \; ; \; g = \alpha f \text{ p.p.}\}$.*

*2. Soient $F, G \in L^1$. On choisit $f \in F$, $g \in G$ et on pose $F + G = \{h \in \mathcal{L}^1 \; ; \; h = f + g \text{ p.p.}\}$.*

La définition précédente est bien cohérente. En effet $\alpha F$ (qui est la classe de $\alpha f$) ne dépend pas du choix de $f$ dans F car $f = f_1$ p.p. implique $\alpha f = \alpha f_1$ p.p.. De même $F + G$ (qui est la classe de $f + g$) ne dépend pas du choix de $f$ dans F et du choix de $g$ dans G car $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. implique $f + g = f_1 + g_1$ p.p..

**Définition 4.33 (Intégrale sur $L^1$)** *Soit $F \in L^1$ et $f \in F$ (on dit que $f$ est un représentant de la classe F, noter que $f \in \mathcal{L}^1$). On pose :*

$$\int F dm = \int f dm.$$

Ici aussi cette définition est bien cohérente car $\int F dm$ ne dépend pas du choix de $f$ dans F, grâce au troisième point de la proposition 4.28. Le troisième point de la proposition 4.28 nous donne aussi $\|f\|_1 = \|g\|_1$ si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f = g$ p.p.. Ceci nous permet de définir une norme sur $L^1$ :

**Définition 4.34 (Norme sur $L^1$)** *Soit $F \in L^1$. On choisit $f \in F$ et on pose $\|F\|_1 = \|f\|_1$.*

**Proposition 4.35** *L'application $F \mapsto \|F\|_1$ est une norme sur $L^1$. L'espace $L^1$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est donc un espace vectoriel normé.*

Démonstration – Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$ (sachant que c'est déjà une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$). Le seul point délicat est de remarquer que $\|F\|_1 = 0$ implique que $F = 0$ (0 est ici l'élément neutre de $L^1$, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1 \; ; \; h = 0 \text{ p.p.}\}$). Ceci découle du premier point de la proposition 4.28. ■

**Notation :** Soit $F \in L^1$ et $A \in T$, on notera $F1_A$ la classe de $f1_A$ si $f \in F$ et on a donc $F1_A \in L^1$. Cette définition est cohérente car la classe de $f1_A$ ne dépend pas du choix de $f$ dans F. On notera alors, comme cela a été fait dans $\mathcal{M}_+$ (voir le lemme 4.12),

$$\int_A F dm = \int F1_A dm.$$

On montrera plus loin que $L^1$ est complet, c'est donc un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach, voir le théorème 4.48 page 140.

On rappelle que si $f \in \mathcal{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que $f$ est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans $L^1$. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de $L^1$.

La notion de convergence simple n'a pas de sens dans $L^1$, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de $L^1$ ainsi que la notion de convergence en mesure.

**Définition 4.36 (Convergence p.p., en mesure et dans** $\mathrm{L}^1$**)** *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré.*

1. *Soient* $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$. *On dit que* $\mathrm{F}_n \to \mathrm{F}$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$*, avec* $f_n \in \mathrm{F}_n$ *et* $f \in \mathrm{F}$.
2. *Soient* $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$. *On dit que* $\mathrm{F}_n \to \mathrm{F}$ *en mesure quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$*, avec* $f_n \in \mathrm{F}_n$ *et* $f \in \mathrm{F}$.
3. *Soient* $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$. *On dit que* $\mathrm{F}_n \to \mathrm{F}$ *dans* $\mathrm{L}^1$ *quand* $n \to +\infty$ *si* $\|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *(Ici aussi, noter que* $\|\mathrm{F}_n - \mathrm{F}\|_1 = \|f_n - f\|_1$ *si* $f_n \in \mathrm{F}_n$ *et* $f \in \mathrm{F}$.*)*
4. *Soient* $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathrm{L}^1$. *On dit que* $\mathrm{F} \geq \mathrm{G}$ *p.p. si* $f \geq g$ *p.p. avec* $f \in \mathrm{F}$ *et* $g \in \mathrm{G}$.

On peut démontrer (s'inspirer de la démonstration du théorème 4.49 et voir les exercices du chapitre 3) que si une suite de fonctions de $\mathrm{L}^1$ converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure $m$ est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

**Remarque 4.37** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathrm{L}^1$. $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ est donc équivalent à $f = g$ p.p. si $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$. En général, on écrira plutôt $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ p.p. au lieu de $\mathrm{F} = \mathrm{G}$ (voir la remarque 4.40).

**Remarque 4.38** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soient $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathrm{E} \to \overline{\mathbb{R}}$). On utilisera souvent la notation (légèrement incorrecte), "$\mathrm{F}_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$". Cette notation signifie "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" en choisissant $f_n \in \mathrm{F}_n$. Ceci est cohérent car le fait que "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" ne dépend pas du choix de $f_n$ dans $\mathrm{F}_n$ (voir aussi la remarque 4.40).

En fait, on écrira même souvent "$\mathrm{F}_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" (pour une suite $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$) sans préciser les espaces de départ et d'arrivée pour $f$. A vrai dire, en choisissant $f_n \in \mathrm{F}_n$, $f$ est au moins définie p.p. sur E et le changement du choix de $f_n$ dans $\mathrm{F}_n$ ne change $f$ que sur un ensemble de mesure nulle. D'autre part, en l'absence de précision, $f$ sera supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Proposition 4.39 (Propriétés de l'intégrale sur** $\mathrm{L}^1$**)** *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. On a alors :*

1. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$. *Alors* $|\int \mathrm{F} dm| \leq \|\mathrm{F}\|_1$.
2. *Linéarité : $\mathrm{F} \mapsto \int \mathrm{F} dm$ est une application linéaire continue de* $\mathrm{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}$.
3. *Monotonie : Soient* $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathrm{L}^1$ *t.q.* $\mathrm{F} \geq \mathrm{G}$ *p.p., alors* $\int \mathrm{F} dm \geq \int \mathrm{G} dm$.

DÉMONSTRATION – 1. Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ et $f \in \mathrm{F}$, on a $|\int \mathrm{F} dm| = |\int f dm| \leq \|f\|_1 = \|\mathrm{F}\|_1$.

2. La linéarité de l'intégrale sur $\mathrm{L}^1$ découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26). La continuité est donné par le premier point ci-dessus.
3. La monotonie de l'intégrale sur $\mathrm{L}^1$ découle immédiatement de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26).

■

**Remarque 4.40** soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré.

1. On confondra dans la suite un élément F de $\mathrm{L}^1$ avec un représentant $f$ de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \in \mathrm{F}$.
2. De manière plus générale, soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A}^c$ soit négligeable (c'est-à-dire $\mathrm{A}^c \subset \mathrm{B}$ avec $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$) et soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ (la fonction $f$ est donc définie p.p.). On dira que $f$ est un élément de $\mathrm{L}^1$ s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction $f$ avec la classe d'équivalence de $g$, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^1 ; h = g \text{ p.p.}\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^1 ; h = f \text{ p.p.}\}$. En confondant ainsi $f$ et $\tilde{g}$ on a donc $\int f dm = \int g dm$. Noter également que $f$ est $m$-mesurable (voir la définition 4.13 page 127).

3. Avec la confusion décrite ci-dessus, si $f$ et $g$ sont des éléments de $\mathrm{L}^1$, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

**Remarque 4.41** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{T}}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.26 et exercice 2.26). L'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est "identique" à l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{T}}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{T}}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (voir à ce propos l'exercice 4.11).

Pour montrer qu'une fonction est dans $\mathrm{L}^1$ on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (c'est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.19) :

**Lemme 4.42 (Utilisation de Fatou)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *On suppose que :*

*1.* $f_n \geq 0$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\exists \mathrm{C}, \int f_n dm \leq \mathrm{C}, \forall n \in \mathbb{N}$,

*3.* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to \infty$,

*alors* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\int |f| dm \leq \mathrm{C}$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans $\mathrm{L}^1$ en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.43 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans $\mathrm{L}^1$).

## 4.7 Théorèmes de convergence dans $\mathrm{L}^1$

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de $\mathrm{L}^1$, les notions de convergence presque partout, convergence en mesure et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c'est-à-dire ici la convergence pour la norme $\mathrm{L}^1$. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence $\mathrm{L}^1$, et que la convergence $\mathrm{L}^1$ n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence $\mathrm{L}^1$, on peut considérer l'espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n 1_{]0,\frac{1}{n}]}$. On a évidemment $f_n \to 0 \;\; pp$, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence $\mathrm{L}^1$ n'entraîne pas la convergence presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (dite "bosse glissante", voir figure 4.7) définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. On peut voir facilement que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0 \;\; pp$ (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans $\mathrm{L}^1$.

On rappelle (voir la remarque 4.38) que l'hypothèse "$(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{F}_n \to f$ p.p." signifie simplement que $f_n \to f$ p.p. en choisissant $f_n \in \mathrm{F}_n$. Cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix des $f_n$ dans $\mathrm{F}_n$. On rappelle aussi que $f_n \to f$ p.p. signifie qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$.

### 4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans $\mathrm{L}^1$

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans $\mathrm{L}^1$ d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

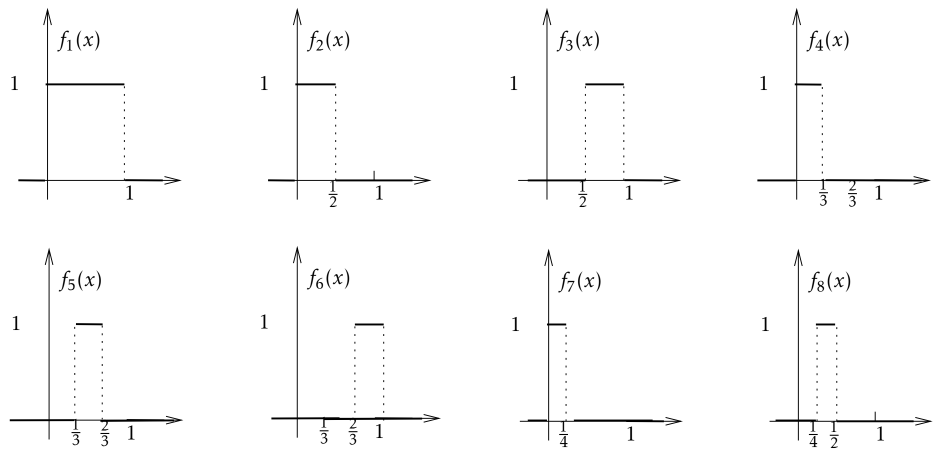


FIGURE 4.1 – La bosse glissante

**Théorème 4.43 (Beppo–Lévi)** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On suppose que :*

*1.* $f_{n+1} \geq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *[ou* $f_{n+1} \leq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$*],*

*2.* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$.

*On a alors :*

*1.* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}.$$

*2. Si* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, *alors* $f_n \to f$ *dans* $L^1$.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.32.
Nous allons maintenant voir un résultat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans $L^1$ sans hypothèse de convergence monotone.

**Théorème 4.44 (Convergence dominée)** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est noté* $L^1$ . *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $f$ *une fonction de* $E$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

*1.* $f_n \to f$ *p.p.*

*2.* $\exists F \in L^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq F$ *p.p..*

*Alors* $f \in L^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* $L^1$, *c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

*Ceci donne aussi* $\int f_n dm \to \int f dm$*, lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Ce théorème est essentiellement donné par la proposition 4.29. La différence avec la proposition 4.29 tient dans le fait que $f_n$ et F sont dans $\mathrm{L}^1$ au lieu de $\mathcal{L}^1$ et que $f$ n'est pas nécessairement mesurable. Il s'agit toutefois de différences mineures comme nous le voyons ci après.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de $f_n$, encore noté $f_n$. La première hypothèse du théorème signifie que $f_n \to f$ p.p. (voir la remarque 4.38). Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{A}^c$. On remplace alors $f_n$ par $f_n 1_{\mathrm{A}^c}$, encore noté $f_n$ (c'est toujours un représentant de la même classe d'équivalence car $m(\mathrm{A}) = 0$). On définit aussi $g$ par $g = f$ sur $\mathrm{A}^c$ et $g = 0$ sur A. Enfin, on choisit un représentant de F, encore noté F. On obtient ainsi :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$,
2. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, quand $n \to +\infty$,
3. $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les 2 premiers items donnent aussi $g \in \mathcal{M}$ (par la proposition 3.19, on utilise ici le fait que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et pas seulement pour presque tout $x$). On peut donc appliquer la proposition 4.29 page 133. Elle donne : $g \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$ et $\int f_n dm \to \int g dm$, quand $n \to +\infty$.

Comme $g = f$ p.p., on a donc $f \in \mathrm{L}^1$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p.). Puis $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et $\int f_n dm \to \int g dm = \int f dm$, quand $n \to +\infty$. ■

Dans le théorème 4.44, l'hypothèse de convergence p.p. de $f_n$ vers $f$ peut être remplacée par une hypothèse de convergence en mesure (plus précisément, avec l'hypothèse de domination donnée dans le théorème 4.44, on a même équivalence entre la convergence en mesure et la convergence dans $\mathrm{L}^1$). On obtient ainsi le théorème suivant (ou seule la partie utile de cette équivalence est donnée).

**Théorème 4.45 (Convergence en mesure dominée)** *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est noté* $\mathrm{L}^1$ *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* $f$ *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

*1.* $f_n \to f$ *en mesure.*

*2.* $\exists \mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le \mathrm{F}$ *p.p..*

*Alors* $f \in \mathrm{L}^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* $\mathrm{L}^1$*, c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \textit{ lorsque } n \to +\infty.$$

*Ceci donne aussi* $\int f_n dm \to \int f dm$*, lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – En choisissant des représentants de $f_n$ et $f$, la démonstration de ce théorème se ramène à celle de l'exercice 4.36. ■

### 4.7.2 Série absolument convergente

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans $L^1$ (*i.e.* t.q. la série des normes converge) est convergente dans $L^1$. On en déduira aussi un résultat très important (le théorème 4.49) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans $L^1$ une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré dans l'exercice 4.11) suivant :

**Lemme 4.46** *Soient* $(E, T, m)$ *un espace mesuré et* $F \in \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $\int F dm < +\infty$. *Alors* $F < +\infty$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et* $F(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in A^c$*).*

**Théorème 4.47 (Séries absolument convergentes dans $L^1$)** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *t.q.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$ *; alors :*

1. $\exists F \in L^1$ *;* $|\sum_{p=0}^{n} f_p| \le F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *La série de terme général* $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$*, convergente (dans* $\mathbb{R}$*).*
   *On définit* $f$ *par* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *(de sorte que* $f$ *est définie p.p.).*
3. $f \in L^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p. ) et* $\sum_{p=0}^{n} f_p \to f$ *dans* $L^1$ *et p.p., quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – La preuve s'effectue en trois étapes :

1. On choisit un représentant de $f_n$, encore noté $f_n$, et on pose $F(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}} |f_p(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a donc $F \in \mathcal{M}_+$ et le corollaire 4.18 du théorème de convergence monotone donne
$$\int F dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty.$$
Le lemme 4.46 donne alors $F < +\infty$ p.p., c'est-à-dire il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $F(x) < +\infty$ pour tout $x \in A^c$.
En remplaçant F par 0 sur A, on a donc $F \in \mathcal{L}^1$. (Donc, $F \in L^1$ au sens de la remarque 4.40).
La définition de F donne immédiatement $|\sum_{p=0}^{n} f_p| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Comme $m(A) = 0$, $f$ est donc définie p.p. car elle est définie pour $x \in A^c$ par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} f_p(x)$.
3. On pose $s_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. le premier point donne $|s_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^1$. Le deuxième point donne $s_n \to f$ p.p.. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44). Il donne $f \in L^1$ et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers $f$) dans $L^1$. La convergence p.p. (vers $f$) de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le deuxième point. ■

**Théorème 4.48 (Riesz–Fisher)** *Soit* $(E, T, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $L^1(E, T, m)$ *est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que $L^1$ est espace vectoriel normé. Une conséquence du théorème 4.47 est que, dans $L^1$, toute série absolument convergente est convergente. Cette propriété est une caractérisation du fait qu'un espace vectoriel normé est complet. On en déduit donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est complet et donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

■

Dans la suite $\mathrm{L}^1$ sera toujours muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

**Théorème 4.49 (Réciproque partielle du théorème de convergence dominée)**
*Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ et $f \in \mathrm{L}^1$ telles que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ telles que :*

*1. $f_{n_k} \to f$ p.p.,*

*2. $|f_{n_k}| \leq \mathrm{F}$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION – En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^1$, on construit par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p, q \geq n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$. On peut alors appliquer le théorème 4.47 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour conclure. ■

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans $\mathrm{L}^1$ pour une suite convergeant p.p.. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.33 et 4.34.

**Proposition 4.50** *Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ ; alors :*

*1. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ t.q. $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{T}, m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f| dm \leq \varepsilon$.*

*2. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |f| dm \leq \varepsilon$.*

**Théorème 4.51 (Vitali)** *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. On note $\mathrm{L}^1$ l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^1$ t.q. $f_n \to f$ p.p., $f$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (voir remarque 4.38). Alors, $f \in \mathrm{L}^1$ et $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

*1. (Équi-intégrabilité) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ n \in \mathbb{N}, m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \leq \varepsilon,$$

*2. (Équi-petitesse à l'infini) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{\mathrm{C}^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.34 ; elle ne nécessite pas le théorème de convergence dominée : on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.39 et exercice 3.27). Le théorème de convergence dominée peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.34). ■

Dans le théorème 4.51, si $m(\mathrm{E}) < +\infty$, l'hypothèse d'equi-petitesse à l'infini est, bien sûr, toujours vérifiée (il suffit de prendre $\mathrm{C} = \mathrm{E}$).

## 4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration

Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $f$ une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ; à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(.,t)$ : $E \to \mathbb{R}$, qui à $x$ associe $f(x,t)$. On suppose que l'application $f(.,t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(.,t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x).$$

**Théorème 4.52 (Continuité sous $\int$)** *Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $f$ une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.10) et $t_0 \in \mathbb{R}$ ; on suppose de plus que :*

1. *l'application $f(x,.)$, définie pour presque tout $x \in E$ par : $t \mapsto f(x,t)$, est continue en $t_0$, pour presque tout $x \in E$ ;*
2. *$\exists\ \varepsilon > 0$ et $\exists\ G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ tels que $|f(.,t)| \le G$ p.p., pour tout $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.*

*Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$, est continue en $t_0$.*

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $f_n$ définie par $f_n(x) = f(x,t_n)$. Comme $f_n \to f(\cdot, t_0)$ p.p. et $|f_n| \le G$ p.p.. On peut appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n) \to F(t_0)$ quand $n \to +\infty$. ■

**Théorème 4.53 (Dérivabilité sous $\int$)** *Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $f$ une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.10) et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in T$ et $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $m(A) = 0$ et :*

1. *L'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$ ;*
2. *$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le G(x)$ pour tout $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.*

*Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$, est dérivable en $t_0$ et :*

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x).$$

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \ne t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $L^1$ et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) car $f_n \to \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ p.p., quand $n \to +\infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in ]0,1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n}t_0 + (1 - \theta_{x,n})t_n)$

(grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \leq G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème 4.44 donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit bien que F est dérivable en $t_0$ et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dm(x).$$

. ■

## 4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

**Définition 4.54 (Espérance, moment, variance)** *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.*

.

1. *Si $X \geq 0$ (c'est-à-dire $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par $E(X) = \int X(\omega) dp(\omega)$.*
2. *Si $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ (c'est-à-dire $E(|X|) < +\infty$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par :*

$$E(X) = \int X(\omega) dp(\omega).$$

*On définit la variance de X par $Var(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ (avec $\sigma(X) \geq 0$).*

3. *Pour $r \in [1, +\infty[$, le moment d'ordre r de la variable aléatoire X est l'espérance de la variable aléatoire $|X|^r$.*

**Définition 4.55 (Covariance)** *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. t.q. $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$. On définit la covariance de X et Y par : $cov(X, Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y))$. (Remarquer que $(X - E(X)(Y - E(Y))$ est une v.a.r. intégrable car sa valeur absolue est majorée, par exemple, par $X^2 + Y^2 + E(X)^2 + E(Y)^2$ qui est intégrable.)*

On calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité $p$ ; en effet, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est souvent mal connu. Le théorème 4.58 montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance (ou, plus généralement, l'espérance d'une fonction de X). On se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.
Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.15 :

**Lemme 4.56 (Inégalité de Markov)** *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle positive sur $\Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $0 < E(X) < +\infty$. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DÉMONSTRATION – Il suffit, par exemple, d'appliquer le lemme 4.15 avec $f = X$ et $t = \lambda E(X)$. ■

**Lemme 4.57 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev)** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* $\Omega$*, intégrable et t.q. sa variance vérifie* $0 < \sigma^2(\mathrm{X}) < +\infty$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. Alors :*

$$\mathrm{P}(\{|\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})| \geq \lambda\sigma(\mathrm{X})\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION – Appliquer le lemme 4.15 avec $f = |\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})|^2$ et $t = \lambda\sigma(\mathrm{X})$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur $\Omega$. La loi de X, notée $\mathrm{P_X}$ est définie par $\mathrm{P_X}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}))$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est équivalent à dire que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, avec $\varphi = 1_\mathrm{A}$ :

$$\int_\Omega \varphi \circ \mathrm{X}(\omega) d\mathrm{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x) d\mathrm{P_X}(x). \tag{4.11}$$

On rappelle que $\varphi \circ \mathrm{X}$ est souvent improprement noté $\varphi(\mathrm{X})$, ce qui s'explique par le fait $\varphi \circ \mathrm{X}(\omega) = \varphi(\mathrm{X}(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le théorème 4.58 montre que cette égalité est vraie pour une large classe de fonctions boréliennes $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ (on rappelle que borélienne signifie mesurable quand les espaces sont munis de la tribu de Borel).

**Théorème 4.58 (Loi image)** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* $\Omega$ *et* $\mathrm{P_X}$ *la loi de la variable aléatoire* X*. On a alors :*

1. *L'égalité (4.11) est vraie pour toute fonction* $\varphi$ *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et toute fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
2. *Soit* $\varphi$ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, la fonction* $\varphi \circ \mathrm{X}$ *appartient à* $\mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *si et seulement si* $\varphi \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P_X})$*. De plus, si* $\varphi \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P_X})$*, L'égalité (4.11) est vraie.*

DÉMONSTRATION – On remarque que (4.11) est vraie pour tout $\varphi = 1_\mathrm{A}$, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (par définition de $p_\mathrm{X}$). Par linéarité positive, (4.11) est encore vraie pour tout $\varphi$ borélienne étagée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par convergence monotone, (4.11) est alors vraie pour tout $\varphi$ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci donne la première partie du premier item. En utilisant la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on montre alors le deuxième item. Enfin, la deuxième partie du premier item vient du fait que $\varphi$ est intégrable pour la probabilité $p_\mathrm{X}$ si $\varphi$ est borélienne bornée. ■

Un produit de v.a.r. intégrables et indépendantes est une v.a.r. intégrable (ce qui est, bien sûr, faux sans l'hypothèse d'indépendance) et l'espérance de ce produit est égal au produit des espérances. Ce résultat plus général est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 4.59** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *des v.a.r. indépendantes.*

1. *Soit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. On a alors :*

$$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^d \varphi_i(\mathrm{X}_i)\right) = \prod_{i=1}^d \mathrm{E}(\varphi_i(\mathrm{X}_i)). \tag{4.12}$$

*(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)*

2. *Soit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $\varphi_i(\mathrm{X}_i)$ *est intégrable pour tout* $i = 1, \ldots, d$*. La v.a.r.* $\prod_{i=1}^d \varphi_i(\mathrm{X}_i)$ *est intégrable et l'égalité (4.12) est vraie.*

*3. Soit $\varphi_1,\ldots,\varphi_d$ des fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'égalité (4.12) est vraie.*

*N.B. Si $X_1,\ldots,X_d$ sont des v.a.r., le fait que (4.12) soit vraie pour toute famille $\varphi_1,\ldots,\varphi_d$ de fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour les v.a.r. $X_1,\ldots,X_d$ soient indépendantes.*

DÉMONSTRATION – Si $\varphi_1,\ldots,\varphi_d$ sont des fonctions caractéristiques de boréliens de $\mathbb{R}$, l'égalité (4.12) est une conséquence immédiate de la définition de l'indépendance des $X_i$ (Si $\varphi_i = 1_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $E(\varphi_i(X_i)) = P(\{X_i \in A_i\}) = P(X_i^{-1}(A_i))$). Par linéarité positive, on en déduit que (4.12) est vraie si les fonctions $\varphi_i$ sont (boréliennes) étagées positives (c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{E}_+$). Puis, par convergence monotone, on en déduit le premier item de la proposition (car toute fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_+$).

Pour le deuxième item, on utilise (4.12) avec la fonction $x \mapsto |\varphi_i(x)|$ au lieu de la fonction $\varphi_i$ (pour tout $i$). On montre ainsi que la v.a.r. $\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)$ est intégrable. Puis, on montre (4.12) par linéarité (utilisant $\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$).

Le troisième item est conséquence immédiate du deuxième (car si X est une v.a.r. et $\varphi$ est une fonction borélienne bornée, la v.a.r. $\varphi(X)$ est intégrable). ■

Une conséquence de la proposition 4.59 est que XY est intégrable et $\text{cov}(X,Y) = 0$ si $X,Y$ sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},p)$.

Pour montrer que des v.a.r. sont indépendantes, il est parfois utile de savoir qu'il suffit de montrer (4.12) lorsque les fonctions $\varphi_i$ sont continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'objet de la proposition 4.61 qui se démontre à partir d'un résultat d'unicité (proposition 4.60) sur lequel nous reviendrons au chapitre 5. On note $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une fonction $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi = 0$ sur $K^c$) .

**Proposition 4.60** *Soit $m$ et $\mu$ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int \varphi dm = \int \varphi d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

*Alors, $m = \mu$.*

DÉMONSTRATION – Puisque $m$ et $\mu$ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts, on a bien $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ et $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$. On pose maintenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et on commence par montrer que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$.

Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \uparrow 1_{]a,b[}$. En effet, il suffit de construire $\varphi_n$, pour $n \geq 2/(b-a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \leq a,\\
&\varphi_n(x) = n(x-a) \text{ si } a < x < a + \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = 1 \text{ si } a + \tfrac{1}{n} < x < b - \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = -n(x-b) \text{ si } b - \tfrac{1}{n} \leq x \leq b\\
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } b \leq x.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$, on obtient (par convergence monotone ou par convergence dominée) $m(]a,b[) = \mu(]a,b[)$.

On conclut enfin que $m = \mu$ en utilisant, par exemple, la proposition 2.31. ■

**Proposition 4.61** *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1,\ldots,X_d$ des v.a.r. Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$,*

$$E\Big(\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)\Big) = \prod_{i=1}^d E(\varphi_i(X_i)), \tag{4.13}$$

*(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)*

DÉMONSTRATION – Le fait que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 4.59 car une fonction continue à support compact est borélienne et bornée.

On montre maintenant que la condition est suffisante. On suppose donc que (4.13) est vraie pour toute famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on veut montrer que les v.a.r. $X_1,\ldots,X_d$ sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E(1_{A_i}(X_i)). \tag{4.14}$$

On rappelle en effet que

$$E(1_{A_i}(X_i)) = P(X_i^{-1}(A_i)) \text{ et } E(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i} X_i)) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)).$$

Pour montrer (4.14), on introduit, pour tout $1 \le n \le d+1$, la propriété suivante :
$P_n$ : (4.13) est vraie si $\varphi_i = 1_{A_i}$, avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour $i < n$, et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i \ge n$.

L'hypothèse de la proposition donne que $P_1$ est vraie. On suppose maintenant que $P_n$ est vraie pour un $n \in \{1,\ldots,d\}$. Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $i < n$ (et $\varphi_i = 1_{A_i}$) et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $i > n$. Pour $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose, avec $\varphi_n = 1_{A_n}$ :

$$m(A_n) = E(\textstyle\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)),$$
$$\mu(A_n) = \textstyle\prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)).$$

Les applications $m$ et $\mu$ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La propriété $P_n$ montre que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La proposition 4.60 montre alors que $m = \mu$ ce qui donne la propriété $P_{n+1}$. Par récurrence sur $n$, on montre ainsi que $P_{d+1}$ est vraie, ce qui donne (4.14) et l'indépendance de $X_1,\ldots,X_d$. ■

## 4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$

**Définition 4.62** *Soient* $(E,T,m)$ *un espace mesuré et* $N > 1$ *(*$N \in \mathbb{N}$*).*

1. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}^N$. *Pour* $x \in E$, *on pose* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_N(x))^t \in \mathbb{R}^N$. *La fonction* $f$ *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ *si* $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *pour tout* $n \in \{1,\ldots,N\}$.
2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$, *on note*

$$\int f dm = (\int f_1 dm,\ldots,\int f_N dm)^t \in \mathbb{R}^N.$$

La caractérisation suivante de mesurabilité et intégrabilité est intéressante.

**Proposition 4.63** *Soient* $(E,T,m)$ *un espace mesuré,* $N > 1$ *et* $f : E \to \mathbb{R}^N$.
*On note* $f_1,\ldots,f_N$ *les composantes de* $f$.

1. $f_n$ *est mesurable (de* $E$ *dans* $\mathbb{R}$*) pour tout* $n \in \{1,\ldots,N\}$ *si et seulement si* $f$ *est mesurable de* $E$ *dans* $\mathbb{R}^N$, *c'est-à-dire si et seulement si* $f^{-1}(A) \in E$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
2. *Si* $f$ *est mesurable (de* $E$ *dans* $\mathbb{R}^N$*). On munit* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme, notée* $\|\cdot\|$. *Alors,* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E,T,m)$ *si et seulement si* $\int \|f\| dm < +\infty$ *(noter que* $\|f\| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $\mathrm{N} = 2$.

1. On suppose d'abord $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$. On veut montrer que $f$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par $\{\mathrm{A}\times\mathrm{B},\ \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, il suffit de montrer que $f^{-1}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \in \mathrm{T}$ pour tout $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Soit donc $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = f_1^{-1}(\mathrm{A}) \cap f_2^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}$ car $f_1$ et $f_2$ sont mesurables. Donc $f^{-1}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \in \mathrm{T}$. On a bien montré que $f$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$

   Réciproquement, on suppose maintenant que $f$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $f_1^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{A}\times\mathbb{R})$. Or $\mathrm{A}\times\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc $f_1^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{A}\times\mathbb{R}) \in \mathrm{T}$, ce qui prouve que $f_1$ est mesurable. On prouve de manière semblable que $f_2$ est mesurable.
2. Soit $f$ mesurable de E dans $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. On suppose que $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Comme $y \mapsto \|y\|$ est continue de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{R}$, l'application $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (comme composée d'applications mesurables). Comme cette application ne prend que des valeurs positives ou nulles, on a donc $\|f\| \in \mathcal{M}_+$.

   Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ sont équivalentes, on a donc $\int \|f\| dm < +\infty$ si et seulement si $\int \|f\|_1 dm < +\infty$, avec $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |f_n|$. Il est alors immédiat de remarquer que $\int \|f\|_1 dm < +\infty$ si et seulement $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ pour tout $n \in \{1,\ldots,\mathrm{N}\}$. On a donc :
$$\int \|f\| dm < +\infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m).$$

■

La définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int \|f\| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer, comme dans le cas $\mathrm{N} = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.". On rappelle que $f = g$ p.p. s'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f = g$ sur $\mathrm{A}^c$.

**Définition 4.64 (Espace $\mathrm{L}^1$)** *Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré.*

1. *L'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *On munit $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. On pose $\|\mathrm{F}\|_1 = \int \|f\| dm$, où $f \in \mathrm{F}$ (cette définition est correcte car indépendante du choix de $f$ dans F).*

**Proposition 4.65 ($\mathrm{L}^1$ est un espace de Banach)** *Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et $\mathrm{N} > 1$. L'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}^\mathrm{N}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est un espace de Banach (réel) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.64).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du cas $\mathrm{N} = 1$. ■

**Définition 4.66** *Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$. On note $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ les parties réelle et imaginaire de $f$. On a donc, pour $x \in \mathrm{E}$, $f(x) = \mathfrak{Re}(f)(x) + i\,\mathfrak{Im}(f)(x)$, avec $\mathfrak{Re}(f)(x), \mathfrak{Im}(f)(x) \in \mathbb{R}$. La fonction $f$ appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.*

*2. Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on note*

$$\int f dm = \int \mathfrak{Re}(f) dm + i \int \mathfrak{Im}(f) dm \in \mathbb{C}.$$

Ici aussi, on a une caractérisation de mesurabilité et intégrabilité.

**Proposition 4.67** *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $f$ une application de $\mathrm{E} \to \mathbb{C}$.*

1. *$\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont mesurables (de $\mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}$) si et seulement si $f$ est mesurable de $\mathrm{E}$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire si et seulement $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.*
2. *Si $f$ est mesurable (de $\mathrm{E}$ dans $\mathbb{C}$), $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si $\int |f| dm < +\infty$ (noter que $|f| \in \mathcal{M}_+$).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition se ramène facilement à la précédente démonstration (c'est-à-dire à la démonstration de la proposition 4.63) en utilisant l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(z) = (x, y)^t$ si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui est une bijection continue, d'inverse continue. ■

Ici aussi, la définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int |f| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

**Définition 4.68** *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré.*

1. *L'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On pose $\|\mathrm{F}\|_1 = \int |f| dm$, où $f \in \mathrm{F}$ (cette définition est correcte car indépendante du choix de $f$ dans $\mathrm{F}$).*

**Proposition 4.69** *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. L'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un espace de Banach (complexe) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.68).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du fait que $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est un espace de Banach (réel). ■

## 4.11 Exercices

### 4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

**Exercice 4.1 (Sup de mesures)** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ un espace mesurable et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathrm{T}$. On suppose que $m_{n+1}(\mathrm{A}) \geq m_n(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(\mathrm{A}) = \sup\{m_n(\mathrm{A}), n \in \mathbb{N}\}$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to +\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \text{ (dans } \overline{\mathbb{R}}_+\text{) quand } n \to +\infty.$$

. [On pourra utiliser le fait que

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_p.]$$

**Corrigé** – *On remarque tout d'abord que la suite* $(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, elle admet donc une limite dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Pour* $N \in \mathbb{N}$, *on passe à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans les inégalités*

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

*On obtient*

$$\sum_{p=0}^{N} a_p \le \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

*On passe maintenant à la limite quand* $N \to \infty$ *pour obtenir*

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p \le \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

*On a donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

2. Montrer que $m$ est une mesure.

**Corrigé** – *On remarque tout d'abord que* $m(\emptyset) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\emptyset) = 0$.
*Puis, soit* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ *t.q.* $A_p \cap A_q = \emptyset$ *si* $p \neq q$. *On pose* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *On a*

$$m(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(A) = \lim_{n\to+\infty} m_n(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} m_n(A_p).$$

*En utilisant la question précédente avec* $a_{n,p} = m_n(A_p)$, *on en déduit* $m(A) = \sum_{p=0}^{\infty} m(A_p)$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

**Corrigé** – *Soit* $\{a_1,\ldots,a_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$ *et* $\{A_1,\ldots,A_p\} \subset T$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i}$.
*On a* $\int f dm_n = \sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)$, *la suite* $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(\sum_{i=1}^{p} a_i m_n(A_i)) &= \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{n\to+\infty}(m_n(A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i) = \int f dm,\end{aligned}$$

*et donc*

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty}(\int f dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n).$$

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(E,T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

(a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.

**Corrigé** – *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. D'après la question précédente, on a (pour tout n et tout p)*

$$\int f_p dm_n \leq \int f_p dm_{n+1} \leq \int f_p dm.$$

*En passant à la limite sur p (avec n fixé) on en déduit que $\int f dm_n \leq \int f dm_{n+1} \leq \int f dm$. La suite $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par $\int f dm$.*

(b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ lorqsue $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *On pose $\mathrm{A}_f = \{g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\}$. On sait que*

$$\int f dm = \sup_{g\in \mathrm{A}_f} \int g dm \text{ et que } \int f dm_n = \sup_{g\in \mathrm{A}_f} \int g dm_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

*La question 2 donne que $[\int g dm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n$ pour tout $g \in \mathcal{E}_+$.. On en déduit*

$$\int f dm = \sup_{g\in \mathrm{A}_f} (\sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{g\in \mathrm{A}_f} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f dm_n,$$

*ce qui, avec la question précédente, donne bien $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to +\infty$.*

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *On a $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. la question 4 donne $\int |f| dm_n \leq \int |f| dm$, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question 4 donne aussi que*

$$\int f^+ dm_n \to \int f^+ dm \text{ et } \int f^- dm_n \to \int f^- dm.$$

*Les deux convergences ayant lieu dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to +\infty$.*

**Exercice 4.2 (Somme de mesures)** Soient $m_1$ et $m_2$ deux mesures sur l'espace mesurable $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$.

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

**Corrigé** – *(a) $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0$,*

*(b) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{A}_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = m_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) + m_2(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n).$$

*Comme $m_i(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m_i(\mathrm{A}_p)$ pour $i = 1, 2$, on en déduit*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} (m_1(\mathrm{A}_p) + m_2(\mathrm{A}_p)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m(\mathrm{A}_p),$$

*ce qui prouve bien la σ-additivité de m.*

*Ceci montre bien que m est une mesure.*

2. Montrer qu'une application $f$ mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure $m$ si et seulement si elle est intégrable pour les mesures $m_1$ et $m_2$. Si $f$ est intégrable pour la mesure $m$, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

**Corrigé** – *Soit* $A \in T$, *on pose* $\varphi = 1_A$. *La définition de m donne immédiatement*

$$\int \varphi dm = \int \varphi dm_1 + \int \varphi dm_2. \tag{4.15}$$

*Par linéarité de l'intégrale, l'égalité (4.15) est aussi vraie pour* $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

*Soit maintenant* $\varphi \in \mathcal{M}_+$. *Il existe* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *t.q.* $\varphi_n \uparrow \varphi$ *quand* $n \to +\infty$. *On écrit (4.15) avec* $\varphi_n$ *au lieu de* $\varphi$ *et on fait tendre n vers l'infini. La définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$ *donne alors (4.15).*

*On a donc montré que (4.15) est vrai pour tout* $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

*Soit* $f \in \mathcal{M}$, *en écrivant (4.15) avec* $\varphi = |f|$ *on obtient bien que* $f \in \mathcal{L}^1(E, T, m)$ *si et seulement si* $f \in \mathcal{L}^1(E, T, m_1) \cap \mathcal{L}^1(E, T, m_2)$.

*Enfin, si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, *on écrit (4.15) avec* $\varphi = f^+$ *et* $\varphi = f^-$, *la différence donne bien* $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur $(E, T)$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ . On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que $m$ est une mesure sur T ; soit $f$ une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure $m$ ; montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

   **Corrigé** – *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on définit* $\tilde{m}_n$ *par* $\tilde{m}_n(A) = \alpha_n m_n(A)$ *pour tout* $A \in T$. *Il est facile de voir que* $\tilde{m}_n$ *est une mesure sur* T, *que* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \tilde{m}_n)$ *et que* $\int f d\tilde{m}_n = \alpha_n \int f dm_n$ *pour tout* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$.

   *On pose maintenant, par récurrence sur n,* $\mu_0 = \tilde{m}_0$ *et* $\mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *La question précédente montre, par récurrence sur n, que* $\mu_n$ *est une mesure sur* T *et donne que* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu_n)$ *si et seulement si* $f \in \bigcap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \tilde{m}_n)$ $= \bigcap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$. *Enfin, la question précédente donne aussi, toujours par récurrence sur n,*

$$\int f d\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f d\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f dm_n.$$

   *Pour tout* $A \in T$, *on a* $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$. *On peut donc utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur* T *et que* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{R}}(E, T, m)$ *implique* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{R}}(E, T, \mu_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int f d\mu_n$. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{R}}(E, T, m)$ *on a donc* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{R}}(E, T, m_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \int f dm_p$, *c'est-à-dire*

$$\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n.$$

**Exercice 4.3 (Intégrale pour la mesure de Dirac)** Soit $\delta_0$ la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.20.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

**Corrigé** – *On définit g de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *par*

$$g(x) = 0 \text{ si } x \neq 0,$$
$$g(0) = f(0).$$

*On a* $g \in \mathcal{M}_+$ *et, comme* $\delta_0(\{0\}^c) = 0$, *on a* $f = g$ *p.p., on en déduit*

$$\int f d\delta_0 = \int g d\delta_0 = f(0)\delta_0(\{0\}) = f(0).$$

**Exercice 4.4 (Restrictions de la mesure de Lebesgue)** Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note $\lambda_A$ [resp. $\lambda_B$] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B, \mathcal{B}(B), \lambda_B)$. Montrer que $f_{|_A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A, \mathcal{B}(A), \lambda_A)$ et que $\int f_{|_A} d\lambda_A = \int f 1_A d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

**Corrigé** – *On rappelle que* $\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset A\}$ *et* $\mathcal{B}(B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset B\}$ *(voir l'exercice 2.3).*

1. *Soit $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_p \in \mathcal{B}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.*

   *La fonction $f1_\mathrm{A}$ appartient donc aussi à $\mathcal{E}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$ (car $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{B})$) et elle s'écrit*
$$f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i} 1_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}},$$
   *de sorte que*
$$\int f1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}).$$
   *La fonction $f_{|\mathrm{A}}$ (c'est-à-dire la restriction de $f$ à $\mathrm{A}$) est définie sur $\mathrm{A}$, elle s'écrit $f_{|\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{E}_+(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A}))$ car $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{A})$ pour tout $i$ et on a*
$$\int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}).$$
   *On a bien montré que*
$$\int f1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A}, \tag{4.16}$$
   *pour tout $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$. il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$ t.q. $f_n \uparrow f$, quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $(f_n1_\mathrm{A})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f1_\mathrm{A}$ et $(f_{n|\mathrm{A}})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_{|\mathrm{A}}$, quand $n \to +\infty$. Comme $f_{n|\mathrm{A}} \in \mathcal{E}_+(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A}))$, la caractérisation de la mesurabilité positive (proposition 3.17) donne $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A}))$. On a aussi $f1_\mathrm{A} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$. Puis, en écrivant (4.16) avec $f_n$ au lieu de $f$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A}))$ et sur $\mathcal{M}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$ donne (4.16).*

   *On a donc montré (4.16) pour tout $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$.*
3. *Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}),\lambda_\mathrm{B})$. On remarque d'abord que $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{M}(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A}))$. En effet, si $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $(f_{|\mathrm{A}})^{-1}(\mathrm{C}) = f^{-1}(\mathrm{C}) \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{A})$. Puis, on applique (4.16) à $|f|$, qui appartient à $\mathcal{M}_+(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}))$, pour obtenir*
$$\int |f_{|\mathrm{A}}| d\lambda_\mathrm{A} = \int |f|_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int |f|1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} < \int |f| d\lambda_\mathrm{B} < \infty,$$
   *ce qui montre que $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A})),\lambda_\mathrm{A})$.*

   *Enfin, en appliquant (4.16) avec $f^+$ et $f^-$ au lieu de $f$, on obtient*
$$\int f^+1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f^+{}_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int (f_{|\mathrm{A}})^+ d\lambda_\mathrm{A} < \infty$$
   *et*
$$\int f^-1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f^-{}_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int (f_{|\mathrm{A}})^- d\lambda_\mathrm{A} < \infty,$$
   *ce qui donne, en faisant la différence,*
$$\int f1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A}.$$

**Exercice 4.5 (Intégrale des fonctions continues)** Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et que
$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$$
(cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement…) par $\lambda$ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée $\lambda$…) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

N.B. : Bien sûr, un résultat analogue est vrai en remplaçant $[0,1]$ par $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

**Corrigé** – *Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :*

$$g(x) = a_i,\ \ \forall x \in ]\alpha_i,\alpha_{i+1}[,\ \ \forall i \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

*On sait que*

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i).$$

*D'autre part, cette fonction $g$ est mesurable (c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$) car, pour tout $\mathrm{C} \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(\mathrm{C})$ est une réunion (finie) d'intervalles du type $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ à laquelle on ajoute éventuellement certains des points $\alpha_i$. On a donc $g^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathcal{B}([0,1])$. On a bien montré que $g \in \mathcal{M}([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. Enfin, comme les singletons sont de mesure nulle, on a $|g| = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., et donc*

$$\int |g| d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i|(\alpha_{i+1}-\alpha_i) < \infty.$$

*Donc, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. Finalement, puisque $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., on a aussi*

$$\int g d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i).$$

*On a donc montré que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et*

$$\int g d\lambda = \int_0^1 g(x)dx. \tag{4.17}$$

*Soit maintenant $f \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $f$ est mesurable (parce que, par exemple, les ouverts de $[0,1]$ engendre $\mathcal{B}([0,1])$ et que l'image réciproque, par $f$, d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$, donc un élément de $\mathcal{B}([0,1])$). Puis, on remarque que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1],\lambda)$ car $\int |f| d\lambda \leq \|f\|_u = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$.*

*On compare maintenant $\int f d\lambda$ et $\int_0^1 f(x)dx$.*

*Il existe une suite de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to +\infty$.*

*La définition de l'intégrale des fonctions continues donne $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to +\infty$.*

*D'autre part, on a aussi $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$, quand $n \to +\infty$, car $|\int f_n d\lambda - \int f d\lambda| \leq \int |f_n - f| d\lambda \leq \|f_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to +\infty$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (4.17) avec $f_n$ au lieu de $g$, on obtient bien*

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx.$$

**Exercice 4.6 (Fonctions continues et fonctions intégrables)** Soit $m$ une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

**Corrigé** – *Soit $f \in \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$. On montre tout d'abord que $f$ est mesurable.*

*Soit $\mathrm{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme $f$ est continue, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{O}) = \{x \in [0,1],\ f(x) \in \mathrm{O}\}$ est une ouvert de $[0,1]$ et donc $f^{-1}(\mathrm{O}) \in \mathcal{B}([0,1])$. Les ouverts de $\mathbb{R}$ engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on en déduit que $f$ est mesurable de $[0,1]$ (muni de sa tribu borélienne) dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne).*

*On montre maintenant que $f$ est intégrable. Comme la fonction $f$ est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée. Il existe donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. $|f| \leq \mathrm{M}$ sur $[0,1]$. On a donc, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ :*

$$\int |f| dm \leq \mathrm{M} m([0,1]) < \infty.$$

*On a donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.*

**Exercice 4.7 (Intégrale d'une fonction continue non bornée)** Soit $f \in C(]0,1[,\mathbb{R})$ et F une primitive de $f$ (on a donc $F \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$).
On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$.

1. Montrer que $f$ est borélienne c'est-à-dire mesurable quand on munit $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ de leur tribu borélienne.
2. On suppose maintenant que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in ]0,1[$ (on a donc $f \in \mathcal{M}_+$).
   (a) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
   (b) On suppose dans cette question que $\lim_{x\to 1^-} F(x) \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to 0^+} F(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$. [On pourra utiliser les exercices 4.4 et 4.5.]
   (c) On suppose maintenant que $\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$ ou que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$. Montrer que $f \notin \mathcal{L}^1$ (on a donc $\int f d\lambda = +\infty$).

**Exercice 4.8 ($f, g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$)** Soit $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. [On pourra utiliser l'exercice 4.7.]

**Corrigé** – *On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Un exemple consiste à prendre $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in ]0,1[$.*
*Selon l'exercice 4.7, on a bien $f, g \in \mathcal{L}^1$, car une primitive de $f$ et $g$ est la fonction F définie par $F(x) = 2\sqrt{x}$, et $fg \notin \mathcal{L}^1$ car une primitive de $f$ et $g$ est la fonction G définie par $G(x) = \ln x$.*

**Exercice 4.9 (Majoration d'une fonction intégrable décroissante)** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que $f$ est borélienne (et donc borélienne positive).
2. On suppose que $\int f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq C/x$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on retire l'hypothèse de décroissance de $f$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

**Exercice 4.10 (Caractérisation d'une fonction caractéristique)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p. et que $\int f\, dm = \int f^2\, dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p..

**Corrigé** – *On remarque que $\int f(1-f)\,dm = 0$. Comme $f(1-f) \geq 0$ p.p., on en déduit que $f(1-f) = 0$ p.p.. On pose $A = \{f = 1\}$, on a alors $f = 0$ p.p. sur $A^c$, ce qui donne bien $f = 1_A$ p.p..*

**Exercice 4.11 ($f$ positive intégrable implique $f$ finie p.p.)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f\, dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

**Corrigé** – *Cet exercice a été vu dans ce chapitre. On redonne une preuve ici.*
*Soit $A = f^{-1}(\{+\infty\})$. On a $A \in T$ car $f$ est mesurable et $\{+\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.*
*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f \geq n1_A$, donc, par monotonie de l'intégrale, $\int f\,dm \geq nm(A)$, ou encore*

$$m(A) \leq \frac{1}{n} \int f\, dm.$$

*En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $m(A) = 0$. On a donc $f < +\infty$ p.p. car $f(x) < +\infty$ pour tout $x \in A^c$.*

**Exercice 4.12 (Une caractérisation de l'intégrabilité)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré fini, $u$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \geq n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n) < +\infty.$$

**Corrigé** – *On remarque tout d'abord que* $\mathrm{B}_n, \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n 1_{\mathrm{B}_n} \le |u| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) 1_{\mathrm{B}_n}.$$

*On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(\mathrm{B}_n) \le \int |u| dm \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(\mathrm{B}_n). \tag{4.18}$$

*Si* $\int |u| dm < +\infty$*, on a donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$.

*Réciproquement, si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$*, on a aussi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(\mathrm{B}_n) < +\infty$ *car* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{B}_n) \le m(\mathrm{E}) < +\infty$ *(remarquer que* $\mathrm{B}_n \cap \mathrm{B}_m = \emptyset$ *si* $n \ne m$*). On déduit donc de (4.18) que* $\int |u| dm < +\infty$.

*On a ainsi montré que :*

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{B}_n).$$

*On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant* $\mathrm{B}_n$ *par* $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E}, n \le |u(x)| < n+1\}$*. On a donc aussi :*

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n). \tag{4.19}$$

*Pour terminer la question, il suffit de montrer que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n) < +\infty. \tag{4.20}$$

*Pour montrer (4.20), on remarque que* $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc, comme* $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$ *et que* $m(\mathrm{A}_{n+1}) \le m(\mathrm{A}_n) \le m(\mathrm{E}) < +\infty$ *:*

$$m(\mathrm{C}_n) = m(\mathrm{A}_n) - m(\mathrm{A}_{n+1}).$$

*On en déduit que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} p\, m(\mathrm{C}_p) &= \sum_{p=0}^{n} p\, m(\mathrm{A}_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(\mathrm{A}_{p+1})\\ &= \sum_{p=0}^{n} p\, m(\mathrm{A}_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(\mathrm{A}_p) = \sum_{p=1}^{n} m(\mathrm{A}_p) - n\, m(\mathrm{A}_{n+1}).\end{aligned}$$

*On a donc :*

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(\mathrm{C}_p) \le \sum_{p=1}^{n} m(\mathrm{A}_p), \tag{4.21}$$

*et :*

$$\sum_{p=1}^{n} m(\mathrm{A}_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(\mathrm{C}_p) + n\, m(\mathrm{A}_{n+1}). \tag{4.22}$$

*Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$*, on déduit donc de (4.21) que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$.

*Réciproquement, si* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$*. On a, par (4.19),* $\int |u| dm < +\infty$ *et donc, comme* $n 1_{\mathrm{A}_{n+1}} \le |u|$*, on a aussi* $n\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \le \int |u| dm < +\infty$*. On déduit donc de (4.22) que* $\sum_{n=1}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$*. Comme* $m(\mathrm{A}_0) \le m(\mathrm{E}) < +\infty$*, on a bien finalement* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$.

*On a bien montré (4.20), ce qui termine la question.*

2. Soit $p \in ]1,+\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(\mathrm{A}_n) < +\infty.$$

**Corrigé** – *La fonction $|u|^p$ est mesurable car composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.*

*On reprend maintenant le raisonnement de la question précédente. On remarque que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) \le \int |u|^p dm \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n). \tag{4.23}$$

*Si $\int |u|^p dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$.*

*Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$, on a aussi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^p n^p m(\mathrm{B}_n) < +\infty$$

*et $m(\mathrm{B}_0) \le m(\mathrm{E}) < +\infty$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n) < +\infty$. Ceci donne $\int |u|^p dm < +\infty$ par (4.23).*

*On a ainsi montré que :*

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty.$$

*Ici aussi, on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant $\mathrm{B}_n$ par $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E}, n \le |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :*

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty. \tag{4.24}$$

*Pour terminer la question, il suffit donc de montrer que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < +\infty. \tag{4.25}$$

*Pour montrer (4.25), on utilise, comme dans la question précédente que $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :*

$$m(\mathrm{C}_n) = m(\mathrm{A}_n) - m(\mathrm{A}_{n+1}).$$

*On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_n) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_n) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} (n-1)^p m(\mathrm{A}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n) - \mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}).\end{aligned}$$

*On a donc :*

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) \le \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n), \tag{4.26}$$

*et :*

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) + \mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}). \tag{4.27}$$

*Pour conclure, on remarque que* $\dfrac{n^p-(n-1)^p}{n^{p-1}} \to p$ *quand* $n \to +\infty$. *Il existe donc* $\alpha, \beta > 0$ *t.q.* $\alpha n^{p-1} \le n^p - (n-1)^p \le \beta n^{p-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

*Si* $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < \infty$, *on déduit alors de (4.26) que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$.

*Réciproquement, on suppose que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$. *On a alors, par (4.24),* $\int |u|^p dm < \infty$ *et donc, comme* $\mathrm{N}\, 1_{\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}} \le |u|$, *on a aussi* $\mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \le \int |u|^p dm < \infty$. *On déduit alors de (4.27) que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < \infty.$$

*On a bien montré (4.25), ce qui termine la question.*

**Exercice 4.13 (Sur la convergence en mesure)** Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soit $f$ et $g$ deux fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et $g_n \to g$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$k \ge k_1 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |g(x)| \ge k\}) \le \varepsilon.$$

**Corrigé** – *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E}\,;\, |g(x)| \ge k\}$. *On a donc* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_k = \emptyset$. *Comme g est intégrable, on a* $m(\mathrm{A}_k) \le \|g\|_1/k < +\infty$. *On peut donc appliquer la continuité décroissante de m, on obtient que* $m(\mathrm{A}_k) \to 0$ *quand* $k \to +\infty$, *ce qui donne le résultat souhaité.*

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$n \ge n_0,\ k \ge k_0 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |f_n(x)| \ge k\}) \le \varepsilon.$$

**Corrigé** – *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\{|f_n| \ge k\} \subset \{|f| \ge k-1\} \cup \{|f_n - f| \ge 1\},$$

*et donc*

$$m(\{|f_n| \ge k\} \le m(\{|f| \ge k-1\}) + m(\{|f_n - f| \ge 1\}).$$

*Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $f$ *est intégrable, il existe (comme à la question précédente)* $k_0$ *t.q.*

$$k \ge k_0 \Rightarrow m(\{|f| \ge k-1\}) \le \varepsilon.$$

*Puis comme* $f_n \to f$ *en mesure, il existe* $n_0$ *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| \ge 1\}) \le \varepsilon.$$

*On a donc*

$$k \ge k_0,\ n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n| \ge k\} \le 2\varepsilon.$$

*Ce qui donne le résultat souhaité.*

(c) Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra remarquer que $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$.]

**Corrigé** – *Soit* $\delta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$. *On remarque que*

$$\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\} \subset \{|f_n(g_n - g)| \geq \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g(f_n - f)| \geq \frac{\delta}{2}\}.$$

*Pour tout* $k > 0$, *on a donc*

$$\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\} \subset \{|f_n| \geq k\} \cup \{|g_n - g| \geq \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| \geq k\} \cup \{|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2k}\}.$$

*Grâce aux deux questions précédentes, il existe donc* $k_1$, $k_0$ *et* $n_0$ *t.q. avec* $k = \max\{k_1, k_0\}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\}) \leq 2\varepsilon + m(\{|g_n - g| \geq \frac{\delta}{2k}\}) + m(\{|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2k}\}).$$

*En utilisant les convergences en mesure de* $f_n$ *et* $g_n$, *on obtient alors l'existence de* $n_1$ *t.q.*

$$n \geq n_1 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

*Ce qui prouve que* $f_n g_n \to fg$ *en mesure.*

(d) En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

**Corrigé** – *On peut, par exemple, prendre* $f$ *et* $g$ *définies par* $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ *pour* $x \in ]0,1[$ *et* $f(x) = g(x) = 0$ *si* $x \notin ]0,1[$. *(Et on prend* $f_n = f$ *et* $g_n = g$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.*)*

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$ (pour cet exemple, on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

**Corrigé** – *On peut prendre, par exemple,*

$$f_n(x) = \frac{x}{n(x^2+1)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

$$g_n(x) = x^2 + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 4.14 (Sur l'inégalité de Markov)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \leq \int_{\{|f|>a\}} |f| dm$.

**Corrigé** – *Comme* $|f| \in \mathcal{M}_+$, *la méthode pour faire les questions 1 et 2 a déjà été vue (voir l'inégalité (4.6)).*

*Soit* $a > 0$. *On remarque que* $|f| 1_{\{|f|>a\}} \geq a 1_{\{|f|>a\}}$. *Par monotonie de l'intégrale, on en déduit :*

$$am(\{|f| > a\}) = \int a 1_{\{|f|>a\}} dm \leq \int |f| 1_{\{|f|>a\}} dm = \int_{\{|f|>a\}} |f| dm.$$

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \leq (\int |f| dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

**Corrigé** – *Comme* $\int_{\{|f|>a\}} |f| dm \leq \int |f| dm$, *cette question découle immédiatement de la précédente.*

3. Montrer que

$$\lim_{a \to \infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{4.28}$$

**Corrigé** – *Soit* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $a_n \to +\infty$, *quand* $n \to +\infty$. *On pose*

$$g_n = |f| 1_{\{|f|>a_n\}}.$$

*On a* $g_n \to 0$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \leq |f|$ *p.p.. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit que* $\int g_n dm \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc, avec la question 1,* $a_n m(\{|f| > a_n\}) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.28) dans les 2 cas suivants : $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$.

**Corrigé** – *Dans le cas* $(E,T,m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$*, il suffit de prendre* $f = 1_{\mathbb{R}}$.

*Dans le cas* $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$*, on peut prendre, par exemple,* $f$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x|\ln(2x)|}$ *pour* $x \in ]0,1[$*. La fonction* $f$ *est mesurable mais n'est pas intégrable. Pour* $a > 0$*, on a* $am(\{|f| > a\}) = ax_a$ *avec* $x_a > 0$ *t.q.* $x_a|\ln(2x_a)| = \frac{1}{a}$*. On a* $x_a \to 0$ *quand* $a \to \infty$ *et donc* $am(\{|f| > a\}) = ax_a = \frac{1}{|\ln(2x_a)|} \to 0$ *quand* $a \to \infty$.

**Exercice 4.15 (Sur la positivité presque partout.)** Soit $(E,T,m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que :

$$f \geq 0 \text{ p.p.} \Longleftrightarrow \int_A f\,dm \geq 0 \text{ pour tout } A \in T.$$

**Corrigé** – *On suppose d'abord que* $f \geq 0$ *p.p.. Soit* $A \in T$*, on a alors* $f1_A \geq 0$ *p.p. et donc, par monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{L}^1$ *(proposition 4.26 page 131),* $\int_A f\,dm = \int f1_A dm \geq 0$.

*En fait, pour être tout à fait précis, la proposition 4.26 est énoncée avec l'hypothèse "*$f \geq g$*" et non seulement "*$f \geq g$ *p.p.". Toutefois il est clair que cette proposition est aussi vraie avec seulement "*$f \geq g$ *p.p.". Il suffit de remarquer que, si* $f \geq g$ *p.p., il existe* $B \in T$ *t.q.* $m(B) = 0$ *et* $f \geq g$ *sur* $B^c$*. On a donc* $f1_{B^c} \geq g1_{B^c}$*. Si* $f, g \in \mathcal{L}^1$*, la proposition 4.26 donne alors* $\int f1_{B^c}dm \geq \int g1_{B^c}dm$*. On en déduit* $\int f\,dm \geq \int g\,dm$ *car* $\int f\,dm = \int f1_{B^c}dm$ *et* $\int g\,dm = \int g1_{B^c}dm$ *(voir la proposition 4.28 page 133).*

*On suppose maintenant que* $\int_A f\,dm \geq 0$ *pour tout* $A \in T$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*, on choisit* $A = A_n = \{f \leq -\frac{1}{n}\} = \{x \in E : f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$*, de sorte que* $f1_{A_n} \leq -\frac{1}{n}1_{A_n}$*. La monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{L}^1$ *(proposition 4.26 page 131) donne alors*

$$\int f1_{A_n}dm \leq -\frac{1}{n}m(A_n).$$

*Comme* $\int f1_{A_n}dm \geq 0$ *par hypothèse, on a donc nécessairement* $m(A_n) = 0$.

*Par σ-sous additivité de m, on en déduit que* $m(\{f < 0\}) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{f \leq -\frac{1}{n}\}) = 0$*, et donc* $f \geq 0$ *p.p..*

**Exercice 4.16 (Équi–intégrabilité et équi–petitesse à l'infini)**
Soient $(E,T,m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \leq \varepsilon$. [Introduire $f_n = \inf(|f|, n)$.]

**Corrigé** – *On pose* $f_n = \inf(|f|, n)$*. Comme* $|f| - f_n \to 0$ *p.p. (et même partout), quand* $n \to +\infty$*, et que* $0 \leq |f| - f_n \leq |f| \in \mathcal{L}^1$*, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite* $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(ou la proposition 4.29). Il donne que* $\int(|f| - f_n)dm \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

*Soit* $\varepsilon > 0$*, il existe donc* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\int(|f| - f_n)dm \leq \varepsilon$*. Pour* $A \in T$*, on a donc :*

$$\begin{aligned}\int_A |f|dm &\leq \int_A (|f| - f_n)dm + \int_A f_n dm \\ &\leq \int (|f| - f_n)dm + \int_A f_n dm \leq \varepsilon + nm(A).\end{aligned}$$

*En prenant* $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$*, on en déduit :*

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|dm \leq 2\varepsilon.$$

*N.B. : Au lieu d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite* $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on peut aussi faire cet question en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et en utilisant le fait que* $f \in \mathcal{L}^1$.

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. :

$$\text{(i) } m(\mathrm{C}) < +\infty, \qquad \text{(ii) } \int_{\mathrm{C}^c} |f| dm \le \varepsilon, \qquad \text{(iii) } \sup_{\mathrm{C}} |f| < +\infty.$$

[Considérer $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E}\,;\, \frac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$, et montrer que pour $n \ge n_0$ où $n_0$ est bien choisi, $\mathrm{C}_n$ vérifie (i), (ii) et (iii).]

**Corrigé** – *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E}\,;\, \frac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f| \le n$ sur $\mathrm{C}_n$ et $\frac{1}{n} m(\mathrm{C}_n) \le \int |f| dm < \infty$. Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées si on prend $\mathrm{C} = \mathrm{C}_n$.*

*Soit $\varepsilon > 0$. On va maintenant montrer qu'on peut choisir n de manière avoir aussi (ii). Pour cela, on pose $g_n = f 1_{\mathrm{C}_n^c}$, de sorte que $g_n \to 0$ p.p. (et même partout) et $|g_n| \le |f|$ p.p. (et même partout), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou la proposition 4.29). Il donne que $\int |g_n| dm \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. (ii) soit vérifiée. En prenant $\mathrm{C} = \mathrm{C}_n$, on a donc (i), (ii) et (iii).*

**Exercice 4.17 (Intégration par rapport à une mesure image)** Cet exercice est une généralisation à un espace mesuré quelconque du théorème de la loi image (théorème 4.58) qui est restreint à un espace probabilisé. Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(\mathrm{F}, \mathrm{S})$ un espace mesurable et $f$ de E dans F. On suppose que $f$ est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{S}$. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{S}$, on pose $\mu(\mathrm{B}) = m(f^{-1}(\mathrm{B}))$ (On note souvent $\mu = f_* m$).

1. Montrer que $\mu$ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de $m$ par $f$).

**Corrigé** – *On remarque tout d'abord que $\mu$ est bien application de S dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que $\mu(\emptyset) = 0$ (car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $m(\emptyset) = 0$).*

*On montre maintenant la $\sigma$-additivité de $\mu$. Soit $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S disjoints deux à deux. On pose $\mathrm{B} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$. On veut montrer que $\mu(\mathrm{B}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{B}_n)$.*
*La suite $(f^{-1}(\mathrm{B}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, disjoints deux à deux. La $\sigma$-addivité de m donne alors*

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{B}_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f^{-1}(\mathrm{B}_n)).$$

*Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{B}_n) = f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) = f^{-1}(\mathrm{B})$, on a donc*

$$\mu(\mathrm{B}) = m(f^{-1}(\mathrm{B})) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{B}_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f^{-1}(\mathrm{B}_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{B}_n).$$

*Ceci prouve bien que $\mu$ est $\sigma$-additive et donc que $\mu$ est une mesure (sur S).*

2. $\mu$ est-elle finie (resp. $\sigma$-finie, diffuse) lorsque $m$ est finie (resp. $\sigma$-finie, diffuse) ?

**Corrigé** – *On a $\mu(\mathrm{F}) = m(f^{-1}(\mathrm{F})) = m(\mathrm{E})$. La mesure $\mu$ est donc finie si la mesure m est finie,*

*Par contre, si la mesure m est $\sigma$-finie, la mesure $\mu$ n'est pas nécessairement $\sigma$-finie. Un exemple simple est obtenu en prenant $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}$, $\mathrm{T} = \mathrm{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m = \lambda$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$\mu(\mathrm{A}) = \begin{cases} +\infty \text{ si } 0 \in \mathrm{A}, \\ 0 \text{ si } 0 \notin \mathrm{A}. \end{cases}$$

*La mesure m est bien $\sigma$-finie mais la mesure $\mu$ n'est pas $\sigma$-finie.*

*Le même exemple montre que m peut être diffuse sans que $\mu$ soit diffuse. En effet, dans l'exemple précédent, la mesure m est diffuse alors que $\mu(\{0\}) = +\infty > 0$.*

3. Montrer qu'une fonction $\Phi$ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est $\mu$–intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est $m$-intégrable et que dans ce cas

$$\int_{\mathrm{E}} \Phi \circ f \, dm = \int_{\mathrm{F}} \Phi \, d\mu. \tag{4.29}$$

**Corrigé** – *On raisonne ici en commençant par considérer $\Phi = 1_{\mathrm{B}}$ (avec $\mathrm{B} \in \mathrm{S}$) puis $\Phi \in \mathcal{E}_+(\mathrm{F},\mathrm{S})$ et $\Phi \in \mathcal{M}_+(\mathrm{F},\mathrm{S})$.*

*Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{S}$ et $\Phi = 1_{\mathrm{B}}$. On a alors*

$$\int_{\mathrm{F}} \Phi d\mu = \mu(\mathrm{B}) = m(f^{-1}(\mathrm{B})) = \int_{\mathrm{E}} 1_{f^{-1}(\mathrm{B})} dm$$
$$= \int_{\mathrm{E}} 1_{\mathrm{B}}(f(x)) dm(x) = \int_{\mathrm{E}} \Phi \circ f dm. \quad (4.30)$$

*On suppose maintenant que $\Phi \in \mathcal{E}_+(\mathrm{F},\mathrm{S})$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_p \in \mathrm{S}$ t.q. $\Phi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Phi_i$ avec $\Phi_i = 1_{\mathrm{A}_i}$. Par linéarité positive de $\mu$ et $m$, on en déduit, avec (4.30),*

$$\int_{\mathrm{F}} \Phi d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \int_{\mathrm{F}} \phi_i d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \int_{\mathrm{E}} \phi_i \circ f dm$$
$$= \int_{\mathrm{E}} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Phi_i \circ f dm = \int_{\mathrm{E}} \Phi \circ f dm.$$

*On peut maintenant considérer le cas $\Phi \in \mathcal{M}_+(\mathrm{F},\mathrm{S})$. Il existe alors une suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_+(\mathrm{F},\mathrm{S})$ t.q. $\Phi_n \uparrow \Phi$. Comme $\int_{\mathrm{F}} \phi_n d\mu = \int_{\mathrm{E}} \phi_n \circ f dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème de convergence monotone (ou simplement la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) donne alors $\int_{\mathrm{F}} \phi d\mu = \int_{\mathrm{E}} \phi \circ f dm$. L'égalité (4.29) est donc vraie pour tout $\Phi \in \mathcal{M}_+(\mathrm{F},\mathrm{S})$.*

*Enfin, soit $\Phi$ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\Phi \in \mathcal{M}(\mathrm{F},\mathrm{S})$). En utilisant (4.29) avec $\Phi^+$ et $\Phi^-$ (et en notant que $(\Phi \circ f)^+ = \Phi^+ \circ f$ et $(\Phi \circ f)^- = \Phi^- \circ f$) on obtient que $\Phi$ est $\mu$-intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que, si $\Phi$ est $\mu$-intégrable, (4.29) est vraie.*

**Exercice 4.18 ($m$–mesurabilité)** Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f$ une application de $\mathrm{A}^c$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe $g$ mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *On suppose d'abord qu'il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p.. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{B}) = 0$ et $f = g$ sur $\mathrm{B}^c$ (et $\mathrm{B}^c \subset \mathrm{A}^c$, i.e. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$).*

*Comme $g \in \mathcal{M}$, la deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.20 page 91) donne l'existence d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On a donc aussi $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{B}^c$. Comme $m(\mathrm{B}) = 0$, on a bien $f_n \to f$ p.p..*

*On suppose maintenant qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p.. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{B}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{B}^c$ (on a donc aussi $\mathrm{B}^c \subset \mathrm{A}^c$). On pose $g_n = f_n 1_{\mathrm{B}^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{B}^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in \mathrm{B}$. Avec ces choix de $g_n$ et g, on a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ et $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On a donc, par la proposition 3.20, $g \in \mathcal{M}$. On a aussi $f = g$ p.p. car $f = g$ sur $\mathrm{B}^c$ et $m(\mathrm{B}) = 0$.*

**Exercice 4.19 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.33)** On reprend les notations de l'exercice 2.33 page 78. On note donc $(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}},\overline{m})$ le complété de l'espace mesuré $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.
Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}},\overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}},\overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

**Corrigé** – *1. On commence par montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}},\overline{m})$.*

*Comme $\mathrm{T} \subset \overline{\mathrm{T}}$, on a $\mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$, $\mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$, $\mathcal{E}(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{E}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$ et $\mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{E}_+(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$. Puis, comme $\overline{m} = m$ sur T, on a $\int f dm = \int f d\overline{m}$ pour tout $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. Si $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$*

*$\mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors :*

$$\int f dm = \int f d\overline{m}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T}). \tag{4.31}$$

*Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a donc $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$ et (4.31) donne $\int |f| d\overline{m} = \int |f| dm < \infty$. Donc, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}},\overline{m})$. En appliquant (4.31) à $f^{\pm}$, on montre aussi que $\int f dm = \int f d\overline{m}$.*

2. *On va montrer la deuxième partie de la question en raisonnant en trois étapes :*

   *(a) Soit $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$. Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$ t.q. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{N}$. Il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$. On a $\{1_\mathrm{A} \neq 1_\mathrm{C}\} \subset \mathrm{N} \subset \mathrm{B}$. Donc, $\{1_\mathrm{A} \neq 1_\mathrm{C}\} \in \mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, c'est-à-dire $1_\mathrm{A} = 1_\mathrm{C}$ $m$-p.p. et $\overline{m}$-p.p.. En fait, comme $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, il est identique de dire "$m$-p.p." et "$\overline{m}$-p.p.", on dira donc simplement "p.p.".*

   *(b) Soit $f \in \mathcal{E}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$. Il existe $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n \in \overline{\mathrm{T}}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{C}_i}$. D'après (a), on trouve $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $1_{\mathrm{A}_i} = 1_{\mathrm{C}_i}$ p.p., pour tout $i$. On pose alors $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$, de sorte que $g \in \mathcal{E}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ et $g = f$ p.p..*

   *(c) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}},\overline{m})$. Comme $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$, il existe (d'après la proposition 3.20) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$ t.q. $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. D'après (b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in \mathcal{E}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ t.q. $f_n = g_n$ p.p.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $f_n = g_n$ sur $\mathrm{A}_n^c$. On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. On a $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n = g_n$ sur $\mathrm{A}^c$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors $g$ par $g = f$ sur $\mathrm{A}^c$ et $g = 0$ sur $\mathrm{A}$. On a $g \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ car $g$ est limite simple de $(g_n 1_{\mathrm{A}^c}) \in \mathcal{E}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ (cf. proposition 3.20) et $f = g$ p.p. (car $f = g$ sur $\mathrm{A}^c$).*

   *Comme $|f|, |g| \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\overline{\mathrm{T}})$ et $|f| = |g|$ p.p., on a $\infty > \int |f| d\overline{m} = \int |g| d\overline{m}$. Puis, comme $|g| \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$, (4.31) donne $\int |g| d\overline{m} = \int |g| dm$. On en déduit donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.*

   *Enfin, en utilisant le fait que $f^+ = g^+$ p.p., $f^- = g^-$ p.p. et (4.31) (avec $g^+$ et $g^-$) on a aussi :*

$$\begin{aligned}\int f d\overline{m} &= \int f^+ d\overline{m} - \int f^- d\overline{m} = \int g^+ d\overline{m} - \int g^- d\overline{m} \\ &= \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.\end{aligned}$$

   *On a bien trouvé $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et $\int f d\overline{m} = \int g dm$.*

**Exercice 4.20 (Petit lemme d'intégration)** Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que

$$(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}_n) \to 0 \ \Rightarrow \int f 1_{\mathrm{A}_n} dm \to 0. \tag{4.32}$$

   **Corrigé** – *Comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, la question 1 de l'exercice 4.16 page 159 donne : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ t.q. $(\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{A}) \leq \eta) \Rightarrow \int f 1_\mathrm{A} dm \leq \varepsilon$. Ceci donne (4.32)...*

2. On prend (dans cette question) $(\mathrm{E},\mathrm{T},m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$, $f \geq 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$) et (4.32) est faux.

   **Corrigé** – *On prend $f(x) = x 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $\mathrm{A}_n = ]n, n+1/n[$. On a $m(\mathrm{A}_n) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) et $\int f 1_{\mathrm{A}_n} d\lambda \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\int f 1_{\mathrm{A}_n} d\lambda \not\to 0$.*

3. On suppose (dans cette question) que $m(\mathrm{E}) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est-à-dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$). Montrer que

$$(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T},\ \int f 1_{\mathrm{A}_n} dm \to 0 \ \Rightarrow m(\mathrm{A}_n) \to 0. \tag{4.33}$$

   [On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in \mathrm{A}_n ; f(x) \geq \frac{1}{p}\}$.]

**Corrigé –** *On a* $\{f < \frac{1}{p+1}\} \subset \{f < \frac{1}{p}\}$, $\bigcap_{p\in\mathbb{N}^\star}\{f < \frac{1}{p}\} = \emptyset$ *et* $m(\{f < \frac{1}{p}\}) < \infty$, *pour tout* $p \in \mathbb{N}^\star$ *(car* $m(\mathrm{E}) < \infty$*). La propriété de continuité décroissante de la mesure m donne alors que* $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \to 0$ *quand* $p \to \infty$.

*Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe donc* $p \in \mathbb{N}^\star$ *t.q.* $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \le \varepsilon$. *On a alors* $m(\mathrm{A}_n) \le \varepsilon + m(\{x \in \mathrm{A}_n; f(x) \ge \frac{1}{p}\}) \le \varepsilon + p\int f 1_{\mathrm{A}_n} dm$. *Comme* $\int f 1_{\mathrm{A}_n} dm \to 0$, *il existe donc* $n_0$ *t.q.* $m(\mathrm{A}_n) \le 2\varepsilon$ *pour* $n \ge n_0$, *ce qui prouve* (4.33).

4. On prend (dans cette question) $(\mathrm{E},\mathrm{T},m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (de sorte que $m(\mathrm{E}) = +\infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et $f > 0$, alors (4.33) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ t.q. $f > 0$.

   **Corrigé –** *On prend* $\mathrm{A}_n = ]n, n+1[$. *En appliquant la proposition 4.29 page 133 (ou le théorème de convergence dominée) à la suite* $(f 1_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$, *on obtient que* $\int f 1_{\mathrm{A}_n} d\lambda \to 0$ *(quand* $n \to +\infty$*). D'autre part* $\lambda(\mathrm{A}_n) = 1 \not\to 0$. *La propriété (4.33) est donc fausse.*

   *On obtient un exemple de* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ *t.q.* $f > 0$ *en prenant* $f(x) = \exp(-|x|)$.

**Exercice 4.21 (Fatou sans positivité)** Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et $h \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to +\infty$, $f_n \ge f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \le \mathrm{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ t.q.

      i. $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,

      ii. $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

      iii. $g_n \ge g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

      **Corrigé –** *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{A}) = 0$ *et* $f_n(x) \to h(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}^c$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *soit* $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{A}_n) = 0$ *et* $f_n(x) \ge f(x)$ *pour tout* $x \in (\mathrm{A}_n)^c$. *On pose* $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)$. *On a* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{B}) = 0$, $f_n(x) \to h(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{B}^c$ *et* $f_n(x) \ge f(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{B}^c$.
      *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n 1_{\mathrm{B}^c} + h 1_{\mathrm{B}}$ *et* $g = f 1_{\mathrm{B}^c} + h 1_{\mathrm{B}}$. *On a bien* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *et les 3 conditions demandées sont vérifiées.*

   (b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

      **Corrigé –** *On applique le lemme de Fatou à la suite* $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *(noter aussi que* $(h-g) \in \mathcal{M}_+$*).*
      *On obtient* $\int (h-g) dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int (g_n - g) dm \le \mathrm{C} - \int g dm < \infty$.
      *On en déduit que* $(h-g) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *et donc* $h = h - g + g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \ge f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $\mathrm{D} \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \ge \mathrm{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. [Prendre $(\mathrm{E},\mathrm{T},m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.]

   **Corrigé –** *On prend* $f_n = 1_{[1/n, n+1/n]} - n^2 1_{[0,1/n[}$ *et* $h = 1_{\mathbb{R}_+}$. *On a* $f_n \to h$ *p.p.*, $\int f_n dm = 0$ *et* $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

**Exercice 4.22 (Application du théorème de convergence monotone)**
Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ ($\lambda$ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,1])$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   **Corrigé –** *La fonction* $x \mapsto e^{nx}$ *est continue donc mesurable (de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$, *tous deux munis de la tribu borélienne). La fonction* $x \mapsto e^{nx} f(x)$ *est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables.*

   *On remarque ensuite que* $\int |e^{nx} f(x)| d\lambda(x) \le e^n \|f\|_1 < \infty$. *On en déduit que la fonction* $x \mapsto e^{nx} f(x)$ *appartient à* $\mathcal{L}^1$.

On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \geq 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx} f(x)\, d\lambda(x) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

   **Corrigé** – *On pose* $A = \{f > 0\} = \{x \in E\,;\, f(x) > 0\}$ *et* $B = A \setminus \{0\}$. *Comme $f$ est mesurable, on a* $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$.

   *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = e^{nx}|f(x)|$ pour $x \in [0,1]$. On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec $g$ définie par :*

$$
\begin{aligned}
&g(x) = \infty, \ \ si\ x \in B,\\
&g(x) = 0, \ \ si\ x \in ]0,1] \setminus B,\\
&g(0) = |f(0)|.
\end{aligned}
$$

   *Le théorème de convergence monotone donne que $g \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$. Comme $g_n = e^{n\cdot} f$ p.p., on a $\int g_n dm = \int e^{nx} f(x)\, d\lambda(x) \leq M$ et donc, en passant à limite quand $n \to +\infty$, $\int g dm \leq M$.*

   *On a aussi $h_n \uparrow g$ avec $h_n = n 1_B + |f(0)| 1_{\{0\}}$.*

   *La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors $\int g dm = \lim_{n\to+\infty} n\lambda(B)$ et donc $\int g dm = \infty$ si $\lambda(B) > 0$. Comme $\int g dm \leq M$, on a donc $\lambda(B) = 0$ et donc aussi $\lambda(A) = 0$, ce qui donne $f = 0$ p.p..*

3. On suppose de plus que $f$ est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

   **Corrigé** – *On pose toujours* $A = \{f > 0\} = \{x \in E\,;\, f(x) > 0\}$. *Comme $f$ est continue, l'ensemble $A$ est un ouvert de $[0,1]$. Si $A \neq \emptyset$, il existe un intervalle ouvert non vide inclus dans $A$ et donc $\lambda(A) > 0$ en contradiction avec le résultat de la question précédente qui donne $\lambda(A) = 0$. On a donc $A = \emptyset$, c'est-à-dire $f = 0$ sur tout $[0,1]$.*

**Exercice 4.23 (Distance associée à la convergence en mesure)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré fini. On pose, pour $f$ et $g$ fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $f, g \in \mathcal{M}$) :

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dm.$$

1. Montrer que $d$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $f, g \in \mathcal{M}$) et que $d$ est une semi–distance sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire que $d(f,g) = d(g,f)$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$, et que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, pour tout $f, g, h \in \mathcal{M}$).
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \subset \mathcal{M}$. Montrer que $f_n$ converge en mesure vers $f$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. [Il est probablement utile de considérer, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $A_n = \{x \in E; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

**Exercice 4.24 (Lemme de Fatou et convergence en mesure)**

Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) et $f$ une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$). On suppose que $f_n$ tend vers $f$ en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < 1/2^k$ pour tout $n \geq n_k$. En déduire qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (la fonction $\varphi$ est donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

**Corrigé** – *Selon la définition de la convergence en mesure, définition 3.40, on a* $\lim_{n\to+\infty} m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$. *On en déduit l'existence de* $n_k$.
*Il suffit, par exemple, de prendre* $\varphi(0) = n_0$*, puis, pour tout* $k > 1$, $\varphi(k) = \max\{n_k, \varphi(k-1)+1\}$. *La fonction* $\varphi$ *est strictement croissante et*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_{\varphi(n)}$, $\mathrm{A}_n = \{|g_n - f| \geq \varepsilon\}$, et $\mathrm{B}_n = \cup_{p=n}^{\infty} \mathrm{A}_p$.

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{B}_n) = 0$.

**Corrigé** – *Par* $\sigma$*-sous additivité de* $m$*, on a*

$$m(\mathrm{B}_n) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} m(\mathrm{A}_p) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

*car la première question donne que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$. En déduire que

$$\int_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq \int_{\mathrm{A}_n^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2 \int |g_n| dm. \tag{4.34}$$

**Corrigé** – *Soit* $x \in \{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c$. *Comme* $x \in \mathrm{A}_n^c$*, on a* $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *et donc* $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. *Comme* $|f(x)| \geq 2\varepsilon$ *on a donc* $|g_n(x)| > \varepsilon$. *On en déduit que*

$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq 2|g_n(x)|.$$

*On a bien montré que* $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$.

*Comme* $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{B}_n$*, on a* $\mathrm{B}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\} \subset \mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$. *Cette inclusion donne la première inégalité de* (4.34). *Puis comme* $|f| \leq 2|g_n|$ *sur* $\mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$*, on obtient la seconde inégalité de* (4.34).

2. On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| dm \leq \mathrm{M}$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\int_{\{|f|\geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2\mathrm{M}. \tag{4.35}$$

[On pourra noter que $\int |g_n| dm \leq \mathrm{M}$, utiliser (4.34) et faire tendre $n$ vers $+\infty$.]

**Corrigé** – *En reprenant les ensembles* $\mathrm{B}_n$ *de la question précédente on a*

$$\int |f| 1_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2 \int |g_n| dm \leq 2\mathrm{M}.$$

*La suite d'ensembles* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. La suite* $(\mathrm{B}_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante. On pose* $\mathrm{B} = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$*, de sorte que* $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n^c = \mathrm{B}^c$. *La suite de fonctions* $(|f| 1_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc (simplement) en croissant vers* $|f| 1_{\mathrm{B}^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}}$. *Le théorème de convergence monotone donne alors que*

$$\int |f| 1_{\mathrm{B}^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2\mathrm{M}.$$

*On utilise maintenant la continuité décroissante de* $m$ *et la question 1(b). On obtient que* $m(\mathrm{B}) = \lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{B}_n) = 0$. *On en déduit que*

$$\int |f| 1_{\{|f|\geq 2\varepsilon\}} dm = \int |f| 1_{\mathrm{B}^c \cap \{|f|\geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2\mathrm{M}.$$

(b) Montrer que
$$\int |f| dm \leq 2\mathrm{M}. \tag{4.36}$$
[On pourra utiliser (4.35) avec $\varepsilon = 1/n$ et faire tendre $n$ vers $+\infty$.]

**Corrigé** – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente donne*
$$\int |f| 1_{\{|f| \geq \frac{2}{n}\}} dm \leq 2\mathrm{M}.$$
*Quand $n \to +\infty$, $|f|1_{\{|f|\geq \frac{2}{n}\}} \uparrow |f|$. On peut encore appliquer le théorème de convergence monotone, il donne* (4.36).

(c) En modifiant légérement la technique utilisée à la première question, montrer que (4.36) reste vrai avec $\alpha$M au lieu de 2M dès que $\alpha > 1$.
En déduire que (4.36) reste vrai avec M au lieu de 2M.

**Corrigé** – *Soit $\eta > 0$. A la question 1(c), on remplace l'ensemble $\{|f| \geq 2\varepsilon\}$ par $\{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}$.*
*Soit $x \in \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c$. Comme $x \in \mathrm{A}_n^c$, on a $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et donc $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. Comme $|f(x)| \geq (1+\eta)\varepsilon$ on a donc $|g_n(x)| > \eta\varepsilon$. On en déduit que*
$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq \frac{\eta+1}{\eta}|g_n(x)|.$$
*On a donc $\{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq \frac{\eta+1}{\eta}|g_n|\}$.*
*On obtient ainsi, au lieu de* (4.34),
$$\int_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}} |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta} \int |g_n| dm.$$
*On reprend alors les questions 2(a) et 2(b) en appliquant toujours le théorème de convergence montone. On obtient $\int |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta}\mathrm{M}$.*
*Si $\alpha > 1$, il est possible de choisir $\eta > 0$ pour que $(\eta+1)/\eta = \alpha$. On obtient donc $\int |f| dm \leq \alpha\mathrm{M}$. Enfin, comme $\alpha$ est arbitrairement proche de 1, on en déduit bien que $\int |f| dm \leq \mathrm{M}$.*

NB. Une autre méthode pour démontrer (4.36) (avec M au lieu de 2M) consiste à remarquer qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. (ceci est une conséquence de la convergence en mesure de $f_n$ vers $f$, exercice 3.28). Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour conclure.

**Exercice 4.25 (Convergence p.p. et convergence vague)**
On note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 1_{]\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3}[}.$$

1. Montrer que $f_n \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n\|_1 = 1$.
2. Montrer que $f_n \to 0$ p.p..
3. Soit $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_0^1 f_n(x)\varphi(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$
En déduire que $\int_0^1 f_n(x)\varphi(x)dx \to \int_0^1 \varphi(x)dx$ quand $n \to +\infty$.
4. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

### 4.11.2 L'espace $L^1$

**Exercice 4.26 (Mesure de densité)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que $\mu$ est une mesure sur T.

**Corrigé** – *On rappelle que, par définition, pour tout* $A \in T$, *on a* $\int_A f dm = \int f 1_A dm$ *avec* $f 1_A = 0$ *sur* $A^c$ *et* $f 1_A = f$ *sur* A *(on a bien* $f 1_A \in \mathcal{M}_+$ *et donc* $\int_A f dm$ *est bien définie).*

*On montre maintenant que* $\mu$ *est une mesure.*

*Il est clair que* $\mu(\emptyset) = 0$ *car* $f 1_A = 0$ *(sur tout* E*) si* $A = \emptyset$. *Pour montrer que* $\mu$ *est un mesure, il reste à montrer que* $\mu$ *est* $\sigma$*-additive.*

*Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *t.q.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$. *On pose* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et on remarque que* $1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$ *pour tout* $x \in E$ *et donc* $f 1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f 1_{A_n}(x)$ *pour tout* $x \in E$. *Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors*

$$\int f 1_A dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f 1_{A_n} dm,$$

*c'est-à-dire* $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. *Ceci prouve que* $\mu$ *est* $\sigma$*-additive et donc que* $\mu$ *est une mesure.*

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g d\mu = \int f g dm$.

**Corrigé** – *On raisonne en trois étapes :*

*(a) Soit* $g \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. *Il existe donc* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^*_+$ *et* $A_1, \ldots, A_p \in T$ *t.q.* $g = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$. *On a alors (en posant* $fg(x) = 0$ *si* $f(x) = \infty$ *et* $g(x) = 0$*)* $fg = \sum_{i=1}^p a_i f 1_{A_i} \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int f g dm = \sum_{i=1}^p a_i \int f 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^p a_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

*(Ce qui, bien sûr, est aussi vrai pour* $g = 0$.*)*

*(b) Soit* $g \in \mathcal{M}_+$. *Il existe alors* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *t.q.* $g_n \uparrow g$. *L'item précédent donne que* $\int f g_n dm = \int g_n d\mu$. *Avec le théorème de convergence monotone (pour* $\mu$ *et pour* $m$, *puisque* $f g_n \uparrow f g$ *en posant toujours* $fg(x) = 0$ *si* $f(x) = \infty$ *et* $g(x) = 0$*), on en déduit que* $fg \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int f g dm = \int g d\mu. \tag{4.37}$$

*(c) Soit maintenant* $g \in \mathcal{M}$. *En appliquant (4.37) à* $|g| \in \mathcal{M}_+$, *on a :*

$$\int |fg| dm = \int f|g| dm = \int |g| d\mu,$$

*et donc :*

$$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu).$$

*En fait, on peut ne pas avoir* $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *car* $fg$ *peut prendre les valeurs* $\pm\infty$. *L'assertion "*$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*" est à prendre, comme d'habitude, au sens "il existe* $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $fg = h$ *p.p.". Ceci est vérifié car si* $\int |fg| dm < \infty$, *on a* $|fg| < \infty$ *p.p.. Il suffit alors de changer* $fg$ *sur un ensemble de mesure nulle pour avoir une fonction mesurable prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}$.

*Si* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, *en écrivant (4.37) avec* $g^+$ *et* $g^-$ *(qui sont bien des éléments de* $\mathcal{M}_+$*) et en faisant la différence on obtient bien que* $\int f g dm = \int g d\mu$.

**Exercice 4.27 (Suite bornée convergeant dans $L^1$)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f_n| \leq C$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int |f_n - f|^2 dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, elle contient une sous-suite qui converge p.p.. c'est-à-dire qu'il existe application $\varphi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p.. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leq C$ p.p., on en déduit que $|f| \leq C$ p.p..*

*Pour conclure, on remarque maintenant que*

$0 \leq \int |f_n - f|^2 dm \leq \int (|f_n| + |f|)|f_n - f| dm \leq 2C \int |f_n - f| dm \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

**Exercice 4.28 (Comparaison de convergence dans $L^1$)** On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\delta_a$ la mesure de Dirac en $a$. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que $\mu$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^1(\mu) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.
2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?.

**Exercice 4.29 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)**
Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ ($= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$) ; on suppose que $f_n$ converge uniformément vers $f$ quand $n \to +\infty$ (plus précisément : il existe des représentants des $f_n$, encore notés $f_n$, t.q. $f_n$ converge uniformément vers $f$).

1. A-t-on $f \in L^1$ (plus précisément : existe-t-il $F \in L^1$ t.q. $f = g$ p.p. si $g \in F$) ? [Distinguer les cas $m(E) < +\infty$ et $m(E) = +\infty$.]
2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$ ?

**Exercice 4.30 (Convergence dans $L^1$ de fonctions positives)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré. On note $L^1$ l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans $L^1$. [On pourra examiner la suite $(f - f_n)^+$.]

**Corrigé** – *On pose $h_n = (f - f_n)^+$. On a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h_n \to 0$ p.p.. De plus, comme $f_n \geq 0$ p.p., on a $0 \leq h_n \leq f^+$ p.p.. En effet, soit $x \in E$ t.q. $h_n(x) \neq 0$. On a alors, si $f_n(x) \geq 0$ (ce qui est vrai pour presque tout $x$), $0 < h_n(x) = f(x) - f_n(x) \leq f(x) = f^+(x)$.*

*Comme $f^+ \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne que $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire*

$$\int (f - f_n)^+ dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.38}$$

*On remarque ensuite que*

$$\int (f - f_n)^- dm = \int (f - f_n)^+ dm - \int (f - f_n) dm,$$

*et donc, comme $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$,*

$$\int (f - f_n)^- dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.39}$$

*De (4.38) et (4.39), on déduit*

$$\int |f - f_n| dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

*c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, quand $n \to +\infty$.*

**Exercice 4.31 (Exemple de convergence)**
On pose $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = ([-1, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = n 1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathrm{L}^1$ et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?
3. A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ ?
4. Montrer que pour toute fonction $\varphi$ continue de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.

**Exercice 4.32 (Théorème de Beppo-Lévi)**
Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ $(= \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$ et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, tels que

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   **Corrigé** – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de $f_n$, que l'on note encore $f_n$.*

   *L'hypothèse (i) donne qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$.*

   *L'hypothèse (ii) donne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est monotone. On suppose que cette suite est monotone croissante (le cas monotone décroissante est similaire). Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $f_{n+1} \geq f_n$ sur $\mathrm{A}_n^c$.*

   *On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)$. On a donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$. Puis on pose $g_n = f_n 1_{\mathrm{B}^c}$ et on définit $g$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{B}^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in \mathrm{B}$. On a bien $f = g$ p.p., $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$, $f_n = g_n$ p.p. et $g_{n+1} \geq g_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Enfin $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et $g \in \mathcal{M}$ car $g$ est limite simple d'éléments de $\mathcal{M}$ (voir la proposition 3.19 sur la stabilité de $\mathcal{M}$).*

   *On remarque aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ et $g_n$ sont deux représentants du même élément de $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $\int f_n dm = \int g_n dm$.*

2. Montrer que $f \in \mathrm{L}^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.

   **Corrigé** – *On reprend la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction $g$ construites à la question précédente et on distingue maintenant les 2 cas de l'hypothèse (ii).*

*Cas 1 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone croissante.*

*Dans ce cas, on a $(g_n - g_0) \uparrow (g - g_0)$ quand $n \to +\infty$ et, comme $(g_n - g_0) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.16). Il donne ($(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$ et)*

$$\int (g_n - g_0) dm \to \int (g - g_0) dm \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.40}$$

*On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0| dm = \int (g - g_0) dm$ car $(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$. La propriété (4.40) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_n - g_0) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de $\infty$).*

*Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $\int (g_n - g_0) dm = \int g_n dm - \int g_0 dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.*

*Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement la limite de la suite (croissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.*

*On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p.. Plus précisément :*

- *Si la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$, on obtient que $g \in \mathcal{L}^1$) et donc que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (on confond donc $f$ et la classe de $g$, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)\,;\, h = g$ p.p.$\}$).*
- *Réciproquement, si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, cela signifie qu'il existe $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = h$ p.p. (on a donc confondu $f$ et la classe de $h$). Comme $f = g$ p.p., on a aussi $h = g$ p.p.. Comme $g \in \mathcal{M}$, on obtient donc que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ ce qui donne, par (4.40), que la limite de la suite (croissante) $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.*

*Cas 2 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone décroissante.*

*La démonstration est très voisine de la précécente. On remarque que $(g_0 - g_n) \uparrow (g_0 - g)$ quand $n \to +\infty$ et, comme $(g_0 - g_n) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.16). Il donne ($(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$ et)*

$$\int (g_0 - g_n) dm \to \int (g_0 - g) dm \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.41}$$

*On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0| dm = \int (g_0 - g) dm$ car $(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$. La propriété (4.41) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_0 - g_n) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de $\infty$).*

*Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $\int (g_0 - g_n) dm = \int g_0 dm - \int g_n dm$ et donc $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de $-\infty$).*

*Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ et que $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et finalement on obtient bien que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement la limite de la suite (décroissante) $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$.*

*On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f = g$ p.p., comme dans le premier cas.*

3. On suppose ici que $f \in \mathrm{L}^1$, montrer que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1$, lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *On utilise toujours la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction $g$ construites à la première question.*

*Comme $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ on a $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et la propriété (4.40) (ou la propriété (4.41)) donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$ et donc*

$$\int |g_n - g| dm \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

*(On a utilisé ici le fait que $(g_n - g)$ a un signe constant et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.)*

*Comme $\|f_n - f\|_1 = \int |g_n - g| dm$, on en déduit que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, quand $n \to +\infty$.*

**Exercice 4.33 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)**
Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et soit $f \in \mathrm{L}^1$ $(= \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$

[Choisir un représentant de $f$ et introduire $f_n = \inf(|f|, n)$].

**Corrigé** – *En choisissant un représentant de $f$, cette question est démontrée à la question 1 de l'exercice 4.16.*

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.

[Choisir un représentant de $f$ et considérer $C_n = \{x \in E;\ \dfrac{1}{n} \le |f(x)|\}$.]

**Corrigé** – *On choisit un représentant de $f$, encore noté $f$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \{|f| \ge \frac{1}{n}\}$.*

*Comme $|f| \ge \frac{1}{n} 1_{C_n}$, on a, par monotonie de l'intégrale, $m(C_n) \le n\|f\|_1 < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

*On pose maintenant $g_n = |f| 1_{C_n^c}$. On remarque que $g_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$ et que $|g_n| \le |f|$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou la proposition préliminaire 4.29). Il donne que $\int g_n dm \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

*Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\int g_n dm \le \varepsilon$. On prend alors $C = C_{n_0}$, on a bien $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.*

**Exercice 4.34 (Théorème de Vitali)**
Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans $L^1$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi–intégrable *i.e.* : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta$ t.q. ($A \in T$, $n \in \mathbb{N}$, $m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon$).

[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser la question 1 de l'exercice 4.33. Pour le sens $\Leftarrow$, remarquer que $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...]

**Corrigé** – **Sens($\Rightarrow$)** *Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 4.33 (première question), il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ t.q. :*

$$A \in T,\ m(A) \le \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{4.42}$$

*On ne peut pas déduire de (4.42) l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car on peut avoir $\inf_{n \in \mathbb{N}} \delta_n = 0$.*

*Comme $f \in L^1$, il existe aussi $\delta > 0$ t.q. :*

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon. \tag{4.43}$$

*On va déduire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant (4.42) et (4.43).*

*Soit $A \in T$, on a :*

$$\int_A |f_n| dm \le \int_A |f_n - f| dm + \int_A |f| dm \le \int |f_n - f| dm + \int_A |f| dm. \tag{4.44}$$

*Comme $f_n \to f$ dans $L^1$ quand $n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ si $n > n_0$. Pour $n > n_0$ et $m(A) \le \delta$, (4.44) et (4.43) donne donc $\int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon$. On choisit alors $\bar{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}, \delta\} > 0$ et on obtient, avec aussi (4.42) (pour tout $n \le n_0$) :*

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \le \bar{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon.$$

*Ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

**Sens ($\Leftarrow$)**

*on veut montrer ici que $f \in \mathrm{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

*Soit $\varepsilon > 0$. L'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'existence de $\delta > 0$ t.q. :*

$$n \in \mathbb{N}, \mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \bar{\delta} \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le 2\varepsilon. \tag{4.45}$$

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit maintenant un représentant de $f_n$, encore noté $f_n$. Comme $f_n \to f$ p.p., il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{B}) = 0$ et $f_n \to f$ sur $\mathrm{B}^c$. En remplaçant $f$ par $f 1_{\mathrm{B}^c}$ (ce qui ne change $f$ que sur un ensemble de mesure nulle, donc ne change pas les hypothèses du théorème), on a alors $f \in \mathcal{M}$ car $f$ est limite simple de la suite $(f_n 1_{\mathrm{B}^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (noter que $f$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme $m(\mathrm{E}) < +\infty$, on peut utiliser le théorème d'Egorov (théorème 3.39) ; il donne l'existence de $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $f_n \to f$ uniformément sur $\mathrm{A}^c$, c'est-à-dire $\sup_{x\in\mathrm{A}^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi, pour ce choix de $\mathrm{A}$,*

$$\int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm \le m(\mathrm{E}) \sup_{x\in\mathrm{A}^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ \textit{quand } n \to +\infty.$$

*Il existe donc $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$. Avec (4.45), on en déduit, pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$ :*

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{\mathrm{A}^c} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm + \int_{\mathrm{A}} |f| dm \le 2\varepsilon + \int_{\mathrm{A}} |f| dm.$$

*Pour majorer le dernier terme de l'inégalité précédente, on utilise le lemme de Fatou sur la suite $(|f_n| 1_{\mathrm{A}})_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est bien dans $\mathcal{M}_+$). Comme $\liminf_{n\to+\infty} |f_n| 1_{\mathrm{A}} = |f| 1_{\mathrm{A}}$, il donne avec (4.45),*

$$\int_{\mathrm{A}} |f| dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n| 1_{\mathrm{A}} \le \varepsilon.$$

*On a donc, finalement,*

$$n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 3\varepsilon. \tag{4.46}$$

*En choisissant $n = n_0(1)$, on déduit de (4.46) que $f_n - f \in \mathrm{L}^1$ et donc que $f = (f - f_n) + f_n \in \mathrm{L}^1$. Cette appartenance étant, comme d'habitude à prendre au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p. (en fait, ici, comme nous avons remplacé $f$ par $f 1_{\mathrm{B}^c}$ ci-dessus, on a même $f \in \mathcal{L}^1$).*

*Puis, (4.46) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

2. On suppose maintenant $m(\mathrm{E}) = +\infty$. Montrer que : $f \in \mathrm{L}^1$ et $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{C} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |f_n| dm \le \varepsilon$ pour tout $n$.
[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser l'exercice 4.33. Pour le sens $\Leftarrow$, utiliser l'exercice 4.33, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.]

**Corrigé** – **Sens ($\Rightarrow$)**

*(a) L'hypothèse $m(\mathrm{E}) < +\infty$ n'a pas été utilisée à la question précédente. La même démonstration donne donc ici l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

*(b) On utilise maintenant la deuxième question de l'exercice 4.33.*

*Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{C}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}_n) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}_n^c} f_n dm \le \varepsilon$. Comme $f \in \mathrm{L}^1$, il existe aussi $\mathrm{D} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{D}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{D}^c} f dm \le \varepsilon$. Enfin, comme $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1$ quand $n \to +\infty$, il existe $n_0$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$.*

*On choisit maintenant $\mathrm{C} = \mathrm{D} \cup (\bigcup_{n=0}^{n_0} \mathrm{C}_n)$, de sorte que*

$$m(\mathrm{C}) < m(\mathrm{D}) + \sum_{n=0}^{n_0} m(\mathrm{C}_n) < +\infty,$$

*$\mathrm{C}^c \subset \mathrm{D}^c$ et $\mathrm{C}^c \subset \mathrm{C}_n^c$ si $n \le n_0$. Ce choix de $\mathrm{C}$ nous donne, pour tout $n \ge n_0$,*

$$\int_{\mathrm{C}^c} |f_n| dm \le \int_{\mathrm{D}^c} |f| dm + \int |f_n - f| dm \le 2\varepsilon,$$

*et, pour tout $n \leq n_0$,*

$$\int_{C^c} |f_n| dm \leq \int_{C_n^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

*On a donc $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Sens ($\Leftarrow$)**
*on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*
*Soit $\varepsilon > 0$. La deuxième hypothèse donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et*

$$\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

*Comme dans la question précédente, on peut supposer (en changeant éventuellement $f$ sur un ensemble de mesure nulle) que $f \in \mathcal{M}$. En appliquant le lemme de Fatou*
*à la suite $(|f_n| 1_{C^c})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (4.47) que*

$$\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon. \tag{4.48}$$

*La première hypothèse (c'est-à-dire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) donne l'existence de $\delta > 0$ t.q.*

$$n \in \mathbb{N}, A \in T, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{4.49}$$

*On peut maintenant utiliser le théorème d'Egorov sur la suite $(f_{n|_C})_{n \in \mathbb{N}}$ (qui converge p.p. vers $f_{|_C}$) dans l'espace mesurable $(C, T_C)$ où $T_C$ est la tribu $\{B \in T ; B \subset C\}$. Il donne l'existence de $A \subset C$, $A \in T$, t.q. $m(A) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur $A^c \cap C$. On en déduit que*

$$\int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \leq m(C) \sup_{x \in A^c \cap C} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

*Il existe donc $n_0$ t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm \leq \varepsilon. \tag{4.50}$$

*Enfin, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n| 1_A)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, on déduit de (4.49) que*

$$\int_A |f| dm \leq \varepsilon. \tag{4.51}$$

*Il suffit maintenant de remarquer que*

$$\int |f_n - f| dm \leq \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm \\ + \int_{C^c} |f_n| dm + \int_{C^c} |f| dm,$$

*pour déduire de (4.50), (4.49), (4.51), (4.47) et (4.48) que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq 5\varepsilon.$$

*On conclut comme à la question précédente. En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, on montre que $f \in L^1$ puis, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on montre que $f_n \to f$ dans $L^1$ quand $n \to +\infty$.*

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

**Corrigé** – *Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$ et $F \in L^1$ t.q. $|f_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
*En utilisant l'exercice 4.33 sur F, on montre facilement l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_n$ et l'existence, pour tout $\varepsilon >$ 0, de $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (noter que si $m(E) < +\infty$ cette propriété est immédiate en prenant $C = E$). Il est alors facile de montrer le théorème de convergence dominée à partir du théorème de Vitali.*

**Exercice 4.35 (Théorème de "Vitali-mesure")** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < +\infty$. On se propose ici de montrer que $[f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty]$ si et seulement si on a les deux propriétés suivantes :

   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$,

   p2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

   (a) Montrer le sens direct (c'est-à-dire que la convergence pour la norme de $L^1$ implique p1 et p2).

   **Corrigé** – *On montre tout d'abord la convergence en mesure. Soit $\eta > 0$. On a alors :*

   $$m(\{|f_n - f| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta}\int |f_n - f| dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

   *Ce qui donne que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$.*

   *Pour montrer l'équi-intégrabilité, il suffit de remarquer que, pour tout $A \in T$, on a :*

   $$\int_A |f_n| dm \leq \int |f_n - f| dm + \int_A |f| dm.$$

   *Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, il existe (voir la proposition 4.50) $\delta > 0$ t.q.*

   $$m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

   *Comme $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, il existe $n_0$ t.q.*

   $$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq \varepsilon.$$

   *On en déduit :*

   $$(n \geq n_0 \text{ et } m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon. \tag{4.52}$$

   *Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (voir la proposition 4.50) $\delta_n > 0$ t.q.*

   $$m(A) \leq \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{4.53}$$

   *En posant $\bar{\delta} = \min\{\delta, \delta_0, \ldots, \delta_n\}$ on a donc, avec (4.52) et (4.53) :*

   $$(n \in \mathbb{N} \text{ et } m(A) \leq \bar{\delta}) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

   *Ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

   (b) Pour montrer la réciproque, on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

   i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$.

   **Corrigé** – *On remarque que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $|f_p - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ et $|f_q - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ implique $|f_p - f_q|(x) \leq \eta$. On a donc $\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \subset \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\} \cup \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}$, ce qui donne :*

   $$m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) + \{|f_q - f| \geq \frac{\eta}{2}\}.$$

   *Comme $f_n \to f$ en mesure, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. :*

   $$p \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) \leq \frac{\delta}{2},$$

   *on en déduit :*

   $$p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta.$$

ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^1$.

**Corrigé** – *Soit $p,q\in\mathbb{N}$ et $\eta>0$, on a :*

$$\|f_p-f_q\|_1=\int_{\{|f_p-f_q|\geq\eta\}}|f_p|dm+\int_{\{|f_p-f_q|\geq\eta\}}|f_q|dm+\eta m(E). \tag{4.54}$$

*Soit $\varepsilon>0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta>0$ t.q.*

$$(A\in T,\ m(A)\leq\delta \text{ et } n\in\mathbb{N})\Rightarrow\int_A|f_n|\leq\varepsilon. \tag{4.55}$$

*On commence à choisir $\eta>0$ t.q. $\eta m(E)\leq\varepsilon$. Puis, la question précédente donne l'existence de $n$ t.q. $m(\{|f_p-f_q|\geq\eta\})\leq\delta$ si $p,q\geq n$. On a donc, par (4.55) :*

$$\int_{\{|f_p-f_q|\geq\eta\}}|f_p|\leq\varepsilon \text{ et } \int_{\{|f_p-f_q|\geq\eta\}}|f_q|\leq\varepsilon \text{ si } p,q\geq n.$$

*Finalement, (4.54) donne :*

$$p,q\geq n\Rightarrow\|f_p-f_q\|_1\leq 3\varepsilon.$$

*La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^1$.*

iii. Montrer que $f\in\mathcal{L}^1$ et que $\|f_n-f\|_1\to0$ quand $n\to+\infty$.

**Corrigé** – *Comme $L^1$ est complet, il existe $g\in L^1$ t.q. $f_n\to g$ dans $L^1$, quand $n\to+\infty$. On peut supposer $g\in\mathcal{L}^1$ (en confondant $g$ avec l'un de ses représentants). La question (a) donne alors que $f_n\to g$ en mesure, quand $n\to+\infty$. Comme $f_n\to f$ en mesure, on a donc nécessairement $f=g$ p.p., ce qui donne bien $f\in\mathcal{L}^1$ et $\|f_n-f\|_1=\|f_n-g\|_1\to0$, quand $n\to+\infty$.*

2. On ne suppose plus que $m(E)<+\infty$. Montrer que "$f\in\mathcal{L}^1$ et $\|f_n-f\|_1\to0$ quand $n\to+\infty$ si et seulement si on a les propriétés suivantes :

p1. $f_n\to f$ en mesure, quand $n\to+\infty$,

p2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable,

p3. pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A\in T$ t.q. $m(A)<+\infty$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_{A^c}|f_n|dm\leq\varepsilon$.

**Corrigé** – ***Étape 1*** *On montre tout d'abord le sens direct.*

*Les propriétés p1 et p2 ont déjà été démontrées dans la question 1-(a) (car l'hypothèse $m(E)<+\infty$ n'avait pas été utilisée).*

*Pour démontrer la propriété p3, on utilise la proposition 4.50 du cours. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, Il existe $B_n\in T$ t.q. $m(B_n)<+\infty$ et*

$$\int_{B_n^c}|f_n|dm\leq\varepsilon. \tag{4.56}$$

*Il existe aussi $B\in T$ t.q. $m(B)<+\infty$ et*

$$\int_{B^c}|f|dm\leq\varepsilon. \tag{4.57}$$

*En remarquant que*

$$\int_{B^c}|f_n|dm\leq\int|f_n-f|dm+\int_{B^c}|f|dm,$$

*on obtient, en utilisant le fait que $\|f_n-f\|_1\to0$, quand $n\to+\infty$, et (4.57), l'existence de $n_0$ t.q.*

$$n\geq n_0\Rightarrow\int_{B^c}|f_n|dm\leq 2\varepsilon.$$

*En prenant* $A = B \cup (\bigcup_{p=0}^{n_0} B_p)$*, on obtient alors (avec (4.56))* $m(A) < +\infty$ *et :*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

***Étape 2*** *On montre maintenant la réciproque.*

*On reprend la même méthode que dans le cas* $m(E) < +\infty$.

*On remarque tout d'abord que pour tout* $\delta > 0$ *et* $\eta > 0$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *t.q. :* $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$*. La démonstration est la même que précédemment (l'hypothèse* $m(E) < +\infty$ *n'avait pas été utilisée).*

*On montre maintenant que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $L^1$*. Soit* $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in T$ *et* $\eta > 0$*, on a :*

$$\|f_p - f_q\|_1 \leq \int_{A^c} (|f_p| + |f_q|) dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} (|f_p| + |f_q|) dm + \eta m(A). \tag{4.58}$$

*Soit* $\varepsilon > 0$*. D'après l'équi-intégrabilité de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$(B \in T,\ m(B) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_B |f_n| \leq \varepsilon. \tag{4.59}$$

*D'après la propriété p3, il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) < +\infty$ *et*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{4.60}$$

*On commence à choisir* $\eta > 0$ *t.q.* $\eta m(A) \leq \varepsilon$*. Maintenant que* $\delta$ *et* $\eta$ *sont fixés, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ *si* $p, q \geq n$*. On a donc, par (4.59),* $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon$ *et* $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon$ *si* $p, q \geq n$*. Avec (4.58) et (4.60), on obtient alors :*

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 5\varepsilon.$$

*La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc de Cauchy dans* $L^1$.

*On conclut, comme dans le cas* $m(E) < +\infty$*, que* $f \in \mathcal{L}^1$ *et* $\|f_n - f\|_1 \to 0$*, quand* $n \to +\infty$ *(car l'hypothèse* $m(E) < +\infty$ *n'avait pas été utilisée pour cette partie).*

**Exercice 4.36 (Convergence en mesure dominée)** Soit $(E, T, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrales de E dans $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.
- Il existe $g$, fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}).$$

**Corrigé –** *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Comme* $|f_n| \leq g$ *p.p., on a*

$$|f| - g \leq |f - f_n| + |f_n| - g \leq |f - f_n| \text{ p.p..}$$

*A un ensemble de mesure près, on a donc* $\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\})$ *inclus dans* $\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}$ *et donc*

$$m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}). \tag{4.61}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que $f$ est intégrable.

**Corrigé** – *Comme $f_n \to f$ en mesure, on obtient, en passant à la limite dans (4.61) quand $n \to +\infty$, que $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$.*

*Comme $\{|f| - g > 0\} = \cup_{p \in \mathbb{N}^*} \{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}$ et $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$ pour tout $p$, on obtient (par σ-additivité de $m$ ou par convergence croissante de $m$) que $m(\{|f| - g > 0\}) = 0$ et donc que $|f| \leq g$ p.p..*

*Comme $g$ est intégrable, on en déduit bien que $f$ est intégrable (et $\int |f| dm \leq \int g dm$).*

3. On suppose, dans cette question, que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.
(a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f| dm \leq \eta m(\mathrm{E}) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm.$$

**Corrigé** – *Comme $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ p.p., on a*

$$\begin{aligned}\int |f_n - f| dm &= \int_{\{|f_n - f| \leq \eta\}} |f_n - f| dm + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} |f_n - f| dm \\ &\leq \eta m(\{|f_n - f| \leq \eta\}) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm \\ &\leq \eta m(\mathrm{E}) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm.\end{aligned}$$

(b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.
[On rappelle que si, $h$ est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |h| dm \leq \varepsilon.]$$

**Corrigé** – *Soit $\varepsilon > 0$. D'après le rappel, il existe $\delta > 0$ t.q.*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} 2g dm \leq \varepsilon. \tag{4.62}$$

*Pour majorer $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm$, on choisit d'abord $\eta > 0$ t.q. $\eta m(\mathrm{E}) \leq \varepsilon$. Puis, pour ce choix de $\eta$, la convergence en mesure de $f_n$ vers $f$ donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \eta\}) \leq \delta.$$

*En utilisant l'inégalité montrée à la question 3(a), on obtient alors, grâce à (4.62),*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm \leq 2\varepsilon.$$

*Ce qui montre bien que $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.*

4. On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.
[On rappelle que si, $h$ est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |h| dm \leq \varepsilon$.]

**Corrigé** – *On remarque d'abord que pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$, tout $\eta > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned}\int |f_n - f| dm &\leq \int_{\mathrm{C} \cap \{|f_n - f| \leq \eta\}} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{C}^c} |f_n - f| dm + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} |f_n - f| dm \\ &\leq \eta m(\mathrm{C}) + \int_{\mathrm{C}^c} 2g dm + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm. \end{aligned} \tag{4.63}$$

*Soit $\varepsilon > 0$. D'après le rappel, il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} 2g dm \le \varepsilon$. On choisit donc un tel ensemble $C$. On choisit maintenant $\eta > 0$ t.q. $\eta m(C) \le \varepsilon$ et on peut conclure comme à la question précédente, c'est-à-dire que la convergence en mesure de $f_n$ vers $f$ donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \eta\}) \le \delta,$$

*avec $\delta$ satisfaisant* (4.62). *En utilisant l'inégalité* (4.63), *on obtient alors*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| dm \le 3\varepsilon,$$

*ce qui montre bien que* $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

**Exercice 4.37 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$)** Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left( \int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.

(a) Soient $p_1$ et $p_2 \in [1, +\infty[$, et $p \in [p_1, p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que $I$ est un intervalle.

[On pourra introduire $A = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]

**Corrigé** – *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On remarque que $\alpha^p \le \alpha^{p_2}$ si $1 \le \alpha$ et $\alpha^p \le \alpha^{p_1}$ si $\alpha \le 1$. On en déduit que $|f|^p \le |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$ (en fait, on a $|f|^p \le |f|^{p_1}$ sur $A = \{|f| \le 1\}$ et $|f|^p \le |f|^{p_2}$ sur $A^c$) et donc que $f \in \mathcal{L}^p$ si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$.*

*On suppose que $I \ne \emptyset$. On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$. On a donc $1 \le a \le b \le \infty$ et $I \subset [a, b]$. On montre maintenant que $]a, b[ \subset I$ (ce qui donne que $I$ est bien un intervalle dont les bornes sont $a$ et $b$).*

*Soit $p \in ]a, b[$. La définition de $a$ et $b$ permet d'affirmer qu'il existe $p_1 \in I$ t.q. $p_1 < p$ et qu'il existe $p_2 \in I$ t.q. $p_2 > p$. On a donc $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$ et $p \in ]p_1, p_2[$, d'où l'on déduit que $p \in I$. on a donc bien monté que $]a, b[ \subset I$ et donc que $I$ est un intervalle.*

(b) On montre sur des exemples que les bornes de $I$ peuvent être ou ne pas être dans $I$. On prend pour cela : $(E, T, m) = ([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, \infty[), \lambda)$ ($\lambda$ est ici la restriction à $[2, \infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer $I$ dans les deux cas suivants :

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$.

**Corrigé** – *i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$. Soit $1 \le p < \infty$. Pour savoir si $f \in \mathcal{L}^p$ ou non, on utilise le théorème de convergence monotone et l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.*

*Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = |f|^p 1_{[2,n]}$. On a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ et $f_n \uparrow |f|^p$ ce qui donne, grâce au théorème de convergence monotone,*

$$\int f_n d\lambda \to \int |f|^p d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty.$$

*Les intégrales ci-dessus sont des intégrales sur $[2, +\infty[$, muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens. La comparaison entre l'intégrale des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue (voir les exercices 4.4 et 4.5) donne que*

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x^p} dx.$$

*On distingue maintenant les cas $p = 1$ et $p > 1$.*

- *Si $p > 1$, on a*

$$\int f_n d\lambda = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \to \frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}} < \infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

  *On a donc $f \in \mathcal{L}^p$.*

• *Si* $p = 1$, *on a*

$$\int f_n d\lambda = \ln(n) - \ln(2) \to \infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

*On a donc* $f \notin \mathcal{L}^1$.

*On a donc* $\mathrm{I} = ]1, \infty[$.

*ii.* $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$. *Pour* $1 < p < \infty$, *on a clairement* $f \in \mathcal{L}^p$ *car la fonction* $f$ *est positive et majorée par* $\frac{1}{\ln(2)^2} g$ *où* $g$ *est la fonction de l'exemple précédent, c'est-à-dire* $g(x) = \frac{1}{x}$. *Pour* $p = 1$, *on utilise la même méthode que pour l'exemple précédent :*

*Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n = |f| 1_{[2,n]}$, *de sorte que* $f_n \uparrow |f| = f$ *et donc*

$$\int f_n d\lambda \to \int |f| d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty.$$

*On a ici, quand* $n \to +\infty$,

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \ln(2)^{-1} - \ln(n)^{-1} \to \ln(2)^{-1} < \infty.$$

*On en déduit que* $f \in \mathcal{L}^1$, *donc* $\mathrm{I} = [1, \infty[$.

(c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ et $p \in \bar{\mathrm{I}}$, ($\bar{\mathrm{I}}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$.

[On pourra encore utiliser l'ensemble A.]

**Corrigé** – *On utilise ici* $\mathrm{A} = \{|f| \le 1\} \in \mathrm{T}$.

*(a) On suppose d'abord que* $p_n \uparrow p$ *quand* $n \to +\infty$. *On pose* $g_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}}$ *et* $h_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}^c}$, *de sorte que* $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ *et*

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

*On remarque alors que* $h_n \uparrow h = |f|^p 1_{\mathrm{A}^c}$, *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *le théorème de convergence monotone donne*

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.64}$$

*Noter que ceci est vrai même si* $p \notin \mathrm{I}$ *(dans ce cas, on a, en fait,* $\int h dm = \infty$*).*

*On remarque maintenant que* $g_n \to g = |f|^p 1_{\mathrm{A}}$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *et que* $0 \le g_n \le |f|^{p_0}$ *car la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est ici décroissante. Comme* $p_0 \in \mathrm{I}$, *on a* $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ *et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.29). Il donne*

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.65}$$

*Avec (4.64) et (4.65) on obtient, quand* $n \to +\infty$,

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm,$$

*(b) On suppose maintenant que* $p_n \downarrow p$ *quand* $n \to +\infty$ *et on reprend la même méthode que ci-dessus. On pose* $g_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}}$ *et* $h_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}^c}$, *de sorte que* $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ *et*

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

*les rôles de $g_n$ et $h_n$ sont inversés par rapport au cas précédent : On remarque que $g_n \uparrow g = |f|^p 1_{\mathrm{A}}$, quand $n \to +\infty$. Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, le théorème de convergence monotone donne*

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.66}$$

*Ceci est vrai même si $p \notin \mathrm{I}$ (dans ce cas, on a, en fait, $\int g dm = \infty$).*

*On remarque que $h_n \to h = |f|^p 1_{\mathrm{A}^c}$ p.p., quand $n \to +\infty$, et que $0 \le h_n \le |f|^{p_0}$ car la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici décroissante. Comme $p_0 \in \mathrm{I}$, on a $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.29). Il donne*

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.67}$$

*Avec (4.66) et (4.67) on obtient, quand $n \to +\infty$,*

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm.$$

*La conséquence de cette question est que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue de $\bar{\mathrm{I}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\bar{\mathrm{I}}$ est l'adhérence de $\mathrm{I}$ dans $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on va introduire le cas $p = \infty$ et montrer la continuité de $p \mapsto \|f\|_p$ sur l'adhérence de $\mathrm{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < \mathrm{C}$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{\mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |f| < \mathrm{C} \text{ p.p.}\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

   (a) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ p.p. ?

   **Corrigé** – *Si $\|f\|_\infty = +\infty$, on a, bien sûr, $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. On suppose donc maintenant que $\|f\|_\infty < +\infty$. Par définition d'une borne inférieure, il existe $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |f| < \mathrm{C} \text{ p.p.}\}$ t.q. $\mathrm{C}_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $|f| < \mathrm{C}_n$ sur $\mathrm{A}_n^c$.*

   *On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. On a donc $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{A}) = 0$ et $|f(x)| < \mathrm{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathrm{A}^c$. Comme $\mathrm{C}_n \downarrow \|f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$, on en déduit $|f| \le \|f\|_\infty$ sur $\mathrm{A}^c$ et donc que $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p..*

   *En prenant $(\mathrm{E},\mathrm{T},m) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\|f\|_\infty = 1$ et l'assertion $f < \|f\|_\infty$ p.p. est fausse.*

   *Noter aussi que $\|f\|_\infty = \inf\{\mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |f| \le \mathrm{C} \text{ p.p.}\}$.*

   On pose $\mathrm{J} = \{p \in [1,+\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

   (b) Remarquer que $\mathrm{J} = \mathrm{I}$ ou $\mathrm{J} = \mathrm{I} \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in \mathrm{I}$ et $+\infty \in \mathrm{J}$, alors $[p,+\infty] \subset \mathrm{J}$. En déduire que $\mathrm{J}$ est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   **Corrigé** – *Soit $p \in \mathrm{I}$ et on suppose que $\infty \in \mathrm{J}$. Soit $q \in ]p,\infty[$. Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p., On a $|f|^q \le \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$ p.p.. On en déduit que $f \in \mathcal{L}^q$, c'est-à-dire $q \in \mathrm{I}$. On a ainsi montré que $]p,\infty[\subset \mathrm{I}$ et donc $[p,\infty] \subset \mathrm{J}$.*

   *On raisonne maintenant comme dans la question 1. On pose $a = \inf \mathrm{J}$ et $b = \sup \mathrm{J}$, de sorte que $\mathrm{J} \subset [a,b]$. Puis, soit $p$ t.q. $a < p < b$. On a nécessairement $a < \infty$ et il existe $p_1 \in \mathrm{I}$ t.q. $p_1 < p$. On a $b \le \infty$ et il existe $p_2 \in \mathrm{J}$ t.q. $p < p_2$. Si $p_2 \in \mathrm{I}$, on utilise la question 1 pour montrer que $p \in \mathrm{I}$ et si $p_2 = \infty$ la première partie de cette question donne que $p \in \mathrm{I}$. On a bien ainsi montré que $]a,b[\subset \mathrm{J}$. $\mathrm{J}$ est donc un intervalle dont les bornes sont $a$ et $b$.*

   *Noter aussi que $\inf \mathrm{I} = \inf \mathrm{J}$ et $\sup \mathrm{I} = \sup \mathrm{J}$.*

   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).

      i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c$. [On pourra remarquer que $\int |f|^p dm \ge c^p m(\{x, |f(x)| \ge c\})$.]

**Corrigé** – *Comme $|f|^p \ge c^p 1_{\{|f|\ge c\}}$, la monotonie de l'intégrale donne bien*

$$\int |f|^p dm \ge c^p m(\{|f| \ge c\}),$$

*et donc, comme $\int |f|^p dm \ne 0$,*

$$\|f\|_p \ge cm(\{|f| \ge c\})^{\frac{1}{p}}. \tag{4.68}$$

*Comme $c < \|f\|_\infty$, on a $m(\{|f| \ge c\}) > 0$, d'où l'on déduit que $m(\{|f| \ge c\})^{\frac{1}{p}} \to 1$ quand $p \to \infty$ ($p \in [1,\infty[$). En passant à la limite inférieure quand $n \to +\infty$ dans (4.68) pour $p = p_n$, on obtient alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c.$$

*Comme $c$ est arbitrairement proche de $\|f\|_\infty$, on en déduit :*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge \|f\|_\infty. \tag{4.69}$$

ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite $g_n = \left(\dfrac{|f|}{\|f\|_\infty}\right)^{p_n}$ et noter que $g_n \le g_0$ p.p..* ]

**Corrigé** – *Comme $\frac{f}{\|f\|_\infty} \le 1$ p.p. et que $p_n \ge p_0$ (car la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), on a $g_n \le g_0$ p.p. et donc $\int g_n dm \le \int g_0 dm$, d'où l'on déduit (en notant que toutes les normes de $f$ sont non nulles) :*

$$\|f_n\|_{p_n} \le \|f\|_\infty (\int g_0 dm)^{\frac{1}{p_n}}.$$

*En remarquant que $\int g_0 dm \ne 0$, on obtient bien, en passant à la limite supérieure dans cette inégalité,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty. \tag{4.70}$$

iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

**Corrigé** – *On distingue deux cas :*

*Cas 1* *On suppose ici que $\|f\|_\infty = \infty$. (4.69) donne alors que $\|f\|_{p_n} \to \infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$.*

*Cas 2* *On suppose ici que $\|f\|_\infty < \infty$, de sorte que $0 < \|f\|_\infty < \infty$. Les assertions (4.69) et (4.70) donnent alors*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty \le \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n}$$

*et donc $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ quand $n \to +\infty$.*

3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\bar{\mathrm{J}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\bar{\mathrm{J}}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\bar{\mathrm{J}} = [a,b]$ si $\mathrm{J} = |a,b|$, avec $1 \le a \le b \le +\infty$, et $|$ désigne $]$ ou $[$).

**Corrigé** – *Si $f = 0$ p.p., on a $\mathrm{J} = \bar{\mathrm{J}} = [1,\infty]$ et $\|f\|_p = 0$ pour tout $p \in \mathrm{J}$. Donc, $p \to \|f\|_p$ est continue de $\bar{\mathrm{J}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

*On suppose maintenant que $f$ n'est pas nulle presque partout. On a donc $\|f\|_p > 0$ pour tout $p \in [1,\infty]$.*

*On pose $\bar{\mathrm{J}} = [a,b]$ (si $\mathrm{J} \ne \emptyset$). On distingue 3 cas :*

- *Cas 1 – Soit $p \in ]a,b[$, de sorte que $p \in \mathrm{I}$.*

  *(a) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \uparrow p$. La question 1-c donne que $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to +\infty$ (pour s'en convaincre, on peut remarquer que $\ln(\|f\|_{p_n}) = \frac{1}{p_n}\ln(\|f\|_{p_n}^{p_n}) \to \frac{1}{p}\ln(\|f\|_p^p) = \ln(\|f\|_p)$). Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point $p$.*

*(b) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \downarrow p$. La question 1-c donne aussi $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit, comme précédemment, que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point $p$.*

- *Cas 2 – On prend ici $p = a$ et on suppose $a \neq \infty$ (sinon $a = b$ et ce cas est étudié au Cas 3). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \downarrow a$.*

*(a) On suppose d'abord que $a \in \mathrm{I}$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_a^a$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_a$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point $a$.*

*(b) On suppose maintenant que $a \notin \mathrm{I}$, de sorte que $\|f\|_a = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point $a$.*

- *Cas 3 – On prend ici $p = b$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \uparrow a$.*

*(a) On suppose d'abord que $b \in \mathrm{I}$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_b^b$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_b$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point $b$.*

*(b) On suppose maintenant que $b \notin \mathrm{I}$.*

*Si $b \neq \infty$, on a donc $\|f\|_b = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point $b$.*

*Si $b = \infty$, la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point $b$ a été démontré à la question 2-c-iii.*

**Exercice 4.38 (Exemple de continuité et dérivabilité sous le signe $\int$)**
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t,x) = \mathrm{ch}(t/(1+x)) - 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t,.)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x)dx$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F′.

**Exercice 4.39 (Contre-exemple à la continuité sous le signe $\int$)**
Soit $f$ de $]-1,1[\times[0,1]$ dans $\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t,x) = 0$ si $t \in ]-1,0]$, puis, pour $t \in ]0,1[$, par

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{4}{t^2}x \text{ si } x \in [0, \dfrac{t}{2}], \\ \dfrac{4}{t^2}(t-x) \text{ si } x \in ]\dfrac{t}{2}, t], \\ 0 \text{ si } x \in ]t,1]. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f(t,\cdot)$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $t \in ]-1,1[$.

   Pour $t \in ]-1,1[$, on pose $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_{]0,1[} f(t,\cdot)d\lambda = \int_0^1 f(t,x)dx$.
2. Montrer que $f(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in [0,1]$.
3. Montrer que $\mathrm{F}(t) \not\to \mathrm{F}(0)$ lorsque $t \to 0$, $t > 0$. Pourquoi ne peut on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$ ?

**Exercice 4.40 (Continuité d'une application de $\mathrm{L}^1$ dans $\mathrm{L}^1$)** Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini et soit $g$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^* \,;\, |g(s)| \leq \mathrm{C}|s| + \mathrm{C},\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.71}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

**Corrigé** – *$u$ est mesurable de* $\mathrm{E}$ *(muni de la tribu* $\mathrm{T}$*) dans* $\mathbb{R}$ *(muni de la tribu* $\mathcal{B}(\mathrm{R})$*) et $g$ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, muni de la tribu* $\mathcal{B}(\mathrm{R})$*). On en déduit que $g \circ u$ est mesurable (de* $\mathrm{E}$ *dans* $\mathbb{R}$*).*

*Puis, comme* $|g \circ u(x)| = |g(u(x))| \leq \mathrm{C}|u(x)| + \mathrm{C}$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, on a*

$$\int |g \circ u| dm \leq \mathrm{C}\|u\|_1 + \mathrm{C}m(\mathrm{E}).$$

*Donc,* $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*.*

On pose $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Pour $u \in \mathrm{L}^1$, on pose $\mathrm{G}(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in \mathrm{L}^1$, avec $v \in u$.

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est-à-dire que $\mathrm{G}(u)$ ne dépend pas du choix de $v$ dans $u$.

**Corrigé** – *Soient $v, w \in u$. Il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{A}) = 0$ *et $v = w$ sur* $\mathrm{A}^c$*. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur* $\mathrm{A}^c$ *et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que* $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m); h = g \circ w \text{ p.p.}\}$*.*

$\mathrm{G}(u)$ *ne dépend donc pas du choix de $v$ dans $u$.*

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ t.q. $|u_n| \leq \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ dans $\mathrm{L}^1$.

**Corrigé** – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on choisit un représentant de $u_n$, encore notée $u_n$. On choisit aussi des représentants de $u$ et* $\mathrm{F}$*, notés toujours $u$ et* $\mathrm{F}$*. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to +\infty$ et que $g$ est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc* $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ *p.p..*

*On remarque aussi que* $|g \circ u_n| \leq \mathrm{C}|u_n| + \mathrm{C} \leq \mathrm{CF} + \mathrm{C}$ *p.p. et donc* $|\mathrm{G}(u_n)| \leq \mathrm{CF} + \mathrm{C}$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

*Comme* $\mathrm{CF} + \mathrm{C} \in \mathrm{L}^1$*, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne que* $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ *dans* $\mathrm{L}^1$ *quand $n \to +\infty$.*

4. Montrer que G est continue de $\mathrm{L}^1$ dans $\mathrm{L}^1$.
[On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé réciproque partielle de la convergence dominée.]

**Corrigé** – *On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de* $\mathrm{L}^1$ *dans* $\mathrm{L}^1$*. Il existe donc* $u \in \mathrm{L}^1$ *et* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *t.q. $u_n \to u$ dans* $\mathrm{L}^1$ *et* $\mathrm{G}(u_n) \not\to \mathrm{G}(u)$ *dans* $\mathrm{L}^1$ *quand $n \to +\infty$.*

*Comme* $\mathrm{G}(u_n) \not\to \mathrm{G}(u)$*, il existe $\varepsilon > 0$ et* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et :*

$$\|\mathrm{G}(u_{\varphi(n)}) - \mathrm{G}(u)\|_1 \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.72}$$

*(La suite* $(\mathrm{G}(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ *est une sous-suite de la suite* $(\mathrm{G}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$*.)*

*Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans* $\mathrm{L}^1$*, on peut appliquer le théorème de réciproque partielle de la convergence dominée (théorème 4.49). Il donne l'existence de* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *et de* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$, $u_{\varphi \circ \psi(n)} \to u$ p.p. et* $|u_{\varphi \circ \psi(n)}| \leq \mathrm{F}$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. (La suite* $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *est une sous-suite de la suite* $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$*).*

*On peut maintenant appliquer la question 3 à la suite* $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$*. Elle donne que* $\mathrm{G}(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \to \mathrm{G}(u)$ *dans* $\mathrm{L}^1$ *quand $n \to +\infty$, ce qui est en contradiction avec (4.72).*

**Exercice 4.41 (Paris groupés)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace mesuré tel que $p(\Omega) = 1$. On se donne une suite $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ déléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mathrm{A}_{n+1} \subset (\cup_{p=1}^n \mathrm{A}_p)^c$ et $p(\mathrm{A}_n) = 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En prenant $(\Omega, \mathcal{A}, p) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, donner un exemple d'une suite $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les hypothèses demandées.

**Corrigé** – *Il suffit de prendre* $\mathrm{A}_n = ]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$.

On se donne aussi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ avec $\alpha_1 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Avec ce choix de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{G}_i$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \mathrm{H}_n dp = n.$$

**Corrigé** – *On construit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence.*
*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}$, on a*

$$\int \mathrm{G}_n dp = (-\alpha_n - 1)p(\mathrm{A}_n) + \alpha_{n+1}p(\mathrm{A}_{n+1}) = \frac{-\alpha_n - 1}{2^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}.$$

*On choisit donc, pour $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} = 2(\alpha_n + 1) + 2^{n+1}$. On a bien $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
*On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \mathrm{H}_n dp = \sum_{i=1}^n \int \mathrm{G}_i dp = n$.*

3. Pour $x \in \Omega$, on pose $\mathrm{H}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{G}_n(x)$. Montrer que $\mathrm{H}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \Omega$ et que $\mathrm{H} = -1$ p.p..

**Corrigé** – *Les ensembles $\mathrm{A}_n$ sont disjoints deux à deux, on a donc $p(\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/2^n = 1$.*
*On en déduit que $p((\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{A}_n)^c) = 0$. Pour montrer que $\mathrm{H} = -1$ p.p., il suffit donc de montrer que $\mathrm{H}(x) = -1$ pour tout $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{A}_n$.*
*Soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{A}_n$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \mathrm{A}_n$.*
*Si $n = 1$, on a alors $\mathrm{G}_1(x) = -1$ et $\mathrm{G}_n(x) = 0$ pour $n > 1$. Donc $\mathrm{H}(x) = -1$.*
*Si $n > 1$, on a alors $\mathrm{G}_n(x) = -\alpha_n - 1$, $\mathrm{G}_{n-1} = \alpha_n$ et $\mathrm{G}_m(x) = 0$ si $m \neq n$ et $m \neq n-1$. On en déduit bien que $\mathrm{H}(x) = -1$.*
*On a bien montré que $\mathrm{H} = -1$ p.p..*

4. On choisit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à la question 2 ?

**Corrigé** – *On a $\mathrm{H}_n \to \mathrm{H}$ p.p. mais $\int \mathrm{H}_n dp \not\to \int \mathrm{H} dp$. Ceci montre que la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème de convergence dominée (c'est, bien sûr, l'hypothèse de domination qui est manquante).*

N.B. Cet exercice a une interprétation probabiliste un peu inattendue. Il permet de montrer que le fait de faire une infinité de paris favorables peut être défavorable.

### 4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires

**Exercice 4.42 (Espérance et variance de lois usuelles)** Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle, de loi de probabilité $p_{\mathrm{X}}$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :

1. $p_{\mathrm{X}}$ est la loi uniforme sur $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) ;
2. $p_{\mathrm{X}}$ est la loi exponentielle ;
3. $p_{\mathrm{X}}$ est la loi de Gauss.