LICENCE 3 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE. MATHEMATIQUES GENERALES. L3MiMG.

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
6	**2L3MAT**	**SMI5U1T**	**4**

Nom de l'UE : Intégration et transformée de Fourier (UE 5-3)

-- Contenu de l'envoi : Chapitres 7 et 8, corrigé du devoir 1

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 6, sections 6.3.1 et 6.3.2 (Dualité dans Lp)
Exercices proposés (avec corrigés) : 6.11

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 7, sections 7.1, 7.2 (mesure produit) en admettant les démonstrations et 7.3 (théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini). Exercices proposés (avec corrigés) : 7.6, 7.9, 7.10

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 7, sections 7.4, 7.5
(mesure de Lebesgue, convolution)
Exercices proposés (avec corrigés) : 7.16, 7.17, 7.19, 7.20
L'exercice 7.12 fait partie du deuxième devoir

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 7, section 7.6
(changement de variable)
Exercices proposés (avec corrigés) : 7.25, 7.26 (difficile)

Le deuxième devoir est à rendre en mars

-Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

T. Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/int
et me poser des questions par email.

Chapitre 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 2, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume...).

La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A})\lambda(\mathrm{B}),\ \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ ?$$

La tribu T_2, sur laquelle on veut définir λ_2, doit donc contenir $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \times \mathrm{B}, \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ n'est pas une tribu. En effet, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable). On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On cherche alors une mesure $\lambda_2 : \mathrm{T}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\lambda_2(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A})\lambda(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 (voir le théorème 7.3). On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (voir la proposition 7.2).

Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int\Big(\int f(x,y)dy\Big)dx = \int\Big(\int f(x,y)dx\Big)dy\ ?$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile, par exemple, pour démontrer des théorèmes de densité. Mais la convolution est une notion utile pour beaucoup d'autres raisons (elle est utile, par exemple, en théorie du signal).

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est σ-fini (on dit aussi que m est σ-finie) s'il existe une famille $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et $m(\mathrm{A}_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ-fini (prendre, par exemple, $A_n = [-n, n]$). Il existe par contre des mesures non σ-finies. L'exemple le plus simple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ consiste à prendre $m(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Un exemple plus intéressant (intervenant pour certains problèmes) consiste à se donner un borélien non vide B de $\mathbb{R}$ (B peut être, par exemple, réduit à un point) et à définir m_B par $m_B(A) = +\infty$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B \neq \emptyset$ et $m_B(A) = 0$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.1 (Tribu produit) *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *des espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$. *On appelle tribu produit la tribu sur* E *engendrée par* $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$. *Cette tribu produit est notée* $T_1 \otimes T_2$.

Un exemple fondamental est $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 7.2 (Tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout* $N \geq 2$, *on a* $\mathcal{B}(R^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(R^N)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est faite pour N = 2 dans l'exercice 2.6). Elle s'adapte facilement pour traiter aussi le cas N > 2 (exercice 7.1). ■

Théorème 7.3 (Mesure produit) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *deux espaces mesurés σ-finis,* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$. *Alors, il existe une et une seule mesure m sur* T *vérifiant :*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2),\ \forall (A_1, A_2) \in T_1 \times T_2; m_i(A_i) < \infty,\ i = 1, 2. \tag{7.1}$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \otimes m_2$. *De plus, m est σ-finie.*

DÉMONSTRATION –

Existence de m. On va construire une mesure m sur T vérifiant (7.1).

Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \int f_A dm_1$. Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (7.1) et que m est σ-finie.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2 ; (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1, A)}$.

Soit $x_1 \in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathcal{P}(E) ; S(x_1, A) \in T_2\}$.

On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2 \in T_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si $x_1 \notin A_1$.

On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :

- $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,
- Θ est stable par passage au complémentaire. En effet : $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.
- Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que $S(x_1, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Theta$.

L'ensemble Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, et contient donc $T_1 \otimes T_2 = T$, tribu engendrée par $T_1 \times T_2$. . On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$.

Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application f_A de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant, pour $x_1 \in E_1$,

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1,A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{7.2}$$

Etape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente.

On note $\Sigma = \{A \in T ; f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $\Sigma \supset T$ et donc que $\Sigma = T$.

On suppose d'abord que m_2 est finie.

Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1} \in \mathcal{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On note maintenant $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ ($\mathcal{A}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, voir l'exercice 7.2). Si $A \in \mathcal{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ tel que $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \sum_{p=1}^n m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^n f_{A^{(p)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \subset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{7.3}$$

et

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \supset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma. \tag{7.4}$$

Pour démontrer (7.3), on considère une suite $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ telle que $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$; on a $(S(x_1, A^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$S\left(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}).$$

On en déduit, par continuité croissante de m_2, que

$$m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$$

et donc que $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$, ce qui prouve que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$.

La démonstration de (7.4) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin du fait que m_2 est finie.

On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. On peut en déduire (cela fait l'objet de l'exercice 2.13) que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.

Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie, l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par 7.2 avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \to +\infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On a donc montré que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A dm_1, \text{ pour tout } A \in T. \tag{7.5}$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m, définie par (7.5), est une mesure sur T et que m vérifie (7.1) et est σ-finie.

On montre d'abord que m est bien une mesure sur T :

- $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(S(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
- (σ-additivité de m) Soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Pour $x_1 \in E_1$, on a :
$$S(x_1, A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \text{ et } S(x_1, A^{(n)}) \cap S(x_1, A^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$
La σ-additivité de m_2 donne alors $m_2(S(x_1, A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$, c'est-à-dire
$$f_A(x_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}(x_1).$$
Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors :
$$m(A) = \int f_A dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_{A^{(n)}} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}),$$
ce qui donne la σ-additivité de m.

On montre maintenant que m vérifie (7.1). Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ tels que $m_1(A_1) < \infty$ et $m(A_2) < \infty$. On pose $A = A_1 \times A_2$. On a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1}$ et donc $m(A) = \int f_A dm_1 = m_2(A_2) m_1(A_1)$.

Il reste à vérifier que m est σ-finie. Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ tels que $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $C_{n,m} = B_1^{(n)} \times B_2^{(m)}$, de sorte que $E = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} C_{n,m}$ et $m(C_{n,m}) = m_1(B_1^{(n)}) \times m_2(B_2^{(m)}) < \infty$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que m est σ-finie.

Unicité de m.

La partie existence de la démonstration donne une mesure m sur T vérifiant (7.1). La partie unicité du théorème peut se montrer avec la proposition 2.31 ; nous développons cette méthode ci-après, ou avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13) comme cela est expliqué dans la remarque 7.4.

Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (7.1). Pour montrer que $m = \mu$, on va appliquer la proposition 2.31. On pose :

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2, m_1(A_1) < \infty, m_2(A_2) < \infty\}.$$

Comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il est facile de montrer que tout élément de $T_1 \times T_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}$ engendre T. Il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et, par (7.1), on a $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Puis, comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il existe deux suites $(E_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(E_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ d'éléments de T_1 et T_2, disjoints deux à deux et t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1,n}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{2,n}$ et $m_i(E_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $F_{n,m} = E_{1,n} \times E_{2,m}$. La famille $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $E = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n}) m_2(E_{1,m}) < \infty$. On peut alors utiliser la Proposition 2.31. Elle donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème. ■

Remarque 7.4 Comme cela a été dit, un autre moyen de montrer la partie unicité du théorème précédent est d'utiliser le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Supposons tout d'abord que m_1 et m_2 sont finies. On a alors (par (7.1)) :

$$m(E) = \mu(E) = m_1(E_1) m_2(E_2) < \infty.$$

La condition (7.1) donne également que $m = \mu$ sur $T_1 \times T_2$. On a alors aussi $m = \mu$ sur l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, notée $\mathcal{A}$ (cette algèbre a été définie dans la partie existence de la démonstration). En effet, si $A \in \mathcal{A}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors, par additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A^{(n)}) = \mu(A)$.

On pose maintenant $\Sigma = \{A \in T\,;\, m(A) = \mu(A)\}$. On vient de montrer que $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Il est d'autre part facile de voir que Σ est une classe monotone. En effet, les propriétés de continuité croissante et de continuité décroissante appliquées à m et μ permettent facilement de vérifier (7.3) et (7.4) (on utilise ici, pour montrer (7.4), que m et μ sont des mesures finies). Comme dans la partie existence de la démonstration, l'exercice 2.13 donne alors que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$, ce qui donne $\Sigma = T$ et donc $m = \mu$.

Dans le cas où m_1 et m_2 ne sont pas finies, mais σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. On peut également supposer que $B_1^{(n)} \subset B_1^{(n+1)}$ et $B_2^{(n)} \subset B_2^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il suffit, par exemple, de remplacer $B_i^{(n)}$ par $\bigcup_{p=0}^{n} B_i^{(p)}$). Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où m_1 et m_2 sont finies, on peut montrer que $m = \mu$ sur $\{A \in T\,;\, A \subset B_1^{(n)} \times B_2^{(n)}\}$. On conclut alors, en utilisant la propriété de continuité croissante, que $m = \mu$ sur T.

Remarque 7.5 Dans le théorème précédente (théorème 7.3), on peut aussi remarquer que :

1. $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \infty$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) \neq 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) \neq 0$),
2. $m(A_1 \times A_2) = 0$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) = 0$).

En effet, on suppose par exemple que $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par continuité croissante de m, $m(A_1 \times A_2) = \lim_{n\to+\infty} m(A_1 \times (A_2 \cap F_n)) = \lim_{n\to+\infty} m_1(A_1)m_2(A_2 \cap F_n) = 0$ (on a d'ailleurs aussi $m_2(A_2 \cap F_n) \uparrow \infty$, ce qui permet de conclure si $0 < m_1(A_1) < \infty$ que $m(A_1 \times A_2) = \infty$). Les autres cas se traitent de manière analogue.

Définition 7.6 (Espace produit)
L'espace (E, T, m)*, construit dans le théorème 7.3, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2).

Un exemple fondamental d'espace produit est l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour $N \geq 2$ que nous verrons dans la section 7.4.

7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Théorème 7.7 (Fubini-Tonelli) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés* σ*-finis. On note* (E, T, m) *l'espace produit (donc,* $T = T_1 \otimes T_2$ *et* $m = m_1 \otimes m_2$*). Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable positive (i.e.* T*-mesurable positive). Alors :*

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ *pour tout* $x_1 \in E_1$*,*

on pose

$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)\,dm_2 = \int f(x_1, x_2)\,dm_2(x_2) \text{ pour tout } x_1 \in E_1,$$

de sorte que $\varphi_f : \mathrm{E}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

2. $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$,
3. $\displaystyle\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1)$,
4. *les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de* m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. Soit $f = 1_\mathrm{A}$, $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. La partie existence de m de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $\int f dm = m(\mathrm{A}) = \int \varphi_f dm_1$.

Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f(x_1, \cdot) = 1_\mathrm{A}(x_1, \cdot) = 1_{\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A})}$, avec

$$\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}) = \{x_2 \in \mathrm{E}_2 \text{ t.q. } (x_1, x_2) \in \mathrm{A}\} \subset \mathrm{E}_2$$

(comme dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 1 de la démonstration (de la partie existence) du théorème 7.3 donne que $\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}) \in \mathrm{T}_2$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, et donc $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Ceci donne le premier item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2 = m_2(\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}))$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$. (Cette fonction φ_f est notée f_A dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 2 de la démonstration du théorème 7.3 donne que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$. Ceci donne le deuxième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

On a alors posé, dans la démonstration du théorème 7.3, $m(\mathrm{A}) = \int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m est une mesure sur T vérifiant (7.1) (et la seule mesure sur T vérifiant (7.1), d'après la partie unicité de la démonstration du théorème 7.3). Ceci donne le troisième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème 7.7. On obtient ainsi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$. On pose alors $\psi_f(x_2) = \int f(\cdot, x_2) dm_1$. On obtient que $\psi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Enfin, on pose $\tilde{m}(\mathrm{A}) = \int \psi_f dm_2$ et on obtient que $\tilde{m}$ est une mesure sur T vérifiant (7.1). La partie unicité de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $m = \tilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

Etape 2. On prend maintenant $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$.
Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f(x_1, \cdot) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ car l'étape 1 donne $1_{\mathrm{A}_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ pour tout i. Ce qui donne le premier item de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$. On a $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{\mathrm{A}_i}}$ et que $\varphi_{1_{\mathrm{A}_i}} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1), ce qui donne le deuxième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{\mathrm{A}_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int f dm &= \sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \varphi_{1_{\mathrm{A}_i}} dm_1 = \int (\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{\mathrm{A}_i}}) dm_1 \\ &= \int \Big(\sum_{i=1}^n a_i \int 1_{\mathrm{A}_i}(x_1, \cdot) dm_2 \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, \cdot) dm_2 \Big) dm_1(x_1) \\ &= \int \varphi_f dm_1.\end{aligned}$$

Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2.

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

On a donc, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f_n(x_1,\cdot) \uparrow f(x_1,\cdot)$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le premier item).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que

$$\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1,\cdot) dm_2 \uparrow \int f(x_1,\cdot) dm_2 = \varphi_f(x_1)$$

pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ (ce qui donne le deuxième item).

On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m, ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$, ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2. ■

Corollaire 7.8 *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$ *des espaces mesurés σ-finis. On note* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *l'espace produit. Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable. Alors :*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m) \Leftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_2 \Big) dm_1 < +\infty \Leftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_1 \Big) dm_2 < +\infty. \tag{7.6}$$

DÉMONSTRATION – Le corollaire découle immédiatement du théorème 7.7 appliqué à la fonction $|f|$ qui appartient à $\mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. Dans (7.6), la notation $(\int |f| dm_2) dm_1$ signifie :

$$\Big(\int |f(x_1,x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1).$$

La notation est similaire en inversant les rôles de m_1 et m_2. ■

Voici une conséquence immédiate du théorème 7.7 pour la mesurabilité :

Proposition 7.9 *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ *deux espaces mesurables. On pose* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ *(c'est-à-dire* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, T*-mesurable). Alors :*

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$, *pour tout* $x_1 \in \mathrm{E}_1$,

2. $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$, *pour tout* $x_2 \in \mathrm{E}_2$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est facile, il suffit de remarquer que $f = f^+ - f^-$ et que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. Le premier item de la conclusion du théorème 7.7 donne alors, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f^+(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ et $f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Comme $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot)$, on en déduit que $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. En changeant les rôles de $(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$, on montre aussi que $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$, pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$. ■

Remarque 7.10 La réciproque de la proposition précédente est fausse. Soient $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ deux espaces mesurables, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$,

2. $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$, pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$.

Alors, f n'est pas forcément T-mesurable. Un exemple est donné dans l'exercice 7.4. Un cas particulier intéressant pour laquelle cette réciproque est vraie est donné par la proposition 7.11.

Proposition 7.11 *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ *deux espaces mesurables. On pose* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. *Soient* $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ *et* $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$. *On définit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *par* $f(x_1,x_2) = \mathrm{F}_1(x_1)\mathrm{F}_2(x_2)$ *pour tout* $(x_1,x_2) \in \mathrm{E}$. *Alors* f *est* T*-mesurable (c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$*).*

DÉMONSTRATION – On procède en trois étapes.

Etape 1. On prend d'abord $\mathrm{F}_1 = 1_{\mathrm{A}_1}$ et $\mathrm{F}_2 = 1_{\mathrm{A}_2}$ avec $\mathrm{A}_1 \in \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_2$. On a alors $f = 1_{\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_2} \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ car $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2 \subset \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}$.

Etape 2. On prend maintenant $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{E}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ et $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{E}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$.

Il existe alors $a_1^{(1)},\ldots,a_n^{(1)} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_1^{(1)},\ldots,\mathrm{A}_n^{(1)} \in \mathrm{T}_1$, $a_1^{(2)},\ldots,a_m^{(2)} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A}_1^{(2)},\ldots,\mathrm{A}_m^{(2)} \in \mathrm{T}_2$ t.q. :

$$\mathrm{F}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\mathrm{A}_i^{(1)} \text{ et } \mathrm{A}_i^{(1)} \cap \mathrm{A}_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } i \neq k,$$

$$\mathrm{F}_2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)}\mathrm{A}_j^{(2)} \text{ et } \mathrm{A}_j^{(2)} \cap \mathrm{A}_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

On a alors $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i^{(1)}a_j^{(2)}1_{\mathrm{A}_i^{(1)}\times\mathrm{A}_j^{(2)}} \in \mathcal{E}(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$.

Etape 3. On prend enfin $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ et $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$. Il existe $(\mathrm{F}_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{F}_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ t.q. $\mathrm{F}_n^{(1)}(x_1) \to \mathrm{F}_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$ et $\mathrm{F}_n^{(2)}(x_2) \to \mathrm{F}_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$. On en déduit que $f_n(x_1,x_2) = \mathrm{F}_n^{(1)}(x_1)\mathrm{F}_n^{(2)}(x_2) \to f(x_1,x_2)$ pour tout $(x_1,x_2) \in \mathrm{E}$ et donc que $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ car $f_n \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étape 2). ■

Théorème 7.12 (Fubini) *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$ *des espaces mesurés σ-finis. On note* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *l'espace produit. Soit* f *une fonction* T*-mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$*) et intégrable pour la mesure m, c'est-à-dire* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$*. Alors :*

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$ *pour presque tout* $x_1 \in \mathrm{E}_1$,

on pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1,\cdot)dm_2$ *pour* $x_1 \in \mathrm{E}_1$ *t.q.* $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$*. La fonction* φ_f *est donc définie p.p. sur* E_1 *(et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*).*

2. $\varphi_f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *(au sens : il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.).*

3. $\displaystyle\int f\,dm = \int \varphi_f\,dm_1 = \int\Big(\int f(x_1,x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1)$,

4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int\Big(\int f(x_1,x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) = \int\Big(\int f(x_1,x_2)dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – Comme $f \in \mathcal{M}(E, T)$, on a $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à f^+ et f^-. Il donne :

1. $f^+(x_1, \cdot), f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $\varphi_{f^+}, \varphi_{f^-} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ avec $\varphi_{f^\pm}(x_1) = \int f^\pm(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$.
3. $\int f^\pm dm = \int \varphi_{f^\pm} dm_1$.

Le premier item donne que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$ (noter que f, f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Comme $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$ (car $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$), le troisième item donne que $\varphi_{f^+} < \infty$ p.p. (sur E_1) et que $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p. (sur E_1). On a donc $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. On en déduit donc que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. Ce qui donne le premier item de la conclusion.

La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 et on a $\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ p.p. (on a $\varphi_f(x_1) = \varphi_{f^+}(x_1) - \varphi_{f^-}(x_1)$ en tout point x_1 t.q. $\varphi_{f^+}(x_1) < \infty$ et $\varphi_{f^-}(x_1) < \infty$). Comme $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p, on peut trouver $A \in T_1$ t.q. $m_1(A) = 0$ et $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ sur $A^c = E_1 \setminus A$. En posant $g = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ sur A^c et $g = 0$ sur A, on a donc $g \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, $g = \varphi_f$ p.p. et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ car $\int |g| dm_1 \le \int \varphi_{f^+} dm_1 + \int \varphi_{f^-} dm_1 < \infty$. Ceci donne le deuxième item de la conclusion (le fait que φ_f appartienne à $L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$) et donne aussi le troisième item car :

$$\begin{aligned}\int \varphi_f dm_1 &= \int g dm_1 = \int \varphi_{f^+} dm_1 - \int \varphi_{f^-} dm_1\\ &= \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.\end{aligned}$$

Enfin, comme pour le théorème de Fubini-Tonelli, le quatrième item de la conclusion s'obtient en changeant les rôles de m_1 et m_2. ■

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 7.13 *Soit* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis,* (E, T, m) *l'espace produit et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable t.q. :*

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) < +\infty$$

ou

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

(Toutes les intégrales ayant bien un sens.)

DÉMONSTRATION – Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 7.12 et de l'équivalence (7.6). ■

Remarque 7.14 (Contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée. Soit a une fonction (continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = a(x)$ si $x \ge 0$ et $x \le y < 2x$, $f(x, y) = -a(x)$ si $x \ge 0$ et $2x \le y < 3x$, $f(x, y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \ge 0$ et $y \notin [x, 3x]$. On pose $b(x) = x a(x)$. On peut montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $b \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = 1/(1 + x)^2$, on montre que $\int (\int f(x, y) dy) dx \ne \int (\int f(x, y) dx) dy$ (voir l'exercice 7.5).

7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$

On a déjà vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $N \geq 1$ (exercice 2.6 pour $N = 2$ et exercice 7.1). Le paragraphe précédent permet alors de définir la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ (c'est-à-dire sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$) pour tout $N \geq 1$.

Définition 7.15 (Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

1. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la mesure $\lambda \otimes \lambda$, on la note λ_2.

2. Par récurrence sur N, la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, est la mesure $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$, on la note λ_N.

On note $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note

$$\int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx.$$

On donne maintenant quelques propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit de propriétés élémentaires ou de généralisations simples de propriétés vues pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les démonstrations seront proposées en exercices.

Proposition 7.16 (Propriétés élémentaires de λ_N)
Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. La mesure λ_N est σ-finie.

2. Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i).$$

3. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Alors :

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i).$$

4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Alors, $\lambda_N(K) < +\infty$.

5. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Alors, $\lambda_N(O) > 0$.

6. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

7. $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. (En confondant f avec sa classe, on écrira donc souvent $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$.)

DÉMONSTRATION – Comme λ_N est une mesure produit, le fait que λ_N est σ-finie est (par récurrence sur N) une conséquence du théorème donnant l'existence (et l'unicité) de la mesure produit (théorème 7.3) car ce théorème donne que le produit de mesures σ-finies est σ-finie.

La démonstration des autres propriétés fait l'objet de l'exercice 7.10. ■

Une propriété très importante de λ_N est sa régularité, c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts, est régulière (proposition 7.17).

Proposition 7.17 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts) *Soit m une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $m(K) < \infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^N$. *(Noter que ceci est vrai pour* $m = \lambda_N$.*) Alors :*

1. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* O *ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* F *fermé de* $\mathbb{R}^N$ *tels que :*

$$F \subset A \subset O \textit{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *on a* $m(A) = \inf\{m(O), O \textit{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

DÉMONSTRATION – Cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.11. ■

On donne maintenant des généralisations au cas de λ_N de propriétés déjà vues pour λ.

Proposition 7.18 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout* $N \geq 1$, *l'espace* $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *(c'est-à-dire que, pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *t.q.* $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$*).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.14, elle découle essentiellement de la régularité de λ_N. Cette démonstration est très voisine de celle faite pour le cas N = 1, théorème 5.20. ■

Comme cela a déjà été dit après le théorème 5.20, le résultat de densité que nous venons d'énoncer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 7.19 (Densité de C_c^∞ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit* $N \geq 1$ *et* μ *sur une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*, finie sur les compacts. Alors, l'espace* $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ *(c'est-à-dire que, pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *t.q.* $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$*).*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 7.15.

Proposition 7.20 (Invariance par translation) *Soient* $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, *on pose* $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ *(noter que* φ *est une bijection de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}^N$*). Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *on a alors* $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$.
Pour $\alpha_i = 1$ *pour tout i, cette propriété s'appelle invariance par translation de* λ_N.

DÉMONSTRATION – Cette proposition a déjà été vue pour N = 1, proposition 2.48. La démonstration de la proposition 2.48 utilisait, par exemple, le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (et la régularité de λ). La démonstration proposée ici pour $N \geq 1$ utilise une récurrence sur N et la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit. Elle fait l'objet de l'exercice 7.16.

On peut aussi noter que la partie unicité du théorème 7.3 peut être faite (voir la remarque 7.4) avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Ce lemme pourrait aussi être utilisé pour démontrer la proposition 2.48 (au lieu du théorème de régularité et du fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux). ■

Proposition 7.21 (Changement de variables simple)
Soient $\mathrm{N} \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{N} \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_\mathrm{N} \in \mathbb{R}$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_\mathrm{N})^t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, *on pose* $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_\mathrm{N} x_\mathrm{N} + \beta_\mathrm{N})^t$ *(de sorte que* φ *est une bijection de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *dans* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$*). Alors :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}))$, *on a* $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int f \, d\lambda_\mathrm{N} = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_\mathrm{N}.$$

2. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$, *on a* $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ *et :*

$$\int f \, d\lambda_\mathrm{N} = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_\mathrm{N}.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence simple de la proposition 7.20. Elle fait l'objet de l'exercice 7.17.

Noter aussi que $\prod_{i=1}^{\mathrm{N}} |\alpha_i|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Cette matrice est notée $\mathrm{D}\varphi(x)$, elle ne dépend pas de x pour les applications considérées dans cette proposition. Cette proposition sera généralisée au théorème 7.29. ∎

7.5 Convolution

On rappelle que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ et que, pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, $\int f d\lambda_\mathrm{N} = \int f(x) d\lambda_\mathrm{N}(x) = \int f(x) dx$ (c'est-à-dire que dx signifie toujours $d\lambda_\mathrm{N}(x)$).
On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$.
Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On souhaite définir la fonction convoluée de f et g, c'est-à-dire définir $f * g$ par :

$$f * g(x) = \int f(t) g(x - t) dt.$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas des représentants choisis pour f et g.
2. Il faut que, ayant choisi des représentants pour f et g, encore notés f et g, la fonction $g(x - \cdot) f(\cdot)$ appartienne à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $g(x - \cdot) f(\cdot) = h$ p.p."). Ceci n'est pas immédiat car, en général, le produit deux fonctions intégrables n'est pas une fonction intégrable.

La condition 1 est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, si f, f_1, g et g_1 sont des fonctions de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f = f_1 \text{ p.p.}, \; g = g_1 \text{ p.p.} \; \Rightarrow f(\cdot) g(x - \cdot) = f_1(\cdot) g_1(x - \cdot) \text{ p.p..} \tag{7.7}$$

(p.p. signifiant ici λ_N-p.p..) En effet, il suffit de remarquer que si $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p., il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{B}) = 0$, $f = f_1$ sur A^c et $g = g_1$ sur B^c. Pour $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, on a alors $f(\cdot) g(x - \cdot) = f_1(\cdot) g_1(x - \cdot)$ sur $\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}_x^c = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}_x)^c$ avec $\mathrm{B}_x = \{x - z, z \in \mathrm{B}\}$. On en déduit bien $f(\cdot) g(x - \cdot) = f_1(\cdot) g_1(x - \cdot)$ p.p. car $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}_x) \leq \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) + \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{B}_x) = \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) + \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{B}) = 0$ (on utilise ici la propriété d'invariance par translation donnée dans la proposition 7.20).

On en déduit que, si f et f_1 [resp. g et g_1] sont des représentants d'un même élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a $f(.)g(x-.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ si et seulement si $f_1(.)g_1(x-.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et, si $f(.)g(x-.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a $\int f(t)g(x-t)dt = \int f_1(t)g_1(x-t)dt$.

On montre dans la proposition suivante que la condition 2 est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Proposition 7.22 (Convolution) *Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :*

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc : $f * g(x) = \displaystyle\int f(t)g(x-t)dt$. La fonction $f * g$ est donc définie p.p. sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$.*
- *$f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $f * g = h$ p.p.").*
- *$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Démonstration – On donne la démonstration pour $\mathrm{N} = 1$ (le cas $\mathrm{N} > 1$ est similaire, en ayant d'abord montré que $\lambda_{2\mathrm{N}} = \lambda_\mathrm{N} \otimes \lambda_\mathrm{N}$).

On choisit des représentants de f et g, de sorte que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (théorème 7.12) à $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{H}(x,y) = f(y)g(x-y)$, avec les espaces mesurés $(\mathrm{E}_i, \mathrm{T}_i, m_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Comme λ est σ-finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et que $\int(\int |\mathrm{H}(x,y)|dx)dy < \infty$.

On montre d'abord que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On a $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \circ \psi$ avec :

$$\mathrm{H}_1 \;:\; (x,y) \mapsto f(x)g(y), \;\; \psi \;:\; (x,y) \mapsto (y, x-y).$$

La fonction H_1 est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car f et g sont mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on applique ici la proposition 7.11) et ψ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car continue ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions mesurables. On peut maintenant calculer l'intégrale de $|\mathrm{H}|$:

$$\int\Big(\int |\mathrm{H}(x,y)|dx\Big)dy = \int\Big(\int |f(y)g(x-y)|dx\Big)dy = \int |f(y)|\Big(\int |g(x-y)|dx\Big)dy.$$

La proposition 7.21 donne $\int |g(x-y)|dx = \int |g(x)|dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int\Big(\int |\mathrm{H}(x,y)|dx\Big)dy = \|g\|_1 \int |f(y)|dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $\mathrm{H}(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x-\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci montre bien que $f * g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $f * g = h$ p.p.").

Enfin pour montrer que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, il suffit de remarquer que :

$$\|f * g\|_1 = \int \Big|\int f(y)g(x-y)dy\Big|dx \leq \int\Big(\int |\mathrm{H}(x,y)|dx\Big)dy = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

■

Remarque 7.23 On a vu précédemment que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ muni de l'addition (loi de composition interne), de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) et de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. L'ajout de la convolution (loi de composition interne) confère à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ la structure d'algèbre de Banach.

On sait aussi que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne, de la multiplication par un scalaire et de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$ est aussi une algèbre de Banach. En fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et son image (par cette transformation) dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$.

Remarque 7.24 On donne ici quelques propriétés supplémentaires de la convolution. Soit $\mathrm{N} \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on pose $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) = \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$.

1. Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. On a alors $f * g = g * f$ p.p.. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue (propositions 7.20 et 7.21) et est démontré dans l'exercice 7.19.
2. Soit$1 < p < \infty$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Alors, $f * g$ est définie p.p. sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Cette propriété fait l'objet de l'exercice 7.21.
3. Soit $p, q \in [1, \infty]$ t.q. $(1/p) + (1/q) = 1$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et $f * g \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$, voir l'exercice 8.7.
4. Soit $p \in [1, \infty]$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ et $g \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et $f * g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$, voir l'exercice 7.20.
5. (Régularisation par convolution) Soit $f : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ si $f 1_{\mathrm{K}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ pour tout compact K de R^{N}. On suppose que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathrm{C}^k_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et $f * g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ (voir l'exercice 7.20, noter que $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$).
6. Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Alors, la fonction $f * g$ est aussi à support compact. Ceci fait partie de l'exercice 7.19.

La convolution est un outil très utile pour "régulariser" des fonctions. Elle est à la base de résultats de densité fondamentaux que nous verrons dans le chapitre suivant (densité de $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ pour $p < \infty$, par exemple).

Il est aussi intéressant de généraliser la convolution de fonctions en convolution de mesures. On commence par remarquer qu'une fonction f dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ (voir la remarque 7.24) est entièrement déterminée par la mesure qu'elle induit sur les parties boréliennes bornées de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, c'est-à-dire par la mesure m définie par $m = f\lambda_{\mathrm{N}}$ (qui est une mesure signée sur Ω si Ω est une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$). Ceci est précisé dans le lemme suivant (en remarquant que $\int \varphi dm = \int \varphi f d\lambda_{\mathrm{N}}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$).

Lemme 7.25 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* $f, g \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ *t.q.* $\int f\varphi d\lambda_{\mathrm{N}} = \int g\varphi d\lambda_{\mathrm{N}}$, *pour tout* $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$. *Alors,* $f = g$ *p.p..*

DÉMONSTRATION – Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{N}^*$. On note B_{M} la boule (fermée) de centre 0 et rayon M dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et h_{M} la fonction définie par :

$$h_{\mathrm{M}}(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si } x \in \mathrm{B}_{\mathrm{M}} \text{ et } |f(x) - g(x)| \leq \mathrm{M}, \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{B}_{\mathrm{M}} \text{ ou } |f(x) - g(x)| > \mathrm{M}, \\ \end{cases}$$

On a $h_{\mathrm{M}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ (car B_{M} est un compact de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$). Comme $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ (théorème 5.20 pour $d = 1$ et théorème 7.18 pour $\mathrm{N} \geq 1$), il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n \to h_{\mathrm{M}}$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ quand $n \to +\infty$. On peut aussi supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $\varphi_n \to h_{\mathrm{M}}$ p.p. (théorème 6.11). Enfin, en remplaçant φ_n par $\max(\min(\varphi_n, \mathrm{M}), -\mathrm{M})$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\varphi_n \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ &\varphi_n \to h_{\mathrm{M}} \text{ p.p.}, \\ &|\varphi_n| \leq \mathrm{M} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi_n \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$, on a $\int (f - g)\varphi_n d\lambda_{\mathrm{N}} = 0$. Le théorème de convergence dominée (la domination est par $\mathrm{M}1_{\mathrm{B}_{\mathrm{M}}}|f - g|$) donne alors $\int h_{\mathrm{M}}(f - g) d\lambda_{\mathrm{N}} = 0$. En faisant maintenant tendre M vers l'infini, le théorème de convergence monotone donne $\int |f - g| d\lambda_{\mathrm{N}} = 0$, et donc $f = g$ p.p. ■

Pour que la convolution de mesures soit une généralisation de la convolution de fonctions, on souhaite que $m * \mu = (f * g)\lambda_N$, lorsque $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$ avec $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (et donc $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$). Noter que m, μ et $m * \mu$ sont des mesures signées. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On pose $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$. Pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$),

$$\int (f * g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right) \varphi(x)dx.$$

(On rappelle que dx désigne $d\lambda_N(x)$). En utilisant le théorème de Fubini, qui s'applique bien ici car

$$\int\int |f(x-y)g(y)\varphi(x)|dxdy \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1,$$

et avec le changement de variable $z = x - y$ (pour y fixé), on obtient :

$$\begin{aligned}\int (f * g)\varphi d\lambda_N &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(x)dx \right) g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z+y)dz \right) g(y)dy.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int (f * g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z+y)dm(z) \right) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \varphi(y+z)d(m \otimes \mu)(z,y), \tag{7.8}$$

où la dernière égalité découle de la définition de $m \otimes \mu$. Plus précisément, si m et μ sont des mesures finies (c'est-à-dire des applications σ-additives de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}^+$), la dernière égalité de 7.8 est donnée par le troisième item du théorème de Fubini (théorème 7.12). Si m et μ sont des mesures signées, on se ramène au cas précédent avec la décomposition de Hahn (proposition 2.33) qui donne $m = m^+ - m^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La mesure $m \otimes \mu$ est alors définie à partir de $m^\pm \otimes \mu^\pm$.

On est ainsi amené naturellement à définir $m * \mu$ en utilisant le deuxième membre de (7.8) pour définir $\int \varphi d(m * \mu)$.

Définition 7.26 (Convolution de mesures) *Soit* $N \geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. *On définit la mesure signée* $m * \mu$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *par :*

$$m * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} 1_A(x+y)d(m \otimes \mu)(x,y) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

où $m \otimes \nu = m^+ \otimes \mu^+ + m^- \otimes \mu^- - m^- \otimes \mu^+ - m^+ \otimes \mu^-$ *et* $m^\pm$ $\mu^\pm$ *sont données par la décomposition de Hahn de* m *et* μ *(proposition 2.33).*

Le fait que $m * \mu$ est une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est facile (la σ-additivité de $m * \mu$ découle, par exemple, du théorème de convergence dominée). On déduit de cette définition la proposition suivante.

Proposition 7.27 *Soit* $N \geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
1. On a alors, pour tout φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$ *(par exemple,* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$*) :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d(m * \mu) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})} \varphi(x+y)d(m \otimes \mu)(x,y).$$

2. Si m et μ sont des probabilités, la mesure $m*\mu$ est aussi une probabilité.
3. Si $f,g \in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, $m = f\lambda_N$ et $\mu = g\lambda_N$, on a $m*\mu = (f*g)\lambda_N$.

DÉMONSTRATION – Le premier item se démontre, comme souvent, en considérant des fonctions étagées, puis en écrivant φ comme limite de fonctions étagées (bornées par la borne supérieure de $|\varphi|$, exercice 7.23). Le deuxième item est immédiat en remarquant que $m*\mu(A) \geq 0$ si m et μ sont des mesures (positives) et $m*\mu(\mathbb{R}^N) = m(\mathbb{R}^N)\mu(\mathbb{R}^N)$. Enfin, le troisième item a été vu avant la proposition 7.27. ∎

Remarque 7.28 Il aurait aussi été possible de définir $m*\mu$ grâce au théorème de Riesz dans $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (théorème 5.16 pour $N \geq 1$). Si m, μ sont des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (ou, directement, des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$). On définit, l'application L de $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+y)dm(x)d\mu(y), \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}).$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de Radon, notée τ (c'est la mesure convoluée de m et μ) t.q. :

$$L(\varphi) = \int \varphi(s)d\tau(s).$$

7.6 Formules de changement de variable

La proposition 7.21 donne un résultat sur les changements de variables “simples”. On donne maintenant une généralisation dans le cas où les intégrales portent sur des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 7.29 (Formules de changement de variable) *Soit $N \geq 1$, U et V des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ et φ un C^1-difféomorphisme de U dans V (i.e. φ est une bijection de U dans V, $\varphi \in C^1(U,V)$ et $\varphi^{-1} \in C^1(V,U)$). On note $D\varphi(y)$ la matrice jacobienne de φ en y et $Det(D\varphi)$ la fonction $y \mapsto Det(D\varphi(y))$.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Alors,

$$(f\circ\varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy.$$

2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f1_V \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$. Alors,

$$(f\circ\varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy.$$

DÉMONSTRATION – Comme φ est de classe C^1, la fonction $(f\circ\varphi)|Det(D\varphi)|1_U$ est mesurable si f est mesurable. Il est plus difficile de montrer l'égalité donnée dans l'item 1 du théorème. Cette démonstration n'est pas faite ici. Elle consiste à se ramener par un procédé de localisation au cas de changements de variable affines.

Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier. En effet, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f1_V \in \mathcal{L}^1$. En appliquant le premier item à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+$, on obtient que $(f\circ\varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$. Puis en appliquant le premier item à f^+ et f^- et en faisant la différence, on obtient bien que $\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy$. ∎

Un exemple de changement de variable On conclut cette section en donnant l'exemple des coordonnées polaires pour $N = 2$. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). On veut calculer (par exemple) $\int_{B_1} f(x)dx$, où B_1 est la boule unité (ouverte) de $\mathbb{R}^2$, en passant en coordonnée polaires.

On a donc $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x| < 1\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

On pose $L = \{(x_1, 0)^t, x_1 \in [0, 1[\}$ et on remarque que $\lambda_2(L) = \lambda([0,1[) \times \lambda(\{0\}) = 0$. Donc, en posant $V = B_1 \setminus L$, on a :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_{B_1 \setminus L} f(x)dx = \int_V f(x)dx (= \int_V f d\lambda_2).$$

On pose aussi $U =]0,1[\times]0,2\pi[$, de sorte que U et V sont de ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi : (r, \theta)^t \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)^t$ est alors une bijection de U dans V. Elle est de classe C^1 et son inverse est de classe C^1 (φ et φ^{-1} sont même de classe C^∞). On peut calculer la matrice jacobienne de φ et son déterminant :

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \ |Det(D\varphi(r,\theta))| = r.$$

On peut donc appliquer le théorème 7.29, il donne :

$$\begin{aligned} \int_{B_1} f(x)dx = \int_V f(x)dx &= \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta) \\ &= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta) \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer la dernière intégrale (si $f \in \mathcal{L}^1$ au lieu de $f \in \mathcal{M}_+$, on raisonne d'abord sur $|f|$ puis on utilise le théorème de Fubini), on obtient :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta.$$

Si $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, c'est-à-dire s'il existe ψ t.q. $f(x) = \psi(|x|)$, on obtient alors :

$$\int_{B_1} f(x)dx = 2\pi \int_0^1 \psi(r) r dr.$$

En particulier, on voit que $f 1_{B_1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, avec g définie par $g(r) = r\psi(r)$ pour $r \in]0,1[$.

Prenons toujours $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou bien $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). Le raisonnement que nous venons de faire pour B_1 peut être fait pour $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x| < a\}$ avec $a > 0$. On obtient alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_{B_a} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.9}$$

En prenant $a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, dans (7.9), on obtient aussi, quand $n \to +\infty$ (avec le théorème de convergence monotone si $f \in \mathcal{M}_+$ et en raisonnement avec $f^\pm$ si $f \in \mathcal{L}^1$) :

$$\int f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.10}$$

7.7 Exercices

7.7.1 Mesure produit

Exercice 7.1 (Mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.6.]

Corrigé – *On note* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire la tribu (sur* $\mathbb{R}^n$*) engendrée par* $\{A \times B ;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*. On veut montrer que* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Etape 1, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$**.**

Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. On va montrer que* $O \in T$*. On suppose* $O \neq \emptyset$ *(on sait déjà que* $\emptyset \in T$*). Pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in O$*, il existe* $r > 0$ *t.q.* $\prod_{i=1}^n]x_i - r, x_i + r[\subset O$*. Comme les rationnels sont denses dans* $\mathbb{R}$*, on peut trouver, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$*,* $y_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i - r, x_i[$ *et* $z_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i, x_i + r[$*. On a donc* $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O$.

On note alors $I = \{(y, z) \in \mathbb{Q}^{2n} ;\ \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O\}$ *(avec* $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ *et* $z = (z_1, \ldots, z_n)^t$*). Pour tout* $x \in O$*, il existe donc* $(y, z) \in I$ *t.q.* $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$*. On en déduit que* $O = \bigcup_{(y,z) \in I} \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$.

L'ensemble $\prod_{i=1}^{n-1}]y_i, z_i[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$*, il appartient donc à* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *(qui est la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^{n-1}$*). L'ensemble* $]y_n, z_n[$ *appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Donc,* $\prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Comme* I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^{2n}$ *est dénombrable), on en déduit que* $O \in T$*. On a ainsi montré que* T *est une tribu contenant tous les ouverts de* $\mathbb{R}^n$*, et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*). Donc,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Etape 2, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset T$**.**

On reprend ici aussi la même démarche que dans l'exercice 2.6.

1. *Soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *et* $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) ;\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$*. On montre d'abord que* T_1 *est une tribu (sur* $\mathbb{R}$*)*

   – $\emptyset \in T_1$ *car* $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

   – *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire. Soit* $B \in T_1$*, on a donc* $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$*. Or,* $(A \times \mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *(car* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *et* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*), on a donc* $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $B \in T_1$*). Donc,* $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. Ce qui prouve que* $B^c \in T_1$ *et donc que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

   – *Enfin,* T_1 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset T_1$*, on a* $A \times (\bigcup_{p \in \mathbb{N}} B_p) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} B_p \in T_1$.

   On a donc montré que T_1 *est une tribu.*

   On montre maintenant que T_1 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$.

   Soit B *un ouvert de* $\mathbb{R}$*. On a donc* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et, comme* $A \times B$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, on a* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. On a donc* $B \in T_1$.

   T_1 *est donc une tribu contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, donc contenant* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Donc,* $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   La conséquence de ce résultat est :

   $$A \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{7.11}$$

2. *Soit* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) ;\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$*. On va montrer que* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On commence par remarquer que (7.11) donne que T_2 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}^{n-1}$*. En effet, soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$*, la propriété (7.11) donne que* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, et donc* $A \in T_2$.

   On montre maintenant que T_2 *est une tribu (on en déduira que* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$*).*

   – $\emptyset \in T_2$ *car* $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

– *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire. Soit* $A \in T_2$*, on a* $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *et* $A^c \times B = (\mathbb{R}^{n-1} \times B) \setminus (A \times B)$*. La propriété (7.11) donne* $(\mathbb{R}^{n-1} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *car* $\mathbb{R}^{n-1}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$*. D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $A \in T_2$*). Donc,* $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. Ce qui prouve que* $A^c \in T_2$ *et donc que* T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

– *Enfin,* T_2 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T_2$*, on a* $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p) \times B = \bigcup_{p\in\mathbb{N}}(A_p \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $A_p \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in T_2$*.*

T_2 *est donc une tribu (sur* $\mathbb{R}^{n-1}$*) contenant les ouverts de* $\mathbb{R}^{n-1}$*, ce qui prouve que* $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *et donc, finalement,* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$*.*

On a donc obtenu le résultat suivant :

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{7.12}$$

3. *On montre maintenant que* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(et donc que* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*).*

Grâce à (7.12), on a $\{A \times B;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. On en déduit que* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. On a donc bien, avec l'étape 1,* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*.*

Exercice 7.2 (Algèbre engendrée par un produit de tribus) Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2. On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1,\dots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{A}$ *l'algèbre engendrée par* $T_1 \times T_2$ *et* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de* $T_1 \times T_2$*.*

Comme $\mathcal{A}$ *contient* $T_1 \times T_2$ *et que* $\mathcal{A}$ *est stable par union finie, il est immédiat que* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$*. Pour montrer que* $\mathcal{B} = \mathcal{A}$*, il suffit alors de montrer que que* $\mathcal{B}$ *est une algèbre (puisque* $\mathcal{A}$ *est la plus petite algèbre contenant* $T_1 \times T_2$ *et que* $\mathcal{B}$ *contient* $T_1 \times T_2$*).*

Pour montrer que $\mathcal{B}$ *est une algèbre, on montre d'abord (étape 1) que* $T_1 \times T_2$ *est stable par intersection finie et que le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est la réunion de 2 éléments disjoints de* $T_1 \times T_2$ *(en fait, pour montrer que* $\mathcal{B}$ *est une algèbre, il suffirait de savoir que le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est une union finie disjointe d'éléments de* $T_1 \times T_2$*). Puis, on en déduit (étape 2) que* $\mathcal{B}$ *vérifie les propriétés* (a) *et* (b) *de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que* $\mathcal{B}$ *est bien une algèbre.*

Etape 1. *Propriétés de* $T_1 \times T_2$*.*

– *Soient* $A_1, B_1 \in T_1$ *et* $A_2, B_2 \in T_2$*. On a clairement* $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$*. Comme* T_1 *et* T_2 *sont stables par intersection finie, on en déduit que* $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in T_1 \times T_2$ *et donc que* $T_1 \times T_2$ *est stable par intersection finie.*

– *Soient* $A_1 \in T_1$ *et* $A_2 \in T_2$*. On remarque que* $(A_1 \times A_2)^c = (E_1 \times A_2^c) \cup (A_1^c \times A_2)$*. Comme* $(E_1 \times A_2^c) \in T_1 \times T_2$*,* $(A_1^c \times A_2) \in T_1 \times T_2$ *et que* $(E_1 \times A_2^c) \cap (A_1^c \times A_2) = \emptyset$*, on a bien montré que le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est la réunion de 2 éléments disjoints* $T_1 \times T_2$*.*

Etape 2. *On montre maintenant que* $\mathcal{B}$ *vérifie les propriétés* (a) *et* (b) *de la question 1 de l'exercice 2.9. La propriété* (a) *est immédiate car* $E = E_1 \times E_2 \in T_1 \times T_2 \subset \mathcal{B}$*. Pour montrer* (b)*, on montre d'abord que* $\mathcal{B}$ *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $B \in \mathcal{B}$*. Il existe* $(B^{(q)})_{q=1,\dots,m} \subset T_1 \times T_2$ *t.q.* $B^{(p)} \cap B^{(q)} = \emptyset$ *si* $p \neq q$ *et* $B = \bigcup_{q=1}^m B^{(q)}$*. On a alors* $B^c = \bigcap_{q=1}^m (B^{(q)})^c$*. Le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est la réunion de 2 éléments disjoints de* $T_1 \times T_2$*. Pour tout q, il existe donc* $C_{q,1}, C_{q,2} \in T_1 \times T_2$ *t.q.* $(B^{(q)})^c = C_{q,1} \cup C_{q,2}$ *et* $C_{q,1} \cap C_{q,2} = \emptyset$*. On a donc* $B^c = \bigcap_{q=1}^m (C_{q,1} \cup C_{q,2}) = \bigcup_{\varphi\in I}(\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)})$ *où* I *désigne l'ensemble des applications de* $\{1, \dots, m\}$ *dans* $\{1, 2\}$*. Ceci prouve que* $B^c \in \mathcal{B}$*. En effet,* *on remarque d'abord que, pour tout $\varphi \in \mathrm{I}$, on a $\bigcap_{q=1}^{m} \mathrm{C}_{q,\varphi(q)} \in \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ car $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ est stable par intersection finie. Puis, pour $\varphi, \psi \in \mathrm{I}$ $\varphi \neq \psi$, il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ t.q. $\varphi(k) \neq \psi(k)$. On a donc $(\bigcap_{q=1}^{m} \mathrm{C}_{q,\varphi(q)}) \cap (\bigcap_{q=1}^{m} \mathrm{C}_{q,\psi(q)}) = \emptyset$ car $\bigcap_{q=1}^{m} \mathrm{C}_{q,\varphi(q)} \subset \mathrm{C}_{k,\varphi(k)}$, $\bigcap_{q=1}^{m} \mathrm{C}_{q,\psi(q)} \subset \mathrm{C}_{k,\psi(k)}$ et $\mathrm{C}_{k,\varphi(k)} \cap \mathrm{C}_{k,\psi(k)} = \emptyset$. On a donc bien montré que B^c est une union finie disjointe d'éléments de $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$, c'est-à-dire que $\mathrm{B}^c \in \mathcal{B}$.*

On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (b) de la question 1 de l'exercice 2.9. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}$. Comme on vient de voir que $\mathrm{B}^c \in \mathcal{B}$, Il existe $(\mathrm{A}^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ et $(\mathrm{C}^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ t.q. $\mathrm{A}^{(p)} \cap \mathrm{A}^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $\mathrm{C}^{(p)} \cap \mathrm{C}^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $\mathrm{A} = \bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}^{(p)}$ et $\mathrm{B}^c = \bigcup_{q=1}^{m} \mathrm{C}^{(q)}$. On a alors $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c = (\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}^{(p)}) \cap (\bigcup_{q=1}^{m} \mathrm{C}^{(q)}) = \bigcup_{p=1}^{n} \bigcup_{q=1}^{m} (\mathrm{A}^{(p)} \cap \mathrm{C}^{(q)})$. On en déduit que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{B}$. En effet, $\mathrm{A}^{(p)} \cap \mathrm{C}^{(q)} \in \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ pour tout p et tout q (car $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ est stable par intersection finie) et $(\mathrm{A}^{(p_1)} \cap \mathrm{C}^{(q_1)}) \cap (\mathrm{A}^{(p_2)} \cap \mathrm{C}^{(q_2)}) = \emptyset$ si $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ (car $\mathrm{A}^{(p_1)} \cap \mathrm{A}^{(p_2)} = \emptyset$ si $p_1 \neq p_2$ et $\mathrm{C}^{(q_1)} \cap \mathrm{C}^{(q_2)} = \emptyset$ si $q_1 \neq q_2$).

On a donc montré que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre et donc que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Exercice 7.3 (Exemple de mesure produit) Soit m_1 et m_2 des mesures $\sigma-$finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = 0$, où $\mathrm{D} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe a, α, $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha\delta_a$ et $m_2 = \beta\delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Corrigé – *On remarque d'abord que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. la quantité $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D})$ est donc bien définie.*

La construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ donne (voir la démonstration du théorème 7.3) :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = \int m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_1(x).$$

Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec $f = 1_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$.

De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = 0$, on déduit donc que $m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ m_1-p.p.. Comme $m_1(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $m_2(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$. Ceci donne que $m_2 = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = m_2(\{a\})$. Comme $m_2 \neq 0$, on a $\alpha > 0$.

Dans la construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ (démonstration du théorème 7.3), on aurait pu inverser les rôles de m_1 et m_2. On aurait obtenu la même mesure $m_1 \otimes m_2$ (grâce à la partie unicité du théorème 7.3). On a donc aussi :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = \int m_1(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_2(x).$$

(Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec $f = 1_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$.)

Comme $m_2 = \alpha\delta_a$, on a donc $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = \alpha m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}) = 0$, on déduit donc $m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$, ce qui donne $m_1 = \beta\delta_a$ avec $\beta = m_1(\{a\})$. (On peut aussi remarquer que, comme $m_1 \neq 0$, on a $\beta > 0$.)

Exercice 7.4 (Fonction dont les traces sont boréliennes) Pour $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(\mathrm{B})$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in \mathrm{B}$. On pose $\mathrm{T} = \{\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2 ; t(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *On montre assez facilement que T est une tribu sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on peut remarquer, par exemple, que $\mathbb{R}^2 \in \mathrm{T}$ (car $t(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), T est stable par union dénombrable (si $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} t(\mathrm{B}_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par stabilité de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par union dénombrable) et T est stable par passage au complémentaire (si $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, on a $t(\mathrm{B}^c) = t(\mathrm{B})^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par stabilité de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par passage au complémentaire).*

Pour montrer que $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on pose

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On remarque maintenant que $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$ (car si A_1, $\mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $t(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = \mathrm{A}_1$ ou $\emptyset$ selon que $0 \in \mathrm{A}_2$ ou $0 \notin \mathrm{A}_2$). La tribu T contenant $\mathcal{C}$, elle contient nécessairement la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times \{0\}$.

(a) Montrer que $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *Comme $t(\mathrm{B}) = \mathrm{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{B} \notin \mathrm{T}$ et donc $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.*

(b) On pose $f = 1_{\mathrm{B}} \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *La fonction g est linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note h sa fonction réciproque. La fonction h est donc aussi linéaire. La fonction h est donc borélienne (car continue) et on a $1_{\mathrm{B}} = f \circ h$. Comme $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, la fonction 1_{B} n'est pas borélienne. On en déduit que f n'est pas borélienne (si f était borélienne, on aurait 1_{B} borélienne car composée de fonctions boréliennes).*

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$. On va montrer que la fonction $f(x_1, \cdot)$ est borélienne. On pose $x_2 = -x_1 \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. On distingue alors deux cas possibles :

Premier cas. *On suppose que $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \notin \mathrm{A}$. La fonction $f(x_1, \cdot)$ est alors la fonction nulle (c'est-à-dire que $f(x_1, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction $f(x_1, \cdot)$ est donc borélienne.*

Second cas. *On suppose que $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \in \mathrm{A}$. La fonction $f(x_1, \cdot)$ est alors la fonction nulle partout sauf au point x_2 où elle vaut 1 (c'est-à-dire que $f(x_1, x) = 1_{\{x_2\}}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction $f(x_1, \cdot)$ est donc borélienne.*

De manière analogue on peut montrer que $f(\cdot, x_2)$ est borélienne pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$.

7.7.2 Fubini–Tonelli et Fubini

Exercice 7.5 (Contre-exemple au théorème de Fubini) Soit $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- mesurable.

Corrigé – *On pose $\mathrm{A} = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0,\, x < y \leq 2x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0,\, x < y < 2x + \frac{1}{n}\}$. A_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il appartient donc à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $\mathrm{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.*

De même, en posant $\mathrm{B} = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0,\, 2x < y \leq 3x\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0,\, 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\}$, on montre que $\mathrm{B} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On pose maintenant $g(x,y) = \frac{1}{(|x|+1)^2}$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La fonction g est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable ($\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ étant munis de la tribu borélienne).

On remarque maintenant que $f = g1_{\mathrm{A}} - g1_{\mathrm{B}}$. On en déduit que f est mesurable (car f est une somme de produits de fonctions mesurables).

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(., y) \in \mathrm{L}^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x,y) d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in \mathrm{L}^1$.

Corrigé – *On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*

Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot, y)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.9). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(\cdot, y)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(.,y)| d\lambda = 0$ si $y \le 0$ et $\int |f(.,y)| d\lambda \le y$ si $y > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $x \notin [0,y]$ et $|f(x,y)| \le 1$ pour tout x, y. On peut définir $\phi(y)$.

Pour $y \le 0$, on a $\phi(y) = 0$ et pour $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(y) = \int f(\cdot,y) d\lambda &= -\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= -\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} \\ &= \frac{2y}{(y+3)(y+2)(y+1)}.\end{aligned}$$

La fonction ϕ est continue donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut donc calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$:

$$\int \phi d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(-\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -3\ln 3 + 4\ln(2).$$

Ceci donne bien, en particulier, $\phi \in \mathrm{L}^1$ (en confondant ϕ avec sa classe dans L^1).

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in \mathrm{L}^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x,y) d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in \mathrm{L}^1$.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x,\cdot)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.9). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(x,\cdot)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(x,\cdot)| d\lambda = 0$ si $x \le 0$ et $\int |f(x,\cdot)| d\lambda \le 3x$ si $x > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $y \notin [0,3x]$ et $|f(x,y)| \le 1$ pour tout x, y. On peut donc définir $\psi(x)$.*

Pour $x \le 0$, on a $\psi(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a :

$$\psi(x) = \int f(x,\cdot) d\lambda = \int_x^{2x} \frac{1}{(x+1)^2} dy - \int_{2x}^{3x} \frac{1}{(x+1)^2} dy = 0$$

On a donc $\psi \in \mathrm{L}^1$ et $\int \psi(x) dx = 0$.

4. Montrer que $\int \phi d\lambda \ne \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).

Corrigé – *On a déjà montré que $\int \phi d\lambda = -3\ln 3 + 4\ln(2) \ne 0 = \int \psi d\lambda$.*

5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

Corrigé – *Le théorème de Fubini ne s'applique pas ici car la fonction f n'est pas intégrale pour la mesure produit, c'est-à-dire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, notée λ_2. On peut d'ailleurs le vérifier en remarquant (par le théorème de Fubini-Tonelli) que :*

$$\int |f| d\lambda_2 = \int \left(\int |f(x,y)| d\lambda(y)\right) d\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \infty.$$

Exercice 7.6 (Intégrale d'une fonction positive) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré σ-fini, et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $\mathrm{F} = 1_{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{A} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E};\ 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$- mesurable

Corrigé – *Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe $(f_n) \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a alors $\mathrm{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ avec $\mathrm{A}_n = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\ 0 < t < f_n(x)\}$. Pour montrer que F est mesurable (ce qui équivalent à montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$), il suffit donc de montrer que $\mathrm{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_p \in \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ si $i \ne j$ et $f_n = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{B}_i}$. On a donc $\mathrm{A}_n = \bigcup_{i=1}^p]0, a_i[\times \mathrm{B}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$ car $]0, a_i[\times \mathrm{B}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathrm{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$ pour tout i.

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\})dt$ et que $\lambda \otimes m(A) = \int f dm$.
[Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – *On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à la fonction* F*, il donne :*

$$\int \mathrm{F} d(\lambda \otimes \mathrm{A}) = \int (\int \mathrm{F}(t,x) d\lambda(t)) dm(x) = \int (\int \mathrm{F}(t,x) dm(x)) d\lambda(t). \tag{7.13}$$

Pour $x \in \mathrm{E}$, $\int \mathrm{F}(t,x) d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)[) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. *Si* $t \le 0$, *on a* $\mathrm{F}(t,\cdot) = 0$. *Donc,* $\int \mathrm{F}(t,x) dm(x) = 0$. *Si* $t > 0$, *on a* $\mathrm{F}(t,\cdot) = 1_{\{f>t\}}$. *Donc,* $\int \mathrm{F}(t,x) dm(x) = m(\{f > t\})$.

On déduit donc de (7.13) :

$$\int \mathrm{F} d(\lambda \otimes \mathrm{A}) = \int f(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}_+} m(\{f > t\}) d\lambda(t) = \int_0^\infty m(\{x \in \mathrm{E};\ f(x) > t\}) dt.$$

Comme $\mathrm{F} = 1_{\mathrm{A}}$, *on a aussi* $\int \mathrm{F} d(\lambda \otimes m) = \lambda \otimes m(\mathrm{A})$, *ce qui termine cette question.*

3. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \ge t\})dt$.

Corrigé – *On reprend le raisonnement de la question précédente en remplaçant* F *par* $\mathrm{G} = 1_{\mathrm{B}}$ *avec* $\mathrm{B} = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathrm{E};\ 0 < t \le f(x)\}$. *On remarque d'abord que* B *est* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$*-mesurable. En effet, on a* $\mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n$ *avec* $\mathrm{B}_n = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathrm{E};\ 0 < t < f_n(x)\}$ *et* $f_n = f + \frac{1}{n}$. *Comme* $f_n \in \mathcal{M}_+$, *la première question donne* $\mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$. *On en déduit que* $\mathrm{B} \in \mathrm{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$. *On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction* G*, il donne :*

$$\int (\int \mathrm{G}(t,x) d\lambda(t)) dm(x) = \int (\int \mathrm{G}(t,x) dm(x)) d\lambda(t). \tag{7.14}$$

Pour $x \in \mathrm{E}$, $\int \mathrm{G}(t,x) d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)]) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. *Si* $t \le 0$, *on a* $\mathrm{G}(t,\cdot) = 0$. *Donc,* $\int \mathrm{G}(t,x) dm(x) = 0$. *Si* $t > 0$, *on a* $\mathrm{G}(t,\cdot) = 1_{\{f\ge t\}}$. *Donc,* $\int \mathrm{G}(t,x) dm(x) = m(\{f \ge t\})$.

On déduit donc de (7.14) :

$$\int f(x) dm(x) = \int_0^\infty m(\{x \in \mathrm{E};\ f(x) \ge t\}) dt.$$

Exercice 7.7 (Une caractérisation de L^p**)** On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$]. Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $\mathrm{A}_y = \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_-^*$, on pose $\mathrm{A}_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto 1_{\mathrm{A}_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]

Corrigé – *On pose* $\mathrm{B} = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$, *de sorte que*

$$\mathrm{B} = (\mathrm{F} - \mathrm{G})^{-1}(]0, \infty[)$$

où F *et* G *sont définies par :*

$$\mathrm{F}(x,y) = |f(x)|,\ \mathrm{G}(x,y) = y,\ (x,y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|$ *est mesurable (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) ainsi que l'application* $y \mapsto 1$*(application constante). La proposition 7.11 nous donne alors que* F *est mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *(puisque* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*). La fonction* G *est aussi mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *(il suffit de remarquer qu'elle est continue, ou d'utiliser une nouvelle fois la proposition 7.11). La fonction* $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ *est donc mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$*, ce qui prouve que* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *La fonction* 1_{B} *est donc mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $1_{\mathrm{B}}(x,y) 1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}(x,y) = 1_{\mathrm{A}_y}(x)$ *pour tout* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. *L'application* $(x,y)^t \mapsto 1_{\mathrm{A}_y}(x)$ *est donc mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *car elle est égale à un produit de fonctions mesurables.*

Soit $p \in [1,\infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1}\lambda(\mathrm{A}_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(\mathrm{A}_0) = \infty$).

2.(a) Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{\mathrm{A}_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *L'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{\mathrm{A}_y}(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Cette application est, bien sûr, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est donc mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*

(b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – *On pose $\mathrm{H}(x,y) = |y|^{p-1}1_{\mathrm{A}_y}(x)$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La question précédente donne que $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à la fonction H, il donne :*

$$\int\Big(\int \mathrm{H}(x,y)d\lambda(x)\Big)d\lambda(y) = \int\Big(\int \mathrm{H}(x,y)d\lambda(y)\Big)d\lambda(x). \tag{7.15}$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a $\int \mathrm{H}(x,y)d\lambda(x) = |y|^{p-1}\lambda(\mathrm{A}_y) = g_p(y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(\mathrm{A}_0) = \infty$). Ceci donne, en particulier, que g_p est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (car l'une des conclusions du théorème 7.7 est que $y \mapsto \int \mathrm{H}(x,y)d\lambda(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int \mathrm{H}(x,y)d\lambda(y) = \int |y|^{p-1}1_{[0,|f(x)|[}(y)d\lambda(y) = \int_0^{|f(x)|}|y|^{p-1}dy = \frac{1}{p}|f(x)|^p.$$

L'égalité (7.15) donne alors :

$$\int g_p d\lambda = \frac{1}{p}\int |f|^p d\lambda. \tag{7.16}$$

Si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, on remarque d'abord que g_p prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car

$$\lambda(\mathrm{A}_y) \le \frac{1}{|y|^p}\int |f|^p d\lambda < \infty \text{ pour tout } y > 0.$$

La fonction g_p est donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et (7.16) donne alors que $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Réciproquement, si $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, (7.16) donne que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On a donc bien montré :

$$g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda).$$

Exercice 7.8 (À propos de Fubini) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de la tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue et on note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$.
Soit, pour $n \ge 1$, $\mathrm{I}_n = [1-1/n, 1-1/(n+1)[$. On pose $\varphi_n = n(n+1)1_{\mathrm{I}_n}$ et $f(x,y) = \sum_{n\ge1}(\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$.

1. Montrer que $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et mesurable (c'est-à-dire borélienne).

Corrigé – *La fonction f est bien définie pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ car si $(x,y) \in [0,1]^2$ la somme définissant $f(x,y)$ n'a, au plus, qu'un seul terme non nul ($\varphi_n(y)$ ne peut être non nul que pour une seule valeur de n).*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $x \mapsto (\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x))$ est borélienne et la fonction φ_n est borélienne. On en déduit que la fonction $(x,y) \mapsto (\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$ est aussi borélienne (en appliquant, par exemple, la proposition 7.11).

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f_n (sur $\mathbb{R}^2$) par $f_n(x,y) = \sum_{p=1}^n(\varphi_p(x)-\varphi_{p+1}(x))\varphi_p(y)$. La fonction f_n est borélienne comme somme (finie) de fonctions boréliennes.

Finalement, la fonction f est donc borélienne car c'est une limite simple de fonctions boréliennes ($f(x,y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x,y)$).

2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$ et que, pour tout $y \in [0,1]$, $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$.

Corrigé – *Soit $x \in [0,1]$, pour étudier la fonction $f(x,\cdot)$ on distingue plusieurs cas.*

Si $x = 1$, $f(x,y) = 0$ pour tout y et donc $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 0$.

Si $x \in \mathrm{I}_1$, $f(x,y) = 2\varphi_1(y) = 41_{[0,1/2[}$, donc $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 2$.

Si $x \in \mathrm{I}_n$, $n \geq 2$, $f(x,y) = \varphi_n(x)\varphi_n(y) - \varphi_n(x)\varphi_{n-1}(y)$ donc $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 0$ car $\int_0^1 \varphi_p(y)dy = 0$ pour tout $p \geq 1$.

Soit maintenant $y \in [0,1]$, pour étudier la fonction $f(\cdot,y)$ on distingue deux cas.

Si $y = 1$, $f(x,y) = 0$ pour tout x et donc $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{G}(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = 0$.

Si $y \in \mathrm{I}_n$, $n \geq 1$, $f(x,y) = (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$ donc $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{G}(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = 0$ car $\int_0^1 \varphi_p(x)dx = 0$ pour tout $p \geq 1$.

3. Montrer que $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,dy$ et $\mathrm{G} : y \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,dx$ sont intégrables sur $[0,1]$. Calculer alors $\int_{[0,1]} \mathrm{F}(x)\,dx$ et $\int_{[0,1]} \mathrm{G}(y)\,dy$. Peut on appliquer à f le théorème de Fubini ?

Corrigé – *A la question précédente, on a vu que $\mathrm{F} = 21_{[0,1/2[}$, on a donc $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1$ et $\int_0^1 \mathrm{F}(x)dx = 1$. On a vu aussi que $\mathrm{G} = 0$ et donc $\mathrm{G} \in \mathcal{L}^1$ et $\int_0^1 \mathrm{G}(y)dy = 0$.*

Comme $\int_0^1 \mathrm{F}(x)dx \neq \int_0^1 \mathrm{G}(y)dy$, les conditions pour appliquer le théorème de Fubini ne peuvent pas être vérifiées. La condition non vérifiée est l'intégrabilité de $|f|$. On peut, par exemple, remarquer que $|f(x,y)| = n^2(n+1)^2$ sur I_n^2 et l'intégrale de $|f|$ sur I_n^2 est donc égale à 1, ce qui donne

$$\int_{[0,1]^2} |f(x,y)|dxdy \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}_n^2} |f(x,y)|dxdy = +\infty.$$

Exercice 7.9 (Intégrale de Dirichlet)

1. Vérifier que si $n \geq 1$,, $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt} dt) \sin x dx.$

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $\frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $[0,n]$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0,n], \mathcal{B}([0,n]), \lambda)$.*

Pour tout $x > 0$, on a $e^{x\cdot} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pour calculer $\int_0^\infty e^{-xt}dt$, on remarque que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^p e^{-xt}dt = [\frac{-e^{-xt}}{x}]_0^p = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xp}}{x}$. Quand $p \to \infty$, on en déduit, avec le théorème de convergence monotone, que $\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$. On obtient bien :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt} dt) \sin x dx.$$

2. Calculer $\mathrm{F}_n(t) = \displaystyle\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ $(t \geq 0)$.

Corrigé – *Pour $t = 0$, on a $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \int_0^n \sin x dx = 1 - \cos n$. On a donc $\mathrm{F}_n(0) = 1 - \cos n$.*

Soit maintenant $t > 0$. Comme les fonctions $x \mapsto e^{-xt}$ et $x \mapsto \sin x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut calculer $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^n e^{-xt} \sin x dx &= -\int_0^n t e^{-xt} \cos x dx - [e^{-xt} \cos x]_0^n \\ &= -\int_0^n t^2 e^{-xt} \sin x dx - [t e^{-xt} \sin x]_0^n - [e^{-xt} \cos x]_0^n.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(t^2+1)\int_0^n e^{-xt}\sin x dx = 1 - te^{-nt}\sin n - e^{-nt}\cos n.$$

et donc :

$$\mathrm{F}_n(t) = \int_0^n e^{-xt}\sin x dx = \frac{1 - te^{-nt}\sin n - e^{-nt}\cos n}{t^2+1}.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \mathrm{F}_n(t)dt$. ($\mathrm{F}_n$ est définie à la question précédente.)

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.*

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, $te^{-nt} \leq te^{-t} \leq 1/e$. On en déduit :

$$|\mathrm{F}_n(t)| \leq (2+\frac{1}{e})\frac{1}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}+ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(en fait, on a même $0 \leq \mathrm{F}_n(t) \leq \frac{1}{t^2+1}$.) Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}_+$, ceci donne $\mathrm{F}_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin comme $\mathrm{F}_n(t) \to \frac{1}{t^2+1}$ quand $n \to +\infty$, pour tout $t > 0$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne :

$$\int_0^\infty \mathrm{F}_n(t)dt \to \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{2}, \text{ quand } n \to +\infty.$$

4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$\mathrm{H}(x,t) = e^{-xt}\sin x 1_{[0,n]}(x)1_{[0,\infty]}(t).$$

La fonction H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et elle appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ car, par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int |\mathrm{H}(x,t)|d\lambda_2(x,t) \leq \int_0^n |\sin x|(\int_0^\infty e^{-xt}dt)dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x}dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ est continue que $[0,n]$ en posant $\frac{|\sin x|}{x} = 1$ pour $x = 0$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0,n], \mathcal{B}([0,n]), \lambda)$.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la fonction H, il donne, avec la première question :

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n(\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x dx &= \int_0^\infty(\int_0^n e^{-xt}\sin x dx)dt \\ &= \int_0^\infty \mathrm{F}_n(t)dt.\end{aligned}$$

La question 3 donne alors $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \mathrm{F}_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$.

7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$

Exercice 7.10 (Propriétés élémentaires de λ_N) Soit $\mathrm{N} \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

1. Soit $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\prod_{i=1}^\mathrm{N} \mathrm{A}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $\lambda_\mathrm{N}(\prod_{i=1}^\mathrm{N} \mathrm{A}_i) = \prod_{i=1}^\mathrm{N} \lambda(\mathrm{A}_i)$.

Corrigé – *On va démontrer cette question en supposant tout d'abord que $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i. Le cas général s'obtient alors en utilisant $A_i \cap [-p, p]$ au lieu de A_i et en faisant ensuite tendre p vers l'infini. On obtient bien la propriété voulue (en convenant que $0 \times \infty = 0$). Cette méthode est décrite dans la remarque 7.5.*

On démontre donc, par récurrence sur N, la propriété suivante :

$$\begin{array}{l} A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_i) < \infty \text{ pour tout } i \Rightarrow \\ \prod_{i=1}^{N} A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(A_i). \end{array} \tag{7.17}$$

La propriété (7.17) est vraie pour $N = 2$. En effet, on sait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.2) et que $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ (définition 7.15). On a donc bien (avec la définition d'une mesure produit, théorème 7.3) :

$$\begin{array}{l} A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_1) < \infty,\ \lambda(A_2) < \infty \\ \Rightarrow A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ et } \lambda_2(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2). \end{array}$$

On suppose maintenant que la propriété (7.17) est vraie pour un certain $N \geq 2$, et on la démontre pour $N + 1$.

Soit donc $A_1, \ldots, A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(A_i) < \infty$ pour tout i.
Par (7.17), on a $\prod_{i=1}^{N} A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(A_i)$. On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition 7.2) et que $\lambda_{N+1} = \lambda_N \otimes \lambda$ (définition 7.15).
On en déduit que $\prod_{i=1}^{N+1} A_i = (\prod_{i=1}^{N} A_i) \times A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ et

$$\lambda_{N+1}(\prod_{i=1}^{N+1} A_i) = \lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i)\lambda(A_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N+1} \lambda(A_i).$$

ce qui donne bien (7.17) avec $N + 1$ au lieu de N et termine donc la démonstration par récurrence.

2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]\alpha_i, \beta_i[).$$

Corrigé – *Cette question est une conséquence immédiate de la précédente en prenant $A_i =]\alpha_i, \beta_i[$.*

3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.

Corrigé – *Comme K est compact, il est borné. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $K \subset \prod_{i=1}^{N}]-a, a[$. On en déduit que $\lambda_N(K) \leq \lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]-a, a[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]-a, a[) = (2a)^N < \infty$.*

4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.

Corrigé – *Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\prod_{i=1}^{N}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset O$. On a donc $\lambda_N(O) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = (2\varepsilon)^N > 0$.*

5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Corrigé – *Soit $O = \{f \neq g\} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ f(x) \neq g(x)\}$. Comme f et g sont continues, O est ouvert. Comme $f = g$ p.p., on a nécessairement $\lambda_N(O) = 0$. Enfin, la question précédente donne alors que $O = \emptyset$ et donc que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.*

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Corrigé – *Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme f est continue, on a f mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne, on dit aussi que f est borélienne). Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f = 0$ sur K^c avec $K = \prod_{i=1}^{N} [-a, a]$. Enfin, f est bornée, il existe donc M t.q. $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On en déduit que $\int |f| d\lambda_N \leq M(2a)^N < \infty$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.*

Exercice 7.11 (Régularité de λ_N) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Corrigé – *On reprend ici la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.43).*

On appelle T *l'ensemble des* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q. pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* O *ouvert et* F *fermé vérifiant* $F \subset A \subset O$ *et* $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. *On va montrer que* T *est une tribu contenant* $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[, -\infty < a_i < b_i < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. *Comme* $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *(voir l'exercice 2.7, il est même démontré qu'on peut, dans la définition de* $\mathcal{C}$, *se limiter au cas où les* a_i *et* b_i *sont dans* $\mathbb{Q}$*), ceci donnera* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On démontre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. *Soit* $-\infty < a_i < b_i < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, N\}$ *et* $A = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On veut montrer qu'il existe* O *ouvert et* F *fermé t.q.* $F \subset A \subset O$ *et* $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $(2/n_0) < b_i - a_i$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, N\}$. *Pour* $n \geq n_0$, *on pose* $F_n = \prod_{i=1}^N [a_i + (1/n), b_i - (1/n)]$ *et* $O = A$. *On a bien* F_n *fermé,* O *ouvert et* $F_n \subset A \subset O$. *On remarque ensuite que* $O \setminus F_n \subset C_n$ *avec :*

$$C_n = \bigcup_{q=1}^N C_{n,q}, \;\; C_{n,q} = \prod_{i=1}^N I_{i,q}^{(n)},$$
$$I_{i,q}^{(n)} =]a_i, b_i[\text{ si } i \neq q, \; I_{q,q}^{(n)} =]a_q, a_q + \frac{1}{n}[\cup]b_q - \frac{1}{n}, b_q[.$$

Soit $q \in \{1, \ldots, N\}$. *On a* $C_{n+1,q} \subset C_{n,q}$ *(pour tout* $n \geq n_0$*),* $\bigcap_{n \geq n_0} C_{n,q} = \emptyset$ *et, comme* m *est finie sur les compacts,*

$$m(C_{n,q}) \leq m(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]) < \infty.$$

On peut donc utiliser la propriété de continuité décroissante d'une mesure. On obtient $m(C_{n,q}) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *On a alors aussi* $m(C_n) \leq \sum_{q=1}^N m(C_{n,q}) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Il existe donc* n *t.q.* $m(C_n) < \varepsilon$. *On prenant* $F = F_n$, *on a bien alors* O *ouvert,* F *fermé et* $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$, *ce qui montre que* $A \in T$ *et donc que* $\mathcal{C} \subset T$.

On montre maintenant que T *est une tribu. On remarque tout d'abord que* $\emptyset \in T$ *(il suffit de prendre* $F = O = \emptyset$*) et que* T *est stable par passage au complémentaire (car, si* $F \subset A \subset O$, *on a* $O^c \subset A^c \subset F^c$ *et* $F^c \setminus O^c = O \setminus F$*). Il reste à montrer que* T *est stable par union dénombrable.*

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ *et* $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. *On veut montrer que* $A \in T$. *On va commencer par traiter le cas (simple) où* $m(A) < \infty$ *puis le cas (plus difficile) où* $m(A) = \infty$.

Premier cas. *On suppose que* $m(A) < \infty$. *La démonstration est ici identique à celle faite pour* $N = 1$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* O_n *ouvert et* F_n *fermé t.q.* $F_n \subset A_n \subset O_n$ *et* $m(O_n \setminus F_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. *On pose* $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ *et* $\tilde{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. *On a* $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \leq 2\varepsilon$, *car* $(O \setminus \tilde{F}) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \setminus F_n)$, *et* O *ouvert mais* $\tilde{F}$ *n'est pas nécessairement fermé...*

Cependant, puisque $m(A) < \infty$, *on a aussi* $m(\tilde{F}) < \infty$. *Par continuité croissante de* m *on a* $m(\bigcup_{p=0}^n F_n) \to m(\tilde{F})$, *quand* $n \to \infty$, *d'où (puisque* $m(\tilde{F}) < \infty$*)* $m(\tilde{F}) - m(\bigcup_{p=0}^n F_n) \to 0$. *On prend alors* $F = \bigcup_{p=0}^n F_n$ *avec* n *assez grand pour que* $m(\tilde{F}) - m(F) \leq \varepsilon$. *On a bien* $F \subset A \subset O$, O *ouvert,* F *fermé et* $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$. *Ceci prouve que* $A \in T$.

Deuxième cas. *On suppose maintenant que* $m(A) = \infty$ *(et le raisonnement précédent n'est plus correct si* $m(\tilde{F}) = \infty$*). On raisonne en trois étapes, en adaptant la démonstration faite pour* $N = 1$ *:*

(a) Soit $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$. On remarque d'abord que $A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$F_k = F \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\subset O_k$$
$$= O \cap \prod_{i=1}^N]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[.$$

On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup D_k$, avec :

$$D_k = \bigcup_{q=1}^N D_{k,q}, \;\; D_{k,q} = \prod_{i=1}^N J_{i,q}^{(k)},$$
$$J_{i,q}^{(k)} =]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[\text{ si } i \neq p,$$
$$J_{q,q}^{(k)} =]p_q - \frac{1}{k}, p_q[\cup]p_q + 1 - \frac{1}{k}, p_q + 1[.$$

En utilisant la continuité décroissante de m et le fait que m est finie sur les compacts (ce qui donne $m(D_k) \leq m(\prod_{i=1}^N [p_i - 1, p_i + 1]) < \infty$), on démontre (comme pour les C_n précédemment) que $m(D_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $m(D_k) \leq \varepsilon$ et donc $m(O_k \setminus F_k) \leq m(O \setminus F) + m(D_k) \leq 2\varepsilon$. Ce qui donne bien que $A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$.

(b) Soit $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$. Comme $m(A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[) < \infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[)$. Il donne que $A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\in T$ pour tout $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$.

(c) On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$, il existe un ouvert O_p et un fermé F_p t.q. $F_p \subset A \cap \prod_{i=1}^N [p_i, p_i + 1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus F_p) \leq \varepsilon/(2^{|p|})$, en posant $|p| = \sum_{i=1}^N |p_i|$. On prend $O = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}^N} O_p$ et $F = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}^N} F_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \leq 3^N \varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ t.q. $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}^N$) quand $n \to +\infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$ t.q. $x \in \prod_{i=1}^N]p_i - 1, p_i + 1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in \prod_{i=1}^N]p_i - 1, p_i + 1[$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $x_n \in \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^N} F_q$ et que $F_q \subset \prod_{i=1}^N [q_i, q_i + 1[$ pour tout $q = (q_1, \ldots, q_N)^t \in \mathbb{Z}^N$, on a donc $x_n \in \bigcup_{q \in E_p} F_q$, pour tout $n \geq n_0$, où $E_q = \{q = (q_1, \ldots, q_N)^t \in \mathbb{Z}^N \,;\, q_i \in \{p_i, p_i - 1\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Comme E_q est de cardinal fini et que F_q est fermé pour tout q, l'ensemble $\bigcup_{q \in E_p} F_q$ est donc aussi fermé, on en déduit que $x \in \bigcup_{q \in E_p} F_q \subset F$ et donc que F est fermé.

Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Déduire de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O), \text{O ouvert t.q. } A \subset O\}$.

Corrigé – *Par monotonie de m on a $m(A) \leq m(O)$ si $A \subset O$, donc $m(A) \leq \inf\{m(O), \text{O ouvert t.q. } A \subset O\}$. Il reste donc à montrer que $m(A) \geq \inf\{m(O), \text{O ouvert t.q. } A \subset O\}$.*

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, il existe O ouvert et F fermé t.q $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On a donc aussi $m(O \setminus A) \leq \varepsilon$ et donc $m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \leq m(A) + \varepsilon$. Ceci montre bien que $\inf\{m(O), \text{O ouvert t.q. } A \subset O\} \leq m(A)$.

Exercice 7.12 (fonction de Carathéodory)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto f(x,s)$ est borélienne (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $s \mapsto f(x,s)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x,s) = f(x, \frac{i}{n})$ si $\frac{i}{n} \leq s < \frac{i+1}{n}$, $i \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $f_n^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que, pour tout $x, s \in \mathbb{R}$, $f_n(x,s) \to f(x,s)$ quand $n \to +\infty$. En déduire que f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7.13 (Fonction de Carathéodory et composition)
Soit $\mathrm{N}, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que la fonction a est borélienne de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. (Noter que ceci peut être faux si a était seulement borélienne par rapport à chacun de ses arguments, un exemple est donné dans l'exercice 7.4.)
2. Soit v est une fonction borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est alors borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^q$.
3. Soient v_1, v_2 deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $v_1 = v_2$ p.p.. Montrer que les fonctions $x \mapsto a(x, v_1(x)$ et $x \mapsto a(x, v_2(x)$ sont égales p.p. sur Ω.

Exercice 7.14 (Densité de C_c dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour la mesure de Lebesgue)
Montrer que l'espace $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ $(\mathrm{N} \geq 1)$ est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas $\mathrm{N} = 1$, théorème 5.20.]

Corrigé – *On reprend la démonstration du théorème 5.20, les modifications à apporter sont mineures. Le point essentiel est la régularité de λ_N (proposition 7.17).*

Etape 1. *On suppose ici que $f = 1_\mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) < +\infty$.*

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ_N est une mesure régulière (proposition 7.17), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{F}_n = \mathrm{F} \cap \mathrm{B}_n$, ou B_n est la boule fermée de centre 0 et de rayon n. Comme dans le cas $\mathrm{N} = 1$, Il existe n_0 tel que $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{F}_{n_0}) \leq \varepsilon$. On pose $\mathrm{K} = \mathrm{F}_{n_0}$ et on obtient donc $\mathrm{K} \subset \mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, ce qui donne

$$\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{O} \setminus \mathrm{K}) \leq \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) + \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{K}) \leq 2\varepsilon.$$

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $\mathrm{K} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{O} \setminus \mathrm{K}) \leq 2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$.

On pose

$$d = d(\mathrm{K}, \mathrm{O}^c) = \inf\{d(x,y), x \in \mathrm{K}, y \in \mathrm{O}^c\}.$$

On montre, comme dans le cas $\mathrm{N} = 1$ que $d > 0$ et on définit alors la fonction φ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}, \varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x, \mathrm{K}))^+ \text{ avec } d(x, \mathrm{K}) = \inf\{d(x,y), y \in \mathrm{K}\}.$$

La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x, \mathrm{K})$ est continue (et même lipschitzienne car $|d(x,\mathrm{K}) - d(y,\mathrm{K})| \leq |x - y|$). Elle est à support compact car il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}_\mathrm{A}$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur $\mathrm{B}^c_{\mathrm{A}+d}$. On a donc $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \leq \varphi \leq 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $\mathrm{K} \cup \mathrm{O}^c$ et $0 \leq |f - \varphi| \leq 1$, ce qui donne

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{O} \setminus \mathrm{K}) \leq 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Les étapes suivantes (étapes 2, 3 et 4) sont identiques à celles du cas $\mathrm{N} = 1$ en remplaçant $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ et λ par λ_N.

Exercice 7.15 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1 pour une mesure finie sur les compacts) Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(\mathrm{K}) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.17) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.9.]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 7.16 (Invariance par translation de λ_N) Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   Corrigé – *On pose* $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

   Comme φ est bijective, il est facile de montrer que T *est une tribu. En effet, il suffit de remarquer que* $\varphi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, $\varphi(A^c) = (\varphi(A))^c$ *et* $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

   Comme φ est continue, φ transforme les compacts en compacts. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$, on a donc $\mathcal{C} \subset$ T (on rappelle que les compacts sont des boréliens). Comme l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (noter que tout ouvert peut s'écrire comme une réunion dénombrable de compacts), on a donc $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *ce qui donne bien* $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : la proposition 2.48 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ. On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit.]

Corrigé – *On procède par récurrence sur* N. *La proposition 2.48 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire pour* $N = 1$ *en posant* $\lambda_1 = \lambda$. *On suppose maintenant que le résultat est vrai pour* $N - 1$ *avec un certain* $N \geq 2$*, c'est-à-dire que* $\lambda_{N-1}(\psi(B)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$ *et* ψ *définie par* $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$ *pour tout* $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$*, et on démontre le résultat pour* N.

Soit donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ *et* φ *définie par*

$$\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t \text{ pour tout } x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N.$$

Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*, on pose* $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$. *On montre tout d'abord que* m *est une mesure. On a bien* $m(\emptyset) = 0$ *car* $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. *Puis, soit* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *avec* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$. *On a*

$$\varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n) \text{ avec } \varphi(A_n) \cap \varphi(A_m) = \emptyset \text{ si } n \neq m \text{ (car } \varphi \text{ est bijective).}$$

Donc, $\lambda_N(\varphi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_N(\varphi(A_n))$ *et donc* $m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$. *Ce qui prouve la* σ*-additivité de* m *et donc le fait que* m *est une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant que $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ *pour tout* $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ *et pour tout* $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ *et* $\lambda(A_2) < \infty$. *Soit donc* $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ *et* $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ *et* $\lambda(A_2) < \infty$. *On a*

$$m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)).$$

On pose $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$*, pour tout* $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$*, et* $\tau(z) = \alpha_N z + \beta_N$*, pour tout* $z \in \mathbb{R}$. *On a donc* $\varphi(A_1 \times A_2) = \psi(A_1) \times \tau(A_2)$. *L'hypothèse de récurrence et la proposition 2.48 donne que* $\lambda_{N-1}(\psi(A_1)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ *et que* $\lambda(\tau(A_2)) = \alpha_N \lambda(A_2) < \infty$. *Comme* $\lambda_N = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$ *(car c'est la définition de* λ_N*) on en déduit :*

$$\lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(\psi(A_1))\lambda(\tau(A_2)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) \alpha_N \lambda(A_2),$$

et donc :

$$m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2).$$

On peut maintenant conclure. Comme m *est une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*vérifiant* $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ *pour tout* $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ *et pour tout* $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ *et* $\lambda(A_2) < \infty$*, la partie unicité du théorème 7.3 donne que* $m = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$*, c'est-à-dire* $m = \lambda_N$. *On a donc bien* $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 7.17 (Changement de variable simple) Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

[Utiliser l'exercice 7.16.]

Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $f = 1_A$. *On a alors* $f \circ \varphi = 1_B$ *avec* $B = \varphi^{-1}(A)$. *En appliquant l'exercice 7.16à l'inverse de* φ*, noté* ψ*, on a donc* $\lambda_N(B) = \lambda_N(\psi(A)) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(A)$*, c'est-à-dire :*

$$\int f d\lambda_N = \lambda_N(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)\lambda_N(B) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, avec $f_i = 1_{\mathrm{A}_i}$. On a alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int f d\lambda_\mathrm{N} &= \sum_{i=1}^n a_i \int f_i d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \sum_{i=1}^n a_i \int f_i \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N} \\ &= (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int \sum_{i=1}^n a_i f_i \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N}.\end{aligned}$$

(Ce qui est, bien sûr, aussi vrai si $f = 0$.)

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_\mathrm{N} = \prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_\mathrm{N}$.

   Corrigé – *Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $f_n \circ \varphi \uparrow f \circ \varphi$ quand $n \to +\infty$ (ce qui donne, en particulier que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$). La question précédente donne :*

   $$\int f_n d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int f_n \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N}.$$

   La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors, quand $n \to +\infty$:

   $$\int f d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N}.$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_\mathrm{N} = \prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_\mathrm{N}$.

   Corrigé – *Comme f est mesurable de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{R}$ et φ est mesurable de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ ($\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne), on a bien $f \circ \varphi$ mesurable de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

   En appliquant la question précédente à la fonction $|f|$ on obtient que $\int |f| \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N} = \int |f \circ \varphi| d\lambda_\mathrm{N} < \infty$ car $\int |f| d\lambda_\mathrm{N} < \infty$. On a donc $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$.

   Enfin, en remarquant que $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ et $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$ et en utilisant la question précédente avec f^+ et f^-, on obtient :

   $$\int f^+ d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int f^+ \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N},$$
   $$\int f^- d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int f^- \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N}.$$

   En faisant la différence, on en déduit :

   $$\int f d\lambda_\mathrm{N} = (\prod_{i=1}^\mathrm{N} |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_\mathrm{N}.$$

Exercice 7.18 (Primitives de fonctions L^p)
Soit $p \in [1, \infty[$. On note $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p_\mathbb{R}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Soit $f, g \in \mathrm{L}^p$. On définit F et G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par, pour $x \in [0,1]$,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} f d\lambda), \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^x g(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} g d\lambda).$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $|\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|\mathrm{G}(y) - \mathrm{G}(x)| \le \mathrm{C}|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0,1]$, $x < y$.

Corrigé – *On note* $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. F *(et* G*) sont bien définies partout sur* $[0,1]$ *car* $f1_{[0,x]} \in \mathrm{L}^1$ *(et* $g1_{[0,x]} \in \mathrm{L}^1$*) pour tout* $x \in [0,1]$ *(on confond, comme d'habitude, un élément de* L^1 *ou* L^p *avec l'un de ses représentants).*

Soit $x, y \in [0,1]$, $x < y$. *En utilisant l'inégalité de Hölder avec* f *et* $1_{[x,y]}$, *on obtient, avec* $q = p/(p-1)$ *:*

$$|\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)| = |\int f 1_{[x,y]} d\lambda| \leq \|f\|_p \|1_{[x,y]}\|_q \leq \|f\|_p |y-x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{7.18}$$

On a de même :

$$|\mathrm{G}(y) - \mathrm{G}(x)| \leq \|g\|_p |y-x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{7.19}$$

Ce qui donne les inégalités demandées en prenant $\mathrm{C} = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$.

Les inégalités (7.18) et (7.19) donnent aussi la continuité (uniforme) de F *et* G *lorsque* $p > 1$ *(et donc* $1-(1/p) > 0$*), mais pas pour* $p = 1$.

Pour $p = 1$, *on montre la continuité de* F *(et de* G *par un raisonnement semblable) en remarquant que, pour* $x, y \in [0,1]$, $x < y$ *:*

$$|\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)| \leq \int |f| 1_{[x,y]} d\lambda \to 0, \text{ quand } \lambda([x,y]) = y - x \to 0,$$

ceci découle de l'exercice 4.16 et donne même la continuité uniforme de F *comme cela a été démontré dans l'exercice 5.5.*

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(\mathrm{F}(x), \mathrm{G}(x)) \in \mathrm{A}_{n,k} \times \mathrm{B}_{n,k}$, où $\mathrm{A}_{n,k}$ et $\mathrm{B}_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1.]

   Corrigé – *On pose toujours* $\mathrm{C} = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$. *Pour* $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, *on a, avec* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 0$ *:*

   $$|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\frac{k}{n})| \leq \mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}},\ |\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(\frac{k}{n})| \leq \mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}.$$

   On en déduit que $(\mathrm{F}(x), \mathrm{G}(x)) \in \mathrm{A}_{n,k} \times \mathrm{B}_{n,k}$ *avec :*

   $$\mathrm{A}_{n,k} = [\mathrm{F}(\frac{k}{n}) - \mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, \mathrm{F}(\frac{k}{n}) + \mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}],$$
   $$\mathrm{B}_{n,k} = [\mathrm{G}(\frac{k}{n}) - \mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, \mathrm{G}(\frac{k}{n}) + \mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}].$$

   On a bien $\lambda(\mathrm{A}_{n,k}) = \lambda(\mathrm{B}_{n,k}) = 2\mathrm{C}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $\mathrm{E} = \{(\mathrm{F}(x), \mathrm{G}(x));\ x \in [0,1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $\mathrm{A}_{n,k}$ et $\mathrm{B}_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \to +\infty$.]

   Corrigé – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

   $$\mathrm{H}_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_{n,k} \times \mathrm{B}_{n,k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

   La question précédente donne $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}_n$. *On en déduit que*

   $$\mathrm{E} \subset \mathrm{H} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

   On utilise maintenant l'hypothèse $p > 2$ *pour montrer que* $\lambda_2(\mathrm{H}) = 0$ *(et donc que* E *est négligeable). En effet, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

   $$\lambda_2(\mathrm{H}) \leq \lambda_2(\mathrm{H}_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2(\mathrm{A}_{n,k} \times \mathrm{B}_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\mathrm{A}_{n,k})\lambda(\mathrm{B}_{n,k}) \leq n 4\mathrm{C}^2 \frac{1}{n^{2/q}} = 4\mathrm{C}^2 n^{1-\frac{2}{q}},$$

avec $\mathrm{C} = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$ *et* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. *Comme* $p > 2$, *on a* $q < 2$ *et donc* $n^{1-\frac{2}{q}} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Ceci donne que* $\lambda_2(\mathrm{H}_n) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc que* $\lambda_2(\mathrm{H}) = 0$.

7.7.4 Convolution

Exercice 7.19 (Propriétés élémentaires de la convolution) Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$.

1. Montrer que $f * g = g * f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variable simples (propositions 7.20 et 7.21).]

Corrigé – *On confond, comme d'habitude* f *(et* g*) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de* $f * g$ *(qui est définie comme un élément de* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$*) la fonction définie par*

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_\mathrm{N}(y) \text{ si } f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}).$$

On sait que cette fonction est définie p.p. car $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. *On choisit de manière analogue comme représentant de* $g * f$ *la fonction définie par*

$$g * f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda_\mathrm{N}(y) \text{ si } g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$ *un point pour lequel* $f * g$ *est définie. On a donc* $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. *On pose* $h(\cdot) = f(\cdot)g(x-\cdot)$. *On utilise alors la proposition 7.21 (changement de variable simple) avec* φ *définie par* $\varphi(y) = -y + x$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. *Elle donne* $h \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ *et :*

$$\int h(\varphi(y))d\lambda_\mathrm{N}(y) = \int h(y)d\lambda_\mathrm{N}(y).$$

Comme $h(\varphi(y)) = f(\varphi(y))g(x-\varphi(y)) = f(x-y)g(y)$, *on en déduit que* $g*f$ *est définie au point* x *et que* $g*f(x) = f*g(x)$. *Ceci montre bien que* $f * g = g * f$ *p.p..*

2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f * g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $\mathrm{B}(0, \alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0, a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0, b)^c$. Montrer que $f * g = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0, a+b)^c$.]

Corrigé – *Comme pour la question précédente, on confond* f *(et* g*) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de* $f * g$ *la fonction définie par* $f * g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_\mathrm{N}(y)$ *si* $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $f = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0, a)^c$ *et* $g = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0, b)^c$. *(*$\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *est muni d'une norme, notée* $\|\cdot\|$.*) Soit* $x \in \mathrm{B}(0, a+b)^c$. *On va montrer que* $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ *p.p. (et donc que* $f * g(x) = 0$, *noter aussi que* $f(\cdot)g(x-\cdot)$ *est mesurable car* f *et* g *le sont).*

Comme $f = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0, a)^c$, *on a aussi* $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0, a)^c$. *Comme* $g = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0, b)^c$, *on a* $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(x, b)^c$ *(car* $y \in \mathrm{B}(x, b)^c \iff (x-y) \in \mathrm{B}(0, b)^c$*). On a donc :*

$$f(\cdot)g(x-\cdot) = 0 \text{ p.p. sur } \mathrm{B}(0, a)^c \cup \mathrm{B}(x, b)^c. \tag{7.20}$$

Or $\mathrm{B}(0, a) \cap \mathrm{B}(x, b) = \emptyset$ *car* $y \in \mathrm{B}(0, a) \cap \mathrm{B}(x, b)$ *implique* $\|y\| < a$ *et* $\|x-y\| < b$ *et donc* $\|x\| = \|x-y+y\| < a+b$, *ce qui contredit* $x \in \mathrm{B}(0, a+b)^c$. *On a donc* $\mathrm{B}(0, a)^c \cup \mathrm{B}(x, b)^c = (\mathrm{B}(0, a) \cap \mathrm{B}(x, b))^c = \mathbb{R}^\mathrm{N}$ *et (7.20) donne alors* $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ *p.p. et donc* $f * g$ *est définie au point* x *et* $f * g(x) = 0$.

On a bien montré que $f * g = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0, a+b)^c$ *et donc que* $f * g$ *est à support compact.*

Exercice 7.20 (Convolution $\mathrm{L}^p - \mathrm{C}^\infty_c$)
Soit $1 \le p \le \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathcal{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathrm{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) et $\rho \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $\mathrm{N} = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x-\cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f * \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x-\cdot)d\lambda_N.$$

Corrigé – *On rappelle que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ et $f 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. On a donc $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (pour tout $1 \le p \le \infty$) car si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, on a bien $f \in \mathcal{M}$ et, grâce à l'inégalité de Hölder, $f 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (et $\|f 1_K\|_1 \le \|f\|_p \|1_K\|_q < \infty$,avec $q = p/(p-1)$).*

On suppose donc dans la suite de ce corrigé que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ car cette hypothèse est plus générale que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Pour simplifier la rédaction, on se limite au cas $N = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot)\rho(x-\cdot)$ est mesurable (c'est-à-dire ici borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu de Borel) car f est mesurable et $\rho(x-\cdot)$ est mesurable (car continue). Comme ρ est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a,a]^c$. On a donc $\rho(x-\cdot) = 0$ sur K_x^c avec $K_x = [x-a, x+a]$, ce qui permet de montrer que $f(\cdot)\rho(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $|f(\cdot)\rho(x-\cdot)| \le |f 1_{K_x}| \|\rho\|_u$, avec $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|, z \in \mathbb{R}\} < \infty$, et $f 1_{K_x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

La fonction $f * \rho$ est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Corrigé – *Comme dans la question précédente, on va utiliser $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a,a]^c$ et $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|, z \in \mathbb{R}\}$ (on va aussi utiliser les normes des dérivées de ρ, $\|\rho^{(k)}\|_u$). On raisonne maintenant en trois étapes.*

Etape 1. *On commence par montrer que $f * \rho$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La continuité de $f * \rho$ en x_0 découle du théorème de continuité sous le signe $\int$, théorème 4.52. En effet, on pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$F(x,y) = f(y)\rho(x-y).$$

On a $F(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f * \rho(x) = \int F(x,\cdot)d\lambda$. La fonction F vérifie alors les 2 hypothèses suivantes :

(a) $x \mapsto F(x,y)$ est continue en x_0, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

(b) $|F(x,y)| \le G(y)$ pour tout $x \in]x_0-1, x_0+1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $G = |f 1_K| \|\rho\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.52 donne bien la continuité de $f * \rho$ en x_0.

Etape 2. *On montre maintenant que $f * \rho$ est dérivable en tout point et que $(f * \rho)' = f * \rho'$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour montrer la dérivabilité de $f * \rho$ en x_0, on utilise le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$, théorème 4.53. On reprend la même fonction F que dans l'étape 1, elle vérifie les 2 hypothèses suivantes :*

(a) $x \mapsto F(x,y)$ est dérivable pour tout $x \in]x_0-1, x_0+1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

(b) $|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)| = |f(y)\rho'(x-y)| \le H(y)$ pour tout $x \in]x_0-1, x_0+1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $H = |f 1_K| \|\rho'\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $H \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.53 donne bien la dérivabilité de $f * \rho$ en x_0 et le fait que $(f * \rho)'(x_0) = f * \rho'(x_0)$.

Etape 3. *On montre enfin que $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour cela, on va montrer, par récurrence sur k, que $f * \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f * \rho)^{(k)} = f * \rho^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ce qui donne bien $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).*

L'étape 1 montre que $f * \rho \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (et on a bien $(f * \rho)^{(0)} = f * \rho = f * \rho^{(0)}$). On suppose maintenant que $f * \rho \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f * \rho)^{(k)} = f * \rho^{(k)}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. L'étape 2 appliquée à $\rho^{(k)}$ (qui appartient aussi à $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) au lieu de ρ donne alors que $f * \rho^{(k)}$ est dérivable et que sa dérivée est $f * \rho^{(k+1)}$. L'étape 1 appliquée à $\rho^{(k+1)}$ donne que $f * \rho^{(k+1)} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a donc bien finalement montré que $f * \rho \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(f * \rho)^{(k+1)} = f * \rho^{(k+1)}$, ce qui termine la récurrence.

3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est-à-dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c, montrer que $f * \rho$ est aussi à support compact.

Corrigé – *Comme f et ρ sont à support compact, on démontre que $f * \rho$ est aussi à support compact, comme cela a été fait dans l'exercice 7.19. Plus précisément, si $f = 0$ p.p. sur $\mathrm{B}(0,a)^c$ et $\rho = 0$ sur $\mathrm{B}(o,b)^c$, on a $f * \rho = 0$ sur $\mathrm{B}(0,a+b)^c$ (voir l'exercice 7.19).*

Exercice 7.21 (Inégalité de Young) Soient $1 < p < +\infty, f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$. Montrer que $f * g$ est définie p.p., que $f * g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et que $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$. [Écrire

$$\int \Big(\int |f(x-y)g(y)| dy \Big)^p dx = \int \Big(\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| dy \Big)^p dx,$$

avec $q = p/(p-1)$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – *Pour simplifier les notations, on ne traite ici que le cas $\mathrm{N} = 1$. On suppose aussi que f et g ne sont pas nulles p.p. (sinon, il est immédiat que $f * g$ est définie partout et $f * g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).*

On confond f et g avec l'un de leurs représentants.

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{H}(x,y) = g(y)f(x-y)$. La première partie de la démonstration de la proposition sur la convolution (proposition 7.22) montre que H, et donc $|\mathrm{H}|$, est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On peut alors utiliser les deux premières conclusions du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) pour affirmer que $|g(\cdot)f(x-\cdot)| \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ définie par $\varphi(x) = \int |g(\cdot)f(x-\cdot)| d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par composition de fonctions mesurables, on a donc aussi $\varphi^p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{q}}$ et $|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{p}}|g(\cdot)|$ sont aussi mesurables. On peut alors utiliser l'inégalité de Hölder avec $q = p/(p-1)$. elle donne :

$$\begin{aligned}
(\varphi(x))^p &= \Big(\int |f(x-\cdot)|^{\frac{1}{q}} |f(x-\cdot)|^{\frac{1}{p}} |g(\cdot)| d\lambda \Big)^p \\
&\le \Big(\int |f(x-\cdot)| d\lambda \Big)^{\frac{p}{q}} \Big(\int |f(x-\cdot)| |g(\cdot)|^p d\lambda \Big) \qquad (7.21)\\
&\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \Big(\int |f(x-\cdot)| |g(\cdot)|^p d\lambda \Big).
\end{aligned}$$

Noter que (7.21) est vraie si $|f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $|f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dans ce dernier cas on obtient seulement $\varphi(x)^p \le \infty$. On a aussi utilisé la proposition 7.21 pour dire que $\int |f(x-\cdot)| d\lambda = \int |f| d\lambda = \|f\|_1$.

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec les fonctions $|f|$ et $|g|^p$. Il donne :

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x)^p d\lambda(x) &\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int \Big(\int |f(x-\cdot)| |g(\cdot)|^p d\lambda \Big) d\lambda(x) \\
&\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int \Big(\int |f(x-y)| |g(y)|^p d\lambda(x) \Big) d\lambda(y) \qquad (7.22)\\
&\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \|f\|_1 \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \|g\|_p^p.
\end{aligned}$$

Ceci donne que $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et, en particulier que $\varphi(x) < \infty$ p.p., c'est-à-dire $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ avec $\mathrm{A} = \{\varphi = \infty\}$ (noter que $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque $\varphi \in \mathcal{M}_+$). Pour tout $x \in \mathrm{A}^c$, on a donc $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut définir $g * f(x)$ par $g * f(x) = \int g(y)f(x-y) d\lambda(y)$.

La fonction $g * f$ est donc définie p.p.. On remarque maintenant qu'elle est égale p.p. à une fonction mesurable. En effet, les fonctions H^+ et H^- sont $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurables (d'après la première partie de la démonstration de la proposition 7.22, on rappelle que $\mathrm{H}(x,y) = g(y)f(x-y)$). Les deux premières conclusions du théorème 7.7) donnent alors $(g(\cdot)f(x-\cdot)^{\pm} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec φ_1 et φ_2 définies par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^+ d\lambda, \;\; \varphi_2(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^- d\lambda.$$

On pose alors $h = \varphi_1 - \varphi_2$ sur A^c et $h = 0$ sur A. On a bien que h est mesurable (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $h = g * f$ p.p..

On remarque enfin que $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ car $|h| \le \varphi$ p.p. et $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On en déduit bien que $g * f \in L^p(\mathbb{R})$ (avec la confusion habituelle entre $g * f$ et la classe de h dans $L^p(\mathbb{R})$).

Le fait que $\|g * f\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$ est conséquence immédiate de (7.22) puisque $g * f \le \varphi$ p.p..

Enfin, le raisonnement fait dans la première question de l'exercice (7.19) montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement $f(x-\cdot)g(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et que ces deux fonctions ont alors même intégrale. Ceci permet de montrer que $f * g$ est aussi définie p.p. et que $f * g = g * f$ p.p.

Exercice 7.22 (Itérations de convolution) Soient $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in L^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f^{*n} par :

$$f^{*1} = f \text{ et } f^{*n} = f^{*(n-1)} * f \text{ pour } n \ge 1.$$

Pour $\lambda \ge 0$, on pose : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|dt$.

1.(a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*n} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

(b) Montrer, par récurrence sur n, que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \le (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \ge 0$ et tout $n \ge 1$.

(c) En déduire que $\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \le e^{\alpha x}(g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \ge 0$ tout $n \ge 1$ et tout $x \ge 0$.

2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $h * f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Remarquer de même que $h * f^{*n} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h * f^{*n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.23 Soient μ et ν des mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, T)$. On rappelle que $\mu * \nu$ est défini par :

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+y)d\mu(x)d\nu(y).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure.
2. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité.
3. Montrer que si μ et ν sont des mesures de densités respectives f et g (par rapport à Lebesgue), alors $\mu * \nu$ est une mesure de densité $f * g$.

7.7.5 Changement de variable

Exercice 7.24 (Mesure de boules de $\mathbb{R}^2$)
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}) = \pi R^2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 7.25 (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ (on rappelle que $dx\,dy$ désigne $d\lambda_2(x,y)$).
   [On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]

   Corrigé – *Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} 1_{\mathbb{R}_+}(x) 1_{\mathbb{R}_+}(y)$. On a $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (noter que f est le produit de fonctions mesurables). On peut donc lui appliquer la formule (7.10) :*

   $$\int f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr \right) d\theta.$$

   On a donc :

   $$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr.$$

Puis, comme $\int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2})$ *et que, par le théorème de convergence monotone,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-r^2} r dr = \int_0^\infty e^{-r^2} r dr,$$

on en déduit $\int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}$ *et donc*

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx.$

Corrigé – *On applique le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 7.7) à la fonction* f *définie à la question précédente. Il donne :*

$$\int f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx,$$

et donc

$$\frac{\pi}{4} = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) e^{-x^2} dx = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

On en déduit que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7.26 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) On note $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$ la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ (*i.e.* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \mid |x| = 1\}$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, on pose $\widetilde{\mathrm{A}} = \{tx,\ t \in [0,1],\ x \in \mathrm{A}\}$. Montrer que si A est un borélien de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, alors $\widetilde{\mathrm{A}}$ est un borélien de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.
On définit alors, quand A est un borélien de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{N}\lambda_{\mathrm{N}}(\widetilde{\mathrm{A}})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$.
Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}} f(\rho\xi) d\sigma(\xi) \right) \rho^{\mathrm{N}-1} d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \to |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \mathrm{B}_1$ ou sur B_1, avec $\mathrm{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\ ;\ |x| \le 1\}$.

Corrigé – *Pour* $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+$, *on note* $\mathrm{B_R} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\ ;\ |x| \le \mathrm{R}\}$.

1. *On montre tout d'abord que* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *est un borélien de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *si* A *est un borélien de* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$. *Pour cela, on pose* $\mathrm{T} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1})\ ;\ \widetilde{\mathrm{A}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})\}$.

   On montre que T *est une tribu. En effet,* $\widetilde{\mathrm{A}} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *si* $\mathrm{A} = \emptyset$ *et donc* $\emptyset \in \mathrm{T}$. *Puis, on remarque que* T *est stable par complémentaire car, pour* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $\widetilde{\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1} \setminus \mathrm{A}} = \mathrm{B}_1 \setminus \widetilde{\mathrm{A}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, *ce qui montre que* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1} \setminus \mathrm{A} \in \mathrm{T}$. *Enfin, il est facile de voir que* T *est stable par union dénombrable car, pour* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$, *on a* $\widetilde{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathrm{A}_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *et donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$. *On a bien montré que* T *est une tribu.*

   Soit $\mathcal{C}$ *l'ensemble des fermés de* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$. *Si* $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$, *on voit que* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *En effet, si* $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1] \times \mathrm{A}$ *est t.q.* $t_n x_n \to y$ *dans* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, *on peut supposer, par compacité de* $[0,1]$ *et de* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, *après extraction d'une sous-suite encore notée* $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *que* $t_n \to t \in [0,1]$ *et* $x_n \to x \in \mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$ *quand* $n \to +\infty$. *On en déduit que* $y = tx \in \widetilde{\mathrm{A}}$, *ce qui prouve que* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *est fermé. Comme les fermés sont des boréliens, on a donc* $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$.

   Pour conclure, il suffit de remarquer que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ *(sur* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$*) est* $\mathcal{B}(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1})$. *On en déduit bien que* $\mathcal{B}(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}) = \mathrm{T}$.

2. *Il est facile de montrer que* σ *est une mesure. Il suffit en effet de remarquer que* $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$ *(et donc* $\sigma(\emptyset) = 0$*) et que, pour* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *t.q.* $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$ *si* $n \ne m$, *on a, avec* $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$, $\widetilde{\mathrm{A}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathrm{A}_n}$ *et* $\widetilde{\mathrm{A}_n} \cap \widetilde{\mathrm{A}_m} = \emptyset$ *si* $n \ne m$. *On déduit alors la* σ*-additivité de* σ *de la* σ*-additivité de* λ_{N}.

3. *On va montrer maintenant :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\,d\rho, \tag{7.23}$$

pour tout $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*. Cette démonstration est difficile (le reste de la démonstration sera plus facile). On raisonne en trois étapes.*

Etape 1. *Pour* $A \in \mathcal{B}(S^{N-1})$ *et pour* $0 \le r < R < \infty$*, on pose* $A_{r,R} = \{\rho\xi,\ \rho \in [r, R[,\ \xi \in A\}$*. Dans cette étape, on prend* $f = 1_E$ *avec* $E = A_{r,R}$ *et on montre alors que les deux membres de (7.23) sont bien définis et sont égaux.*

Pour montrer que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*, il suffit de remarquer que* $A_{r,R} = A_R \setminus A_r$ *avec*

$$A_a = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_a} t\widetilde{A} \text{ où } \mathbb{Q}_a = \{t \in \mathbb{Q}_+^*, t < a\} \text{ si } a > 0, \text{ et } A_0 = \emptyset.$$

Comme $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*, on a* $t\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $t > 0$ *(voir la proposition 7.20) et donc* $A_a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $a \ge 0$*. On en déduit que* $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*.*

On calcule maintenant $\lambda_N(A_{r,R})$ *(qui est le membre de gauche de (7.23)). D'après la proposition 7.21, on a* $\lambda_N(t\widetilde{A}) = t^N \lambda_N(\widetilde{A})$ *pour tout* $t > 0$*. la continuité croissante d'une mesure donne alors* $\lambda_N(A_a) = a^N \lambda_N(\widetilde{A})$ *pour tout* $a > 0$ *et donc :*

$$\lambda_N(A_{r,R}) = \lambda_N(A_R \setminus A_r) = \lambda_N(A_R) - \lambda_N(A_r) = (R^N - r^N)\lambda_N(\widetilde{A}) = \frac{R^N - r^N}{N}\sigma(A).$$

Soit $\rho > 0$*.*

- *Si* $\rho \notin [r, R[$*, on a* $f(r\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in S^{N-1}$*. On a donc*

$$f(\rho\cdot) = 1_\emptyset \in \mathcal{M}_+(S^{N-1}, \mathcal{B}(S^{N-1})) \text{ et } \int f(\rho\cdot)d\sigma = 0.$$

- *Si* $\rho \in [r, R[$*, on a* $f(r\xi) = 1$ *pour tout* $\xi \in A$ *et* $f(r\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in S^{N-1} \setminus A$*. On a donc*

$$f(\rho\cdot) = 1_A \in \mathcal{M}_+(S^{N-1}, \mathcal{B}(S^{N-1})) \text{ et } \int f(\rho\cdot)d\sigma = \sigma(A).$$

On en déduit que la fonction $\rho \mapsto \int f(\rho\cdot)d\sigma$ *est égale à* $\sigma(A)1_{[r,R[}$*, elle appartient donc à* $\mathcal{M}_+(R_+^*, \mathcal{B}(R_+^*), \lambda)$ *et on a :*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\,d\rho &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \sigma(A)1_{[r,R[}(\rho)\rho^{N-1}d\rho \\
&= \sigma(A)\int_r^R \rho^{N-1}d\rho \\
&= \sigma(A)\frac{R^N - r^N}{N}.
\end{aligned}$$

On a bien montré que les deux membres de (7.23) étaient bien définis et étaient égaux.

Etape 2. *On pose* $\mathcal{D} = \{A_{r,R},\ 0 \le r < R < \infty,\ A \in \mathcal{B}(S^{N-1})\}$*. On montre ici que* $\mathcal{D}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*.*

On a déjà vu que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*. Donc,* $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*. Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que tout ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'éléments de* $\mathcal{D}$*.*

On commence par remarquer qu'il existe une partie dénombrable de S^{N-1}*, dense dans* S^{N-1} *(ceci découle de la séparabilité de* $\mathbb{R}^N$*). Soit* S *une telle partie. On peut alors démontrer (on ne détaille pas ici cette démonstration, assez simple) que si* $x \in O$*,* O *ouvert de* $\mathbb{R}^N$*, il existe une boule ouverte de* S^{N-1} *dont le centre est dans* S *et donc le rayon est rationnel, on note* A *cette boule, et il existe* $r, R \in \mathbb{Q}$ *t.q.* $x \in A_{r,R} \subset O$*. On en déduit facilement que* O *est une union au plus dénombrable d'éléments de* $\mathcal{D}$ *(voir l'exercice 2.7 pour des résultats semblables). Ce résultat montre que les ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *sont dans* $T(\mathcal{D})$ *et donc que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T(\mathcal{D})$*.*

On a bien finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = T(\mathcal{D})$*.*

Etape 3. *On montre dans cette étape que (7.23) est vraie pour tout* $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*.*

En admettant que le deuxième membre de (7.23) est bien défini pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*, on peut définir une mesure* m *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *en posant*

$$m(E) = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} 1_E(\rho\xi)\, d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\, d\rho.$$

On a montré que $m = \lambda_N$ *sur* $\mathcal{D}$ *(Etape 1) et que* $\mathcal{D}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *(Etape 2). Le fait que deux mesures sur une tribu* T *soient égales sur une famille engendrant* T *est insuffisant pour dire qu'elles sont égales sur* T *(voir exercice 2.21), mais cela est suffisant si cette famille est une semi–algèbre (une famille* $\mathcal{C}$ *est une semi–algèbre si* $\emptyset, \emptyset^c \in \mathcal{C}$*,* $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie, et le complémentaire de tout élément de* $\mathcal{C}$ *est une réunion finie disjointe d'éléments de* $\mathcal{C}$*), et si les mesures sont finies. C'est ainsi que nous allons montrer que (7.23) est vraie pour tout* $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*.*

Soit $R > 0$*. On note* $\mathcal{D}_R = \{E \in \mathcal{D}\,;\, E \subset B_R\}$ *et* $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}(B_R) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\,;\, A \subset B_R\}$*. L'étape 2 donne que la tribu engendrée (sur* B_R*) par* $\mathcal{D}_R$*, notée* $T(\mathcal{D}_R)$*, est égale à* $\mathcal{B}_R$*.*

On remarque tout d'abord que si $C \in \mathcal{D}_R$*,* $(B_R \setminus C)$ *est la réunion disjointe d'au plus 3 éléments de* $\mathcal{D}_R$*. On en déduit, comme dans l'exercice 7.2, que l'algèbre engendrée par* $\mathcal{D}_R$ *sur* B_R *(voir la définition 2.5 pour la définition d'une algèbre), notée* $\mathcal{A}_R$*, est l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de* $\mathcal{D}_R$*. Soit* $E \in \mathcal{A}_R$*. Il est alors facile de montrer (par linéarité de l'intégrale et avec l'étape 1) que les deux membres de (7.23) sont bien définis et égaux si* $f = 1_E$*.*

On note M_R *l'ensemble des éléments* $E \in \mathcal{B}(B_R)$ *t.q. les deux membres de (7.23) soient bien définis et égaux si* $f = 1_E$*. Une application facile du théorème de convergence monotone donne que* M_R *est une classe monotone. (en fait, si* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ *est une suite décroissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite* $1_{B_R} - 1_{E_n}$ *alors que si* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ *est une suite croissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite* 1_{E_n}*).* M_R *est donc une classe monotone qui contient* $\mathcal{A}_R$*,* M_R *contient donc la classe monotone engendrée par* $\mathcal{A}_R$*, or, le lemme sur les classes monotones (exercice 2.13) montre que cette classe monotone est égale à la tribu engendrée par* $\mathcal{A}_R$*, elle même égale à la tribu engendrée par* $\mathcal{D}_R$*. Ceci montre que* $M_R = \mathcal{B}(B_R)$ *et donc que les deux membres de (7.23) sont bien définis et égaux si* $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(B_R)$*.*

En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone, il est alors facile de conclure que les deux membres de (7.23) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*.*

4. *La fin de la démonstration est maintenant facile (elle utilise un raisonnement souvent utilisé dans des exercices précédents). Par linéarité de l'intégrale, on montre que les deux membres de (7.23) sont bien définis et égaux si* $f \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*, puis, par convergence monotone, si* $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*. Enfin, on traite le cas* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ *en décomposant* $f = f^+ - f^-$*.*
5. *Comme application simple de (7.23) pour* $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*, on trouve que* $x \to |x|^\alpha$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ *si et seulement si* $\alpha + N - 1 < -1$ *et est intégrable sur* B_1 *si et seulement si* $\alpha + N - 1 > -1$*.*

Exercice 7.27 (Changement de variable $W^{1,1}$ croissant) Soit $f \in \mathcal{L}^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f\, d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

   Corrigé – *Pour* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x < y$*, on a* $\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y f(t)dt$*. On en déduit que* φ *est continue (sur* $\mathbb{R}$*) et même uniformément continue en utilisant la proposition 4.50. On en déduit aussi que* φ *est strictement croissante car* $f > 0$ *p.p..*

On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f\, d\lambda$) et on note $\psi : I_m \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de φ. La fonction ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$ et on a $\varphi(\psi(s)) = s$ pour tout $s \in I_m$ et $\psi(\varphi(s)) = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(I)$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(I) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\}$. Pour $A \subset I_m$, on note $\psi(A) = \{\psi(x), x \in A\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$ et que $\{\psi(A), A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *Les fonctions φ et ψ sont continues, elles sont donc boréliennes (c'est-à-dire que l'image réciproque, par φ ou ψ, d'un borélien est un borélien).*

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, Comme $\varphi(A) = \psi^{-1}(A)$ et que ψ est borélienne, on a donc $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, comme $\mathrm{Im}(\varphi) = I_m$ on a $\varphi(A) \subset I_m$ et donc $\varphi(A) \in \mathcal{B}(I_m)$. Réciproquement, si $C \in \mathcal{B}(I_m)$, on a $C = \varphi(\varphi^{-1}(C))$ et donc $C = \varphi(A)$ avec $A = \varphi^{-1}(C)$. Comme φ est borélienne, on a $A = \varphi^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $C \in \{\varphi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On a bien montré que $\{\varphi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$.

De manière semblable on montre que $\{\psi(A), A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(I)) = \int_I f\,d\lambda$.

Corrigé – *Soit a, b les bornes de I, avec $a \le b$. L'ensemble $\varphi(I)$ est alors un intervalle dont les bornes sont $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. On a donc, en utilisant aussi la définition de φ,*

$$\lambda(\varphi(I)) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f\,d\lambda = \int_I f\,d\lambda.$$

4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f\,d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\text{O ouvert, } \lambda(O) \le \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(O)) \le \varepsilon.$$

Corrigé – *L'ouvert O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44). Il existe donc une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts disjoints deux à deux t.q. $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (noter que certains intervalles ouverts peuvent être vides). On a alors $\varphi(O) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(I_n)$ et les $\varphi(I_n)$ sont aussi disjoints deux à deux (par injectivité de φ). On a donc, par σ-additivité de λ et par la question précédente,*

$$\lambda(\varphi(O)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\varphi(I_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{I_n} f\,d\lambda = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n} f\,d\lambda = \int_O f\,d\lambda.$$

On utilise maintenant la proposition 4.50. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) \le \delta \Rightarrow \int_A f\,d\lambda \le \varepsilon \tag{7.24}$$

On en déduit, en particulier, que si O est un ouvert et que $\lambda(O) \le \delta$, on a alors $\int_O f\,d\lambda \le \varepsilon$ et donc $\lambda(\varphi(O)) \le \varepsilon$.

5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(A)) = \int_A f\,d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]

Corrigé – *On commence par remarquer que $\varphi(A) \subset I_m$ et donc $\lambda(\varphi(A) \le \lambda(I_m) = \int f\,d\lambda < +\infty$. On a aussi $0 \le \int_A f\,d\lambda \le \int f\,d\lambda < +\infty$.*

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $|\lambda(\varphi(A)) - \int_A f\,d\lambda| \le 2\varepsilon$. Pour cela, on utilise δ donné par (7.24). La régularité de λ donne l'existence de O ouvert contenant A et F fermé inclus dans A t.q. $\lambda(O \setminus F) \le \delta$. On en déduit, grâce à (7.24), en remarquant que $O \setminus F$ est un ouvert,

$$0 \le \lambda(\varphi(O)) - \lambda(\varphi(A)) = \lambda(\varphi(O \setminus A)) \le \lambda(\varphi(O \setminus F)) = \int_{O\setminus F} f\,d\lambda \le \varepsilon.$$

On a aussi, toujours, grâce à (7.24),

$$0 \le \int_O f\,d\lambda - \int_A f\,d\lambda = \int_{O\setminus A} f\,d\lambda \le \varepsilon.$$

Comme la question précédente donne $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f\,d\lambda$, on en déduit que

$$|\lambda(\varphi(A)) - \int_A f\,d\lambda| \le 2\varepsilon.$$

Il reste à remarquer que $\varepsilon > 0$ est arbitraire pour conclure que $\lambda(\varphi(A)) - \int_A f\,d\lambda$.

6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

(a) Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_{\mathrm{B}}$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds. \tag{7.25}$$

[Prendre $\mathrm{A} = \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

Corrigé – *Puisque* $g = 1_{\mathrm{B}}$, *on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_{\mathrm{B}\cap]\varphi(a),\varphi(b)[} d\lambda = \lambda(\mathrm{B}\cap]\varphi(a), \varphi(b)[).$$

Comme $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{I}_m$, *on a*

$$\mathrm{B}\cap]\varphi(a), \varphi(b)[) = (\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[.$$

Puis, comme $\varphi \circ \psi$ *est l'identité sur* I_m *on en déduit, avec* $\mathrm{A} = \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]a, b[$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[&= \varphi(\psi((\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[)) \\ &= \varphi(\psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m) \cap \psi(]\varphi(a), \varphi(b)[)) = \varphi(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

On a donc, avec la question précédente et la définition de A,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \int_{\mathrm{A}} f d\lambda &= \int_{\psi(\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_m)\cap]a,b[} f d\lambda \\ &= \int_a^b 1_{\psi(\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_m)}(s)f(s)ds.\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à remarquer que $s \in \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)$ *si et seulement si* $\varphi(s) \in \mathrm{B}$. *On obtient bien ainsi*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b 1_{\mathrm{B}}(\varphi(s))f(s)ds = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds.$$

(b) Montrer que (7.25) est encore vraie si g appartient à $\mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis si g appartient à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Corrigé – *Si* $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathrm{B}_1, \ldots \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.*

$$g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{B}_i}.$$

Pour chaque i, *la question précédente donne*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g_i(t)dt = \int_a^b g_i(\varphi(s))f(s)ds.$$

On multiplie les termes de cette égalité par a_i, *on somme sur* i *et on obtient bien (7.25).*

Soit maintenant $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Il existe une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q.* $g_n \uparrow g$ *(convergence simple en croissant). Par convergence monotone on peut passer à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans (7.25) écrit avec* g_n *au lieu de* g. *On obtient bien ainsi (7.25).*

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g 1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (7.25) est vraie.

Corrigé – *On applique la question précédente à* g^+ *et* g^- *(parties positive et négative de* g*), c'est-à-dire qu'on écrit (7.25) avec* g^+ *et* g^-. *On en déduit que les fonctions* $g^{\pm} 1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} f$ *sont intégrables et donc que leur différence est intégrable. Ceci donne que* $g 1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} f$ *est intégrable (pour* λ*). Puis en faisant la différence de (7.25) avec* g^+ *avec (7.25) avec* g^-, *on obtient bien (7.25) avec* g.

N.B. On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (7.25) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ, restreinte à l'intervalle $]a,b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a,b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

Chapitre 8

Densité, séparabilité et compacité

Ce chapitre est consacré en majeure partie aux espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω, λ_N désigne la restriction à $\mathcal{B}(\Omega)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (aussi notée λ_N) et $1 \leq p \leq \infty$.
On notera toujours $L^p(\Omega) = L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$.

8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$

Nous avons vu au chapitre précédent que les espaces L^p sont très intéressants car ils sont en particulier complets. Cependant, les éléments de ces espaces sont des objets avec lesquels il est malaisé de travailler. Pour démontrer des propriétés sur ces objets, on travaille très souvent par densité : on travaille sur des fonctions régulières, qui sont faciles à manipuler, et on passe ensuite à la limite, à condition d'avoir établi au préalable un résultat de densité, qui nous permet justement ce passage à la limite.

8.1.1 Densité des fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

Définition 8.1 (Fonction à support compact) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* f *est à support compact (dans* Ω*) s'il existe un compact* $K \subset \Omega$ *tel que* $f = 0$ *sur* $\Omega \setminus K$.

On note souvent $\mathrm{supp}(f)$ l'adhérence dans Ω de l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $\mathrm{supp}(f)$ est compact.

Définition 8.2 ($C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *si*

- f *est de classe* C^∞ *(de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*).*
- f *est à support compact (dans* Ω*).*

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 8.3 Si $\mathrm{N}=1$ et $\Omega =]0,1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0,1[$ t.q. f soit nulle en dehors de ce compact.

Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0,\varepsilon[$ et pour $x \in]1-\varepsilon, 1[$, alors $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

Théorème 8.4 (Densité de $\mathrm{C}_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *(par exemple,* $\Omega = \mathbb{R}^\mathrm{N}$*). Alors :*

$\mathrm{C}_c(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *c'est-à-dire :*

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega,\mathbb{R}) \text{ t.q. } \|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat est faite dans l'exercice 6.4 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$. La généralisation donnée ici se démontre de manière très voisine (grâce au résultat de régularité, proposition 7.17), voir l'exercice 8.1. ∎

Une conséquence importante du théorème 8.4 est la continuité en moyenne que l'on donne maintenant.

Théorème 8.5 (Continuité en moyenne) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$,*et* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. *Alors,* $\|f(\cdot+h) - f\|_p \to 0$ *quand* $h \to 0$*, c'est-à-dire :*

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p dx \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

La démonstration est ici encore très similaire à la démonstration vue pour $\mathrm{N} = 1$ dans l'exercice 6.4, elle est proposée dans l'exercice 8.2.

Remarque 8.6 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞. Considérer par exemple le cas $\mathrm{N}=1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, en confondant f avec sa classe). On peut montrer que (voir l'exercice 8.4) :

$$\forall \varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2},$$
$$\forall h > 0,\ \|f(\cdot+h) - f\|_\infty = 1.$$

8.1.2 Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Définition 8.7 ($\mathrm{L}^1_{\mathbf{loc}}$) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *On définit que* f *est localement intégrable sur* Ω *si* $f 1_\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *t.q.* $f = g$ *p.p. sur* K*") pour tout compact* $\mathrm{K} \in \Omega$.
On note $\mathrm{L}^1_{loc}(\Omega) (= \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_\mathrm{N}))$ *l'ensemble des fonctions localement intégrables sur* Ω.

Remarque 8.8 Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ (ceci est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p, proposition 6.25).

Définition 8.9 (Famille régularisante) *Soit* $N \geq 1$ *et soit* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *t.q.* $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N ; \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$ *et* $\int \rho(x)dx = 1$. *On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *définie par :* $\rho_n(x) = n^N \rho(nx), x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 8.10 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que

$$\{x \in \mathbb{R}^N ; \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{\frac{1}{n}} \text{ et } \int \rho_n(x)dx = 1.$$

Notons qu'il existe bien des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ dans la définition 8.9. Pour $N = 1$, par exemple, il suffit de prendre

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha \exp(\frac{1}{x^2-1}) \text{ si } x \in]-1,1[, \\ 0 \text{ si } x \notin]-1,1[, \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ choisi pour avoir $\int \rho(x)dx = 1$.

Lemme 8.11 (Régularisation par convolution) *Soient* $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante et* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $f * \rho_n$ *est définie partout sur* $\mathbb{R}^N$ *et* $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. *De plus, s'il existe* $a > 0$ *t.q.* $f = 0$ *p.p. sur* B_a^c, *on a alors* $f * \rho_n = 0$ *sur* $B^c_{a+\frac{1}{n}}$ *(*$f * \rho_n$ *est donc à support compact).*

DÉMONSTRATION – La démonstration du fait que $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est donnée dans l'exercice 7.20. La seconde partie est donnée dans les exercices 7.20 et 7.19. L'indication de la seconde question de l'exercice 7.19 donne le support indiqué ici pour $f * \rho_n$. ■

Proposition 8.12 *Soit* $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante. Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Alors,*

$$f * \rho_n \to f \textit{ dans } L^p(\mathbb{R}^N) \textit{ lorsque } n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence du théorème de continuité en moyenne (théorème 8.5). On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f * \rho_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x)\int \rho_n(y))dy \\ &= \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)dy, \end{aligned}$$

et donc :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy)^p.$$

Pour $p > 1$, on utilise l'inégalité de Höder en écrivant $\rho_n = \rho_n^{\frac{1}{p}} \rho_n^{\frac{1}{q}}$ (avec $q = p/(p-1)$) et on obtient (ce qui est aussi immédiatement vrai pour $p = 1$) :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)|^p &\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy (\int \rho_n(y)dy)^{\frac{p}{q}} && (8.1) \\ &\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy. && (8.2) \end{aligned}$$

On remarque maintenant que l'application $(x,y)^t \mapsto (f(y)-f(x))$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (munis de leurs tribus boréliennes respectives) ; ceci est une conséquence (par exemple) de la proposition 7.11 et de la mesurabilité de la somme d'applications mesurables. L'application $(x,y)^t \mapsto (x, x-y)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (car continue). Par composition, l'application $(x,y)^t \mapsto (f(x-y)-f(x))$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit, en utilisant une nouvelle fois la mesurabilité de la composée d'applications mesurables (et du produit d'applications mesurables), que $(x,y)^t \mapsto |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)$ est mesurable (positive) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour déduire de (8.2) que :

$$\begin{aligned}\int |f_n(x)-f(x)|^p dx &\le \int \Big(\int |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)dy\Big)dx \\ &= \int \Big(\int |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)dx\Big)dy \\ &= \int_{B_{\frac{1}{n}}} \|f(\cdot - y)-f\|_p^p \rho_n(y)dy.\end{aligned} \tag{8.3}$$

On utilise maintenant le théorème 8.5. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}^N,\ |h| \le \eta \ \Rightarrow \|f(\cdot - h)-f\|_p \le \varepsilon.$$

On déduit donc de (8.3) que :

$$\frac{1}{n} \le \eta \Rightarrow \|f_n - f\|_p \le \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Les deux résultats précédents permettent de démontrer le théorème de densité suivant :

Théorème 8.13 (Densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Soient* $N \ge 1$ *et* $p \in [1,+\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration proposée ici utilise une méthode dite de troncature et régularisation.

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on dit que f est à support compact s'il existe K compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c. On note A l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à support compact.

Etape 1. On montre dans cette étape que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{B_n}$. Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$ et $|f_n| \le |f|$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p (on utilise ici le fait que $p < \infty$). Il donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, on a bien montré la densité de A dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2. Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Or cette suite est donné avec $f_n = f \star \rho_n$ où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille régularisante. En effet, le lemme 8.11 donne que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ et la proposition 8.12 donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. ■

On rappelle (remarque 8.6) que $C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (et donc aussi $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$) n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Il est intéressant aussi de remarquer que le théorème précédent (théorème 8.13) est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$), finie sur les compacts. Toutefois la démonstration donnée ici doit alors être modifiée. Ceci est fait dans l'exercice 7.15 pour $p = 1$ (et la généralisation pour traiter tous les cas $p \in [1,\infty[$ est assez simple).

8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 8.14 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Alors,* $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

DÉMONSTRATION – Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on pose $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N ; d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On remarque d'abord (en utilisant, comme pour le théorème précédent, le théorème de convergence dominée dans L^p) que $f 1_{K_n} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \varepsilon$.

On pose maintenant $g = f_{n_0}$. On peut considérer que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $g = 0$ p.p. sur K^c avec $K = K_{n_0}$. En prenant une famille régularisante, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, le lemme 8.11 et la proposition 8.12 donnent que $g * \rho_n \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$ et $(g * \rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Il suffit alors de remarquer que la restriction de $g * \rho_n$ à Ω est à support compact dans Ω dès que $n > n_0$ pour conclure la démonstration. ■

Ici aussi, le théorème 8.14 est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les compacts. La démonstration donnée ici doit alors être modifiée (voir l'exercice 7.15).

8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$

Proposition 8.15 *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* p *tel que* $1 \leq p < +\infty$. *Alors, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est séparable.*

La démonstration fait l'objet de l'exercice 8.5 (et de 6.5 pour le car $\Omega = \mathbb{R}$).
Les espaces du type L^∞ ne sont, en général, pas séparables. L'exercice 8.6 montre que, par exemple, $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ n'est pas séparable. Une adaptation simple de la démonstration de l'exercice 8.6 montre aussi que l'espace $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$), muni de la norme de la convergence uniforme, n'est pas séparable. Par contre l'espace $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 quand le norme de la variable tend vers l'infini), muni de la même norme, est séparable. Ceci est une conséquence des deux premières questions de l'exercice 8.5 (car C_c est dense dans C_0).

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité séquentielle est équivalente à la notion de compacité de Borel -Lebesgue (*i.e.* de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique (ce qui est notre cas, car E est un espace vectoriel normé).

Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore s'il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).

Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par un théorème de Riesz (différent des deux théorèmes de Riesz donnés dans ce livre !) que la boule unité fermée d'un e.v.n. E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$ (Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$), espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \le p < +\infty$ et Ω bornée, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.16 (Kolmogorov) *Soit $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \le p < +\infty$; on considère ici l'espace mesuré $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Soit $A \subset L^p(\Omega)$; A est relativement compacte si et seulement si :*

1. Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|f\|_p \le C$ pour tout $f \in A$,

2. la partie A est équicontinue en moyenne, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\text{pour tout } f \in A,\ |h| \le \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_p \le \varepsilon,$$

3. la partie A est équi-petite à l'infini, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$, t.q.

$$\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p \, dm \le \varepsilon \text{ pour tout } f \in A,$$

où $\tilde{f}$ est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$ et le théorème d'Ascoli que nous rappelons ci après (théorème 8.17). Elle est laissée à titre d'exercice, le cas $p = 1$ et $\Omega =]0,1[$ est donné dans l'exercice 8.9. ■

Dans le cas où Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, le théorème 8.16 peut s'énoncer plus simplement sans introduire $\tilde{f}$. Ceci est développé dans l'exercice 8.10.

Théorème 8.17 (Ascoli) *Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e. $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall\ x, y \in K, |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon, \forall\ f \in A$.*

Corollaire 8.18 *Soient $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. On suppose que la famille $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov. On peut alors extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^p(\Omega)$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.*

8.4 Compacité faible-$*$

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible-$*$ dans le dual d'un espace de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.19 (Compacité faible-$*$ séq. des bornés de E' si E est séparable) *Soit F un espace de Banach séparable et F' son dual topologique. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de F'. Alors, il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $T \in F'$ t.q. la sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T $*$-faiblement dans F' (i.e. $T_{n_k}(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) pour tout élément u de F.)*

DÉMONSTRATION – La démonstration va se faire en trois étapes. L'étape principale est probablement la deuxième étape (qui décrit le procédé diagonal).

On commence par remarquer que, comme F est séparable, il existe une partie A de F, dénombrable et dense. Comme A est dénombrable, il existe uns suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $A = \{f_p,\ p \in \mathbb{N}^*\}$. On note aussi $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{F'}$ (on a $C < +\infty$ car la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F').

Etape 1. Dans cette première étape, on montre, par récurrence, l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

L'existence de ψ_1 découle du fait que la suite $(T_n(f_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ (en effet, on a $|T_n(f_1)| \le C\|f_1\|_F$). Puis, pour $p \ge 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le fait que la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On obtient l'existence d'une application strictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}(n)}(f_{p+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 2 (procédé diagonal). On note φ_n l'application $\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n$. La deuxième étape consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \varphi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On va montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)) = \varphi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite de la suite $(T_{\varphi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $n = p$. Ceci prouve que $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 3. On utilise maintenant la densité de A dans F. L'étape 2 nous donne, pour tout $g \in A$, la convergence dans $\mathbb{R}$ de la suite $(T_{\psi(n)}(g))_{n\in\mathbb{N}}$. La densité de A dans F et le fait que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F' nous permet d'en déduire que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in F$. En effet, soit $f \in F$. Pour tout $g \in A$ et tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$|T_{\psi(n)}(f) - T_{\psi(m)}(f)| \le 2C\|f - g\|_F + |T_{\psi(n)}(g) - T_{\psi(m)}(g)|.$$

On en déduit facilement que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc est convergente.

Pour tout $f \in F$, on note $T(f)$ la limite (dans $\mathbb{R}$) de la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$. Comme les applications T_n sont linéaires, l'application T est aussi linéaire (de F dans $\mathbb{R}$). Puis, comme $\|T_n\|_{F'} \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $|T(f)| \le C\|f\|_F$ pour tout $f \in F$. On a donc $T \in F'$ et, finalement, $T_{\psi(n)} \to T$ $*$-faiblement dans F', quand $n \to +\infty$. Ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 8.19 s'applique aux suites bornées de $L^\infty(\Omega)$. En effet, grâce au théorème 6.70 et à la proposition 8.15, l'espace $L^\infty(\Omega)$ peut être identifié au dual de l'espace $L^1(\Omega)$, qui est un espace séparable (Ω est ici un borélien de $\mathbb{R}^N$). On a donc, par exemple, le résultat suivant :

Proposition 8.20 (Compacité faible-$*$ séquentielle des bornés de L^∞) *Soit $d \ge 1$. On note L^∞ l'espace $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty$ t.q. $u_n \to u$ $*$-faiblement dans L^∞.*

Dans le cas $p \in]1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.21 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p) *Soit $d \geq 1$ et soit $p \in]1,+\infty[$. On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p, i.e. telle qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in \mathrm{L}^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p, c'est-à-dire t.q. $\int (u_n v - uv)dm \to 0$ pour tout $v \in \mathrm{L}^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.*

On donne maintenant une conséquence, très utile pour les probabilités, de la proposition 8.19. Cette conséquence a déjà été évoquée dans la remarque 6.95.

Proposition 8.22 (Convergence étroite d'une suite tendue) *Soit $d \geq 1$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) < +\infty$. Il existe alors une sous-suite, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ notée m t.q.*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}).$$

De plus, si la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, on a alors $m_n \to m$ étroitement. (Ce dernier résultat est aussi vrai si on remplace l'hypothèse "$(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue" par "$m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$").

Démonstration – On rappelle que $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}),\ \varphi(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty\}$. On munit $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|\varphi\|_u = \sup\{|\varphi(x)|,\ x \in \mathbb{R}^d\}$. L'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, muni de cette norme, est un espace de Banach séparable (alors que l'espace $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ muni de cette même norme n'est pas séparable).

On note E l'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (muni de la norme de la convergence uniforme). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{L}_n(\varphi) = \int \varphi dm_n$. La suite $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans E', car on a

$$\|\mathrm{L}_n\|_{\mathrm{E}'} \leq m_n(\mathbb{R}^d).$$

Il existe donc une sous-suite de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $\mathrm{L} \in \mathrm{E}'$ t.q.

$$\int \varphi dm_n \to \mathrm{L}(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{E}.$$

L'application L est donc une application linéaire positive (c'est-à-dire $\varphi \geq 0 \Rightarrow \mathrm{L}(\varphi) \geq 0$) de E dans $\mathbb{R}$. D'après le chapitre 5, il existe alors une mesure finie m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $\mathrm{L}(\varphi) = \int \varphi dm$ pour tout $\varphi \in \mathrm{E}$ (en fait le théorème 5.12 donne ce résultat pour $d = 1$, la démonstration est semblable pour $d > 1$). Ceci donne bien le résultat annoncé, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}).$$

Il est intéressant de noter que si m_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ une probabilité, la mesure m n'est pas forcément une probabilité et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut ne pas converger étroitement vers m. (Un exemple pour $d = 1$ consiste à prendre $m_n = \delta_n$ et $m = 0$.)

Toutefois, si on suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (ou si on suppose que $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$), la proposition 6.94 (ou la proposition 6.87 pour le cas $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$) donne la convergence étroite de m_n vers m, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}).$$

■

Du point de vue des probabilités, la conséquence de la proposition 8.22 est que si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. dont la suite des lois est tendue, il existe alors une v.a.r. X et une sous-suite de la suite X_n telle que cette sous-suite converge en loi vers X (cf. proposition 9.21 pour le cas de vecteurs aléatoires).

8.5 Exercices

Exercice 8.1 (Densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) Soient, $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon$. [Reprendre la démonstration de l'exercice 6.4 qui traite le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Utiliser le résultat de régularité, proposition 7.17.]

Exercice 8.2 (Continuité en moyenne) Soient $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$. [Reprendre la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4]

Exercice 8.3 (Convergence après translation)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, $N \geq 1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $u \in L^p$ tel que $u_n \to u$ dans L^p. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

1. On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que* $u_n(\cdot+h_n)-u = u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)+u(\cdot+h_n)-u$ *et donc*
$$\|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq \|u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)\|_p + \|u(\cdot+h_n)-u\|_p.$$
Comme $\|u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)\|_p = \|u_n-u\|_p$, *on a donc*
$$\|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq \|u_n-u\|_p + \|u(\cdot+h_n)-u\|_p.$$
Soit $\varepsilon > 0$, *comme* $u_n \to u$ *dans* L^p, *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*
$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n-u\|_p \leq \varepsilon.$$
Puis, comme $u \in L^p$, *la continuité en moyenne (théorème 8.5) donne l'existence de* $\delta > 0$ *tel que*
$$|h| \leq \delta \Rightarrow \|u(\cdot+h)-u\|_p \leq \varepsilon.$$
Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, *il existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|h_n| \leq \delta$ *pour* $n \geq n_2$. *On a donc*
$$n \geq \max\{n_1,n_2\} \Rightarrow \|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq 2\varepsilon.$$
Ce qui prouve bien que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$.

2. On suppose $p = +\infty$. Donner un exemple pour lequel $u_n(\cdot+h_n) \not\to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (on pourra se limiter a $N = 1$).

Corrigé – *Il suffit de prendre* $u_n = u$ *pour tout n et, par exemple,* $u = 1_{\mathbb{R}_+}$. *Pour tout* $h \neq 0$, *on a* $\|u(\cdot+h)-u\|_\infty = 1$. *Il suffit donc de prendre, par exemple,* $h_n = 1/n$.

Exercice 8.4 (Non densité de C_c dans L^∞) On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Corrigé – *Soit* $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On va montrer que* $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ *pour tout* $0 < \varepsilon < 1/2$ *(ce qui donne bien finalement* $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$*). fdecc*

Soit donc $0 < \varepsilon < 1/2$.

On suppose tout d'abord que $\varphi(0) \geq \frac{1}{2}$. *Il existe alors, par continuité de* φ, $\delta > 0$ *t.q.* $\varphi(x) \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ *pour tout* $x \in [-\delta,0]$. *On a donc* $\varphi(x)-f(x) \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ *pour presque tout* $x \in [-\delta,0]$, *ce qui prouve que* $\lambda(\{|\varphi-f| \geq \frac{1}{2}-\varepsilon\}) \geq \lambda([-\delta,0]) = \delta > 0$. *On a donc* $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$.

On suppose maintenant que $\varphi(0) \leq \frac{1}{2}$. *De manière analogue, il existe* $\delta > 0$ *t.q.* $\varphi(x) \leq \frac{1}{2}+\varepsilon$ *pour tout* $x \in [0,\delta]$. *On a alors* $f(x)-\varphi(x) \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ *pour presque tout* $x \in [0,\delta]$, *ce qui prouve que* $\lambda(\{|f-\varphi| \geq \frac{1}{2}-\varepsilon\}) \geq \lambda([0,\delta]) = \delta > 0$. *On a donc aussi* $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ *est arbitrairement petit, on a bien montré que* $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}*$.

Corrigé – *Pour $h>0$, on a $|f(\cdot+h)-f(\cdot)| = 1$ p.p. sur $[-h,0]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([-h,0]) = h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair que $|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$.*

Pour $h<0$, on a $|f(\cdot+h)-f(\cdot)|_\infty = 1$ p.p. sur $[0,-h]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([0,-h]) = -h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair aussi que $|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$.

Exercice 8.5 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $q = 0,1,\ldots,2n^2-1$, on note : $I_q^n = [-n+\frac{q}{n}, -n+\frac{q+1}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{I_q^n} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n,n[^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A $f \in A_n$, on associe l'ensemble des valeurs prises par f sur les intervalles I_q^n, $q = 0,1,\ldots,2n^2-1$. On construit ainsi une bijection de A_n dans $\mathbb{Q}^{2n^2}$, ce qui prouve que A_n est dénombrable car $\mathbb{Q}^{2n^2}$ est dénombrable.*

On en déduit que A est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$.

Corrigé – *Soit $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$.*

Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ sur $[-a,a]^c$.

Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ t.q. $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

On choisit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geq a$ et $1/n \leq \delta$. On construit alors $g \in A_n$ de la manière suivante :

$$g(x) = 0, \text{ si } x \in [-n,n[^c,$$
$$g(x) = r_q, \text{ si } x \in [-n+\tfrac{q}{n}, -n+\tfrac{q+1}{n}[, \; q \in \{0,1,\ldots,2n^2-1\},$$

avec $r_q \in \mathbb{Q}$ t.q. $|f(-n+\frac{q}{n}) - r_q| \leq \varepsilon$ et $r_q = 0$ si $f(-n+\frac{q}{n}) = 0$.

On a $g \in A$ (car $g \in A_n$), $|g(x)-f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout x et $|g(x)-f(x)| = 0$ si $x \in [-a-1,a+1]^c$. On en déduit :

$$\int |g(x)-f(x)|^p dx \leq 2(a+1)2^p\varepsilon^p.$$

On peut donc trouver $g \in A$ arbitrairement proche de f en norme L^p.

3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.4).

Corrigé – *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 8.4, il existe $g \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|g-f\|_p \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe $h \in A$ t.q. $\|g-h\|_p \leq \varepsilon$. On a donc $\|f-h\|_p \leq 2\varepsilon$. Ce qui prouve que A est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Comme A est dénombrable, on en déduit que $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.*

Exercice 8.6 (Non séparabilité de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$) On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R},T,\lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B.]

Corrigé – *Soit P une partie $\mathbb{N}$. On construit $\varphi(P) \in B$ en prenant $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$ si $n \in P$, $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ si $n \notin P$ et $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*

φ est bien injective car, si $P,Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $P \neq Q$, il existe $n \in P$ t.q. $n \notin \mathbb{Q}$ (ou il existe $n \in Q$ t.q. $n \notin \mathcal{P}$). On a alors $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$ et $\varphi(Q) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ (ou $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ et $\varphi(Q) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$). On en déduit que $\|\varphi(P)-\varphi(Q)\|_\infty \geq 1$ car $\lambda(]n,n+1[) > 0$, et donc $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Comme $\mathcal{P}(N)$ est non dénombrable (et non fini), l'ensemble B est aussi non dénombrable (et non fini).

2. Soit A une partie dense de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \le \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A.

Corrigé – *Soit $f \in B$. Par densité de A dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \le \frac{1}{4}$. On peut donc construire (grâce à l'axiome du choix) une application ψ de B dans A t.q. $\|f-\psi(f)\|_\infty \le \frac{1}{4}$ pour tout $f \in B$.*

On monte maintenant que ψ est injective. En effet, soit $f_1, f_2 \in B$ t.q. $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. On a alors, avec $g = \psi(f_1) = \psi(f_2)$, $\|f_1 - f_2\|_\infty \le \|f_1 - g\|_\infty + \|f_2 - g\|_\infty \le \frac{1}{2}$. Ceci prouve que $f_1 = f_2$ car $\|f_1 - f_2\|_\infty \ge 1$ si $f_1 \ne f_2$ (il suffit de remarquer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $|f_1 - f_2| = 1$ p.p. sur $]n, n+1[$).

3. Montrer que $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$ n'est pas séparable.

Corrigé – *Si $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$ est séparable, il existe A (au plus) dénombrable, dense dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$. La question précédente permet de construire une injection de B de A, ce qui est en contradiction avec le fait que B est non dénombrable (et non fini).*

Exercice 8.7 (Convolution $L^p - L^q$) Pour $1 \le p \le \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est intégrable.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car les applications f et $g(x-\cdot)$ sont mesurables. Puis, on déduit de l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1)) que $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :*

$$\|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1 \le \|f\|_p\|g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p\|g\|_q.$$

On peut donc définir $(f*g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $|(f*g)(x)| \le \|f\|_p\|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|(f*g)(x)| = |\int f(\cdot)g(x-\cdot)d\lambda| \le \int |f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda = \|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1$. En utilisant l'inégalité montrée dans la question précédente, on a donc :*

$$|(f*g)(x)| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

(c) Montrer que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{aligned}|f*g(x+h) - f*g(x)| &\le \int |f(\cdot)g(x+h-\cdot) - f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda \\ &\le \|f\|_p\|g(x+h-\cdot) - g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p\|g(\cdot-h) - g\|_q.\end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^q (voir exercice 6.4,, le cas général de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ est donné dans le théorème 8.5) donne que $\|g(\cdot-h)-g\|_q \to 0$, quand $h \to 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f*g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F*G$ sur $\mathbb{R}$ en posant $F*G = f*g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f*g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G.]

Corrigé – *Soit $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$. Comme $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) = f_2(\cdot)g_2(x-\cdot)$ p.p. et donc $f_1 * g_1(x) = f_2 * g_2(x)$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut donc définir $F*G(x)$ en posant $F*G(x) = f*g(x)$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $f*g(x)$ ne dépend pas du choix de f et g dans F et G).

(b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F * G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

Corrigé – *On note $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme (on rappelle que, sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, elle coïncide avec la norme $\|\cdot\|_\infty$).*

Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Si $f \in F$, $g \in G$, on a déjà vu que, pour tout $x \in R$:

$$|F * G(x)| = |f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|F\|_p \|G\|_q.$$

On en déduit $\|F * G\|_u = \sup\{|F * G(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|F\|_p \|G\|_q$, ce qui prouve bien la continuité de la forme bilinéaire $(F, G) \mapsto F * G$ de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F * G$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(F * G)(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

Corrigé – *On considère tout d'abord le cas $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On sait déjà que $f * g$ est continue (par exemple, parce que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$). D'autre part, comme f et g sont à support compact, il existe $a > 0$ et $b > 0$ t.q. $f = 0$ sur $B^c(0, a)$ et $g = 0$ sur $B^c(0, b)$. On en déduit que $f * g = 0$ sur $B^c(0, a + b)$ (ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 7.19). On a donc $f * g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Soit maintenant $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Le théorème de densité dans les espaces L^p (exercice 6.4, ou encore théorème 8.4 pour un cas plus général) donne l'existence de deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $f_n \to F$ dans L^p et $g_n \to G$ dans L^q, quand $n \to +\infty$. La continuité de la forme bilinéaire $(F, G) \mapsto F * G$ de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montre alors que $f_n * g_n \to F * G$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire uniformément), quand $n \to +\infty$. Or $f_n * g_n \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est fermé dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a donc $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f * g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f * g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé – *On procède ici comme dans le cas $1 < p, q < \infty$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est mesurable car produit d'applications mesurables. Puis, l'inégalité de Hölder pour le cas $p = 1$, $q = \infty$ (proposition (6.26)) donne $f(\cdot)g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g(x - \cdot)\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

On peut donc définir $(f * g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Ceci donne $\sup\{|(f * g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ et donc que $f * g$ est bornée.

Pour montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$, on utilise l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f * g(x) = \int f(x - \cdot)g(\cdot)d\lambda.$$

Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned} |f * g(x + h) - f * g(x)| &\leq \int |f(x + h - \cdot)g(\cdot) - f(x - \cdot)g(\cdot)|d\lambda \\ &\leq \|f(x + h - \cdot) - f(x - \cdot)\|_1 \|g\|_\infty = \|f(\cdot - h) - f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.21) donne que $\|f(\cdot - h) - f\|_1 \to 0$, quand $h \to 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc bien $f * g$ continue et bornée, c'est-à-dire $f * g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F * G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F * G = f * g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

Corrigé – *La démonstration est identique à celle du cas $1 < p, q < \infty$. Elle n'est pas redonnée ici.*

(c) L'application $(F, G) \mapsto F * G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

Corrigé – *La réponse est oui car nous avons vu que* $\|f * g\|_u = \sup\{|(f * g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(d) A-t-on $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

Corrigé – *La réponse est non. On prend, par exemple,* $G = 1$ *p.p. et* $F \in L^1$, $F \neq 0$. *On a alors* $F * G(x) = \int F d\lambda$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc,* $F * G(x) \not\to 0$, *quand* $x \to \pm\infty$, *et* $F * G \notin C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8.8 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \ge 1$,
- $\rho(x) \ge 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x) dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Corrigé – *La fonction $f\varphi$ est mesurable car produit de fonctions mesurables. Elle est intégrable car on a*

$$|f(x)\varphi(x)| \le |f(x)| \|\varphi\|_u,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ *(avec* $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(x)|, x \in \mathbb{R}\} < \infty$ *car* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *est inclus dans* $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*) et donc :*

$$\int |f(x)\varphi(x)| dx \le \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Ce qui donne bien $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $f * \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}^d$. *On pose* $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ *pour* $y \in \mathbb{R}^d$ *(n est fixé). On a donc* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *(car* $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*) et* $f\varphi = f(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$.

La première question donne $f(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ *et* $f * \rho_n(x)$ *est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par f donne :*

$$f * \rho_n(x) = \int f(y)\rho_n(x - y) dy = \int f(y)\varphi(y) dy = 0$$

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

Corrigé – *La proposition 8.12 donne* $f * \rho_n \to f$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $f_n = 0$ *p.p., on en déduit que* $f = 0$ *p.p.*

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω.)

Corrigé – *Soit* K *un compact de* Ω *t.q.* $\varphi = 0$ *sur* K^c. *On a alors* $g\varphi = g1_K\varphi$.
Comme $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, *la question 1(a) donne* $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g * \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

Corrigé – *Soit* $x \in \Omega_n$. *On pose* $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ *pour* $y \in \mathbb{R}^d$ *(n et x sont fixés). On a donc* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *; comme* $\rho_n(z) = 0$ *si* $|z| \geq 1/n$, *on a* $\varphi = 0$ *sur* K^c *où* K *est la boule fermée de centre x et de rayon* $1/n$, *c'est-à-dire* $K = \overline{B}(x, 1/n)$. *Comme* $x \in \Omega_n$, *on a* $K \subset \Omega$. *La fonction* φ *(ou, plus précisément, la restriction de* φ *à* Ω*) appartient donc à* $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$*).*

On a $g\varphi = g(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$. *On conclut comme dans la question 1(b) :*

La question 2(a) donne $g(\cdot)\rho_n(x-\cdot) = g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ *et* $g*\rho_n(x)$ *est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par g donne :*

$$g * \rho_n(x) = \int g(y)\rho_n(x - y)dy = \int g(y)\varphi(y)dy = 0$$

(c) Soit K un compact de Ω, montrer que $g1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Corrigé – *On note* α *la distance de* K *à* Ω^c, *c'est-à-dire* $\alpha = \inf\{|y - z|,\ y \in K,\ z \in \Omega^c\}$. *Cette distance est strictement positive car* K *est compact,* Ω^c *est fermé et* $K \cap O^c = \emptyset$ *(le fait que cette distance est strictement positive est démontré, par exemple, dans la démonstration du théorème 5.20). Soit* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $1/n_0 < \alpha$, *de sorte que* $K \subset \Omega_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(avec* Ω_n *défini dans la question 2(b)).*

La question 2(b) donne alors que, pour tout $n \geq n_0$, $g * \rho_n$ *est bien défini sur* K *et* $g * \rho_n = 0$ *sur* K.

Pour passer à limite sur n (et montrer que $g = 0$ *p.p. sur* K*), on pose* $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{R}^d;\ d(z, K) \leq 1/n_0\}$ *(où* $d(z, K)$ *est la distance de z à* K, *c'est-à-dire* $d(z, K) = \inf\{|z - y|,\ y \in K\}$*).* $\tilde{K}$ *est un compact de* $\mathbb{R}^d$ *et comme* $1/n_0 < \alpha$, *on a* $\tilde{K} \subset \Omega$. *On en déduit :*

$$g1_{\tilde{K}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

La proposition 8.12 donne alors $g1_{\tilde{K}} * \rho_n \to g1_{\tilde{K}}$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, *quand* $n \to +\infty$. *On a donc aussi, en prenant la restriction à* K *de ces fonctions :*

$$(g1_{\tilde{K}} * \rho_n)_{|K} \to g_{|K} \text{ dans } L^1(K, \mathcal{B}(K), \lambda_d), \text{ quand } n \to +\infty. \tag{8.4}$$

Soit $n \geq n_0$. *On remarque que* $g1_{\tilde{K}} * \rho_n = g * \rho_n$ *sur* K. *En effet, pour* $x \in K$ *et* $y \notin \tilde{K}$, *on a* $|x - y| > 1/n_0 \geq 1/n$ *et donc* $\rho_n(x - y) = 0$. *On en déduit, pour tout* $x \in K$,

$$g1_{\tilde{K}} * \rho_n(x) = \int g1_{\tilde{K}}(x)\rho_n(x - y)dy = \int g(x)\rho_n(x - y)dy = g * \rho_n(x).$$

On a bien montré que $g1_{\tilde{K}} * \rho_n = g * \rho_n$ *sur* K. *Comme* $g * \rho_n = 0$ *sur* K *(question 2(b)), on déduit de (8.4) que* $g = 0$ *p.p. sur* K.

Pour montrer que $g = 0$ *p.p. sur* Ω, *on remarque que* $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$, *avec* $K_n = \overline{\Omega}_n \cap B_n$ *(où* $\overline{\Omega}_n$ *est l'adhérence de* Ω_n *et* B_n *est la boule fermée de centre 0 et de rayon n). Comme* K_n *est un compact de* Ω, *la démonstration précédente donne* $g = 0$ *p.p. sur* K_n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *On en déduit que* $g = 0$ *p.p. sur* Ω.

Exercice 8.9 (Théorème de compacité dans L^1, Kolmogorov)
On pose $L^1(]0,1[) = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0,1[)$). Pour $f \in L^1(]0,1[[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0,1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus]0,1[$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1(]0,1[)$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^p B(f_i,\varepsilon)$, où $B(f,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0,1[)$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (Condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *On utilise la précompacité pour* $\varepsilon = 1$. *Il existe* $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ *t.q.*

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i,1).$$

En posant $M = \max\{\|f_i\|_1,\ i=1,\ldots,p\}$ *on a donc* $\|f\|_1 \le M$ *pour tout* $f \in \mathcal{A}$, *ce qui prouve que* $\mathcal{A}$ *est une partie bornée de* $L^1(]0,1[)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \le \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot+h) - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.5}$$

Corrigé – *On utilise encore la précompacité, il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ *t.q.* $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^p B(f_i,\varepsilon)$.

Le théorème de continuité en moyenne (théorème 5.21) donne que pour $i \in \{1,\ldots,p\}$ *il existe* $\alpha_i > 0$ *t.q.*

$$h \in \mathbb{R},\ |h| \le \alpha_i \Rightarrow \|\tilde{f}_i(\cdot+h) - \tilde{f}_i\|_1 \le \varepsilon.$$

On pose $\alpha = \min\{\alpha_i,\ i=1,\ldots,p\}$. *On a bien* $\alpha > 0$ *et pour tout* $f \in \mathcal{A}$, *il existe* $i \in \{1,\ldots,p\}$ *t.q.* $f \in B(f_i,\varepsilon)$. *On a alors*

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(\cdot+h) - \tilde{f}\|_1 &\le \|\tilde{f}(\cdot+h) - \tilde{f}_i(\cdot+h\|_1 + \|\tilde{f}_i(\cdot+h) - \tilde{f}_i\|_1 + \|\tilde{f}_i - \tilde{f}\|_1 \\ &= \|\tilde{f}_i(\cdot+h) - \tilde{f}_i\|_1 + 2\|f - f_i\|_1.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$h \in \mathbb{R},\ |h| \le \alpha \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot+h) - \tilde{f}\|_1 \le 3\varepsilon,$$

ce qui termine cette question.

Partie II (Condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ une partie bornée de $L^1(]0,1[)$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (8.5).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\rho \ge 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \ge 1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.6}$$

[On pourra remarquer que $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$.]

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{A}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a (avec le changement de variable* $z = ny$*)*

$$\tilde{f} * \rho_n(x) = \int \tilde{f}(x-y)\rho_n(y)dy = \int \tilde{f}(x-y)n\rho(ny)dy = \int \tilde{f}(x - \frac{z}{n})\rho(z)dz.$$

Ce qui donne bien, comme $\int \rho(x)dx = 1$, $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x-\frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$ *et donc*

$$|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x)| \le \int |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)dy.$$

L'application $(x,y) \mapsto \tilde{f}(x-y/n)$ est borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de $(x,y) \mapsto x - y/n$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto \tilde{f}(s)$ qui est borélienne). Par stabilité de l'ensemble des fonctions boréliennes, l'application $(x,y) \mapsto |\tilde{f}(x-\frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)$ est donc aussi borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue étant σ-finie, on peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir

$$\|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \le \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-\frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)dy \Big) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-\frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|dx \Big) \rho(y)dy.$$

En prenant $n_0 \ge 1/\alpha$, où α est donné par (8.5), on obtient (8.6).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f} * \rho_n$.

(a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0,1[)$ t.q. :

$$x \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \le C_1,$$

$$x, y \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le C_2|x-y|.$$

En déduire que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0,1], \mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli (théorème 8.17).]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\tilde{f} * \rho_n(x)| \le n\|f\|_1\|\rho\|_\infty$.*
On peut donc prendre $C_1 = n\|\rho\|_\infty \sup_{f \in \mathcal{A}} \|f\|_1$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(y) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(z) n(\rho(nx - nz) - \rho(ny - nz))dz$ et donc, avec le théorème des accroissements finis appliqué à ρ,

$$|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(y)| \le \|f\|_1 n^2 \|\rho'\|_\infty |x-y|.$$

On peut donc prendre $C_2 = n^2\|\rho'\|_\infty \sup_{f \in \mathcal{A}} \|f\|_1$.
L'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est donc borné dans $C([0,1], \mathbb{R})$ et est composé de fonctions uniformément équicontinues. Le théorème d'Ascoli donne alors sa compacité dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1[\ )$.

Corrigé – *Il suffit ici d'utiliser la caractérisation de la relative compacité par la précompacité et le fait que pour toute fonction bornée sur $[0,1]$, on a $\|g\|_1 \le \|g\|_\infty$.*

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *On utilise encore la caractérisation de la relative compacité par la précompacité. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (8.6), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{A}$ (où f_n est la restriction à $[0,1]$ de $\tilde{f} * \rho_n$). Puis, comme l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1[\ )$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(1)}, \ldots, f^{(p)} \in \mathcal{A}$ t.q. $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_n^{(i)}, \varepsilon)$.*
Soit $f \in \mathcal{A}$, il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f_n \in B(f_n^{(i)}, \varepsilon)$, on a alors

$$\|f - f^{(i)}\|_1 \le \|f - f_n\|_1 + \|f_n - f_n^{(i)}\|_1 + \|f_n^{(i)} - f^{(i)}\|_1 \le 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f^{(i)}, 3\varepsilon)$ et donc que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Exercice 8.10 (Théorème de Kolmogorov, autre énoncé) Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).

On suppose que pour tout $h \in]0,\mathrm{T}[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{\mathrm{T}-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \le \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,\mathrm{T}[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1.

1. Soit $d, h \in]0,\mathrm{T}[$ t.q. $d + h \le \mathrm{T}$. Montrer que

$$\int_0^d |u_n(t)| dt \le \int_0^d |u_n(t+h)| dt + \int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt. \tag{8.7}$$

Corrigé – *Pour tout $t \in]0,d[$ on a $|u_n(t)| \le |u_n(t+h)| + |u_n(t+h) - u_n(t)|$. En intégrant cette inégalité entre 0 et d, on obtient bien (8.7).*

2. Soit $h_0 \in]0,\mathrm{T}[$ et $d \in]0,\mathrm{T}-h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^d |u_n(t)| dt \le d\|u_n\|_1 + h_0\eta(h_0). \tag{8.8}$$

Corrigé – *Comme d'habitude, on choisit pour u_n l'un de représentants, de sorte que $u_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,\mathrm{T}[,\mathcal{B}(]0,\mathrm{T}[),\lambda)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

L'inégalité (8.7) est vraie pour tout $h \in]0,h_0[$. En intégrant (8.7) entre 0 et h_0 et en remarquant que $\int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \le \eta(h) \le \eta(h_0)$ (car $h \le h_0$ et $d \le \mathrm{T} - h_0 \le \mathrm{T} - h$) on obtient

$$\begin{aligned} h_0 \int_0^d |u_n(t)| dt &\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)| dt \Big) dh + \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \Big) dh \\ &\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)| dt \Big) dh + h_0\eta(h_0). \end{aligned}$$

La mesure de Lebesgue est σ-finie et l'application $(t,h) \mapsto u_n(t+h)$ est borélienne de $]0,d[\times]0,h_0[$ dans $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de $(t,h) \mapsto t+h$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto u_n(s)$ qui est borélienne). On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir que

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)| dt \Big) dh &= \int_0^d \Big(\int_0^{h_0} |u_n(t+h)| dh \Big) dt \\ &\le \int_0^d \Big(\int_0^{\mathrm{T}} |u_n(s)| ds \Big) \le d\|u_n\|_1. \end{aligned}$$

On en déduit (8.8).

3. Montrer que $\int_0^d |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord $h_0 \in]0,\mathrm{T}[$ t.q. $\eta(h_0) \le \varepsilon$. Puis, avec $\mathrm{C} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1$, on pose $\delta = \min\{\mathrm{T} - h_0, \varepsilon h_0/\mathrm{C}\}$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \le d \le \delta \Rightarrow \int_0^d |u_n(t)| dt \le 2\varepsilon.$$

On a donc $\int_0^d |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Une démonstration analogue donne aussi que $\int_{\mathrm{T}-d}^{\mathrm{T}} |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n (il suffit de raisonner avec $v_n(t) = u_n(\mathrm{T} - t)$).

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 8.16, qui utilise le prolongement de u_n par 0.]

Corrigé – *On prolonge u_n par 0 hors de $]0,T[$ (et on note toujours u_n la fonction prolongée). Pour appliquer le théorème 8.16, il suffit de montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \to 0 \text{ quand } h \to 0^+, \text{ uniformément par rapport à } n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, on remarque que pour $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} &|u_n(t+h) - u_n(t)|dt \\ &\le \int_{-h}^{0} |u_n(t+h)|dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt + \int_{T-h}^{T} |u_n(t)|dt \\ &= \int_0^h |u_n(t)|dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt + \int_{T-h}^{T} |u_n(t)|dt.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_1 > 0$ t.q. $\eta(h_1) \le \varepsilon$. Puis, avec la question précédente, il existe $h_2 > 0$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \le h \le h_2 \Rightarrow \int_0^h |u_n(t)|dt \le \varepsilon \text{ et } \int_{T-h}^{T} |u_n(t)|dt \le \varepsilon.$$

Avec $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, on a donc (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \le h \le h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le 3\varepsilon.$$

Ceci termine la question.

Devoir 1, exercice 2.29

Exercice 2.29 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnant la longueur) Cet exercice est plus général que le précédent car on veut montrer qu'il n'existe pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, sans l'hypothèse d'invariance par translation de l'exercice précédent.

Soit E un ensemble infini non dénombrable, sur lequel on suppose qu'il existe un ordre total, noté $\leq$, tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble $\{y \in \mathrm{E}; y \leq x\}$ est dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une application f_x injective de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathrm{E} = [0,1]$, on peut démontrer l'existence d'un tel ordre (ceci est une conséquence de l'axiome du continu). Soit m une mesure sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$; on suppose que m est finie, *i.e.* $m(\mathrm{E}) < +\infty$, et diffuse. On se propose de montrer que m est nulle, *i.e.* $m(\mathrm{A}) = 0$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. On pose, pour $x \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_{x,n} = \{y \in \mathrm{E}; y > x \text{ et } f_y(x) = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x,y \in \mathrm{E}$, $x \neq y$, et $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_{x,n} \cap \mathrm{A}_{y,n} = \emptyset$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathrm{E}; m(\mathrm{A}_{x,n}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable (utiliser le fait que m est finie).

   Corrigé – *Soient $x,y \in \mathrm{E}$, $x \neq y$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathrm{A}_{x,n} \cap \mathrm{A}_{y,n} \neq \emptyset$. Soit $z \in \mathrm{A}_{x,n} \cap \mathrm{A}_{y,n}$. Comme $z \in \mathrm{A}_{x,n}$, on a $z > x$ et $f_z(x) = n$. De même, comme $z \in \mathrm{A}_{y,n}$, on a $z > y$ et $f_z(y) = n$. On a donc $f_z(x) = f_z(y)$ et, comme f_z est injective, $x = y$, en contradiction avec l'hypothèse.*

   On en déduit bien que $\mathrm{A}_{x,n} \cap \mathrm{A}_{y,n} = \emptyset$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\{x \in \mathrm{E}; m(\mathrm{A}_{x,n}) \neq 0\} = \cup_{p \in \mathbb{N}^*} \mathrm{C}_p$ avec $\mathrm{C}_p = \{x \in \mathrm{E}; m(\mathrm{A}_{x,n}) > 1/p\}$ puis que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, C_p est de cardinal fini. En effet, si $x_1, \ldots, x_q \in \mathrm{C}_p$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, on a

   $$\mathrm{E} \supset \cup_{i=1}^{q} \mathrm{A}_{x_i,n},$$

   et donc par monotonie et additivité de m,

   $$m(\mathrm{E}) \geq \sum_{i=1}^{q} m(\mathrm{A}_{x_i,n}) \geq \frac{q}{p},$$

   ce qui donne $q \leq pm(\mathrm{E})$ et donc que C_p a un nombre fini éléments. L'ensemble $\{x \in \mathrm{E}; m(\mathrm{A}_{x,n}) \neq 0\}$ est donc au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables (et même finis dans le cas présent).

2. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$.

   Corrigé – *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{B}_n = \{x \in \mathrm{E}; m(\mathrm{A}_{x,n}) \neq 0\}$. La question précédente montre que B_n est au plus dénombrable. L'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n$ est donc aussi au plus dénombrable. Comme E est infini non dénombrable, il existe donc $x \in \mathrm{E}$ tel que $x \notin \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n$. Pour cet élément x de E on a donc $m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. En déduire que m est nulle (montrer pour cela que $m(\mathrm{E}) = 0$ en utilisant la question précédente et le fait que m est diffuse).

Corrigé – *On choisit* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On peut écrire* $\mathrm{E} = \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ *avec* $\mathrm{B} = \{y \in \mathrm{E};\, y \le x\}$ *et* $\mathrm{C} = \{y \in \mathrm{E};\, y > x\}$. *L'ensemble* B *est dénombrable. Comme* m *est diffuse, on a donc* $m(\mathrm{B}) = 0$.

On montre maintenant que $\mathrm{C} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_{x,n}$ *(et donc, par* σ*-sous-additivité de* m, $m(\mathrm{E}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$*). On a* $\mathrm{A}_{x,n} \subset \mathrm{C}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Pour montrer l'inclusion inverse, soit* $y \in \mathrm{C}$, *c'est-à-dire* $y \in \mathrm{E}$, $y > x$. *Comme* f_y *est une application de* $\{z \in \mathrm{E}; z < y\}$ *dans* $\mathbb{N}$, *on a* $f_y(x) \in \mathbb{N}$. *Il existe donc* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $f_y(x) = n$, *c'est-à-dire* $y \in \mathrm{A}_{x,n}$. *On a donc bien* $\mathrm{C} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_{x,n}$.
On en déduit $m(\mathrm{C}) = 0$ *et donc* $m(\mathrm{E}) = m(\mathrm{B}) + m(\mathrm{C}) = 0$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Corrigé – *On suppose qu'il existe une mesure* m *sur* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *telle que* $m(]a,b[) = b-a$ *pour tout* $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Par continuité croissante de m, *on a*
$$m([0,1]) = \lim_{n\to+\infty} m(]+1/n, 1-1/n[) = 1.$$
Par continuité décroissante de m, *on a, pour tout* $a \in \mathbb{R}$,
$$m(\{a\}) = \lim_{n\to+\infty} m(]a-1/n, a+1/n[) = 0.$$
On choisit $\mathrm{E} = [0,1]$. *La restriction de* m *à* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *est donc une mesure finie et diffuse. La question précédente nous donne donc que* m *est nulle, en contradiction avec* $m(\mathrm{E}) = 1$.

Devoir 1, exercice 3.30

Exercice 3.31 (suite bornée et convergence en mesure) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$.
On suppose aussi qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq M$ p.p.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\{|f| \geq M + \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n| > M\}$. En déduire que $|f| < M + \varepsilon$ p.p..

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in E$, on a $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$. On a donc*
   $$\{|f_n - f| < \varepsilon\} \cap \{|f_n| \leq M\} \subset \{|f| < M + \varepsilon\}.$$
   En passant au complémentaire, on en déduit
   $$\{|f| \geq M + \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n| > M\}.$$
   Par monotonie de m, on en déduit
   $$m(\{|f| \geq M + \varepsilon\} \leq m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) + m(\{|f_n| > M\}). \tag{3.14}$$
   Comme $|f_n| \leq M$ p.p., on a $m(\{|f_n| > M\}) = 0$. En faisant maintenant $n \to +\infty$ dans (3.14)*, la convergence en mesure de f_n vers f nous donne que $m(\{|f| \geq M + \varepsilon\} = 0$, et donc $|f| < M + \varepsilon$ p.p..*

2. Montrer que $|f| \leq M$ p.p..

   Corrigé – *Il suffit de remarquer que*
   $$\{|f| > M\} = \cup_{p\in\mathbb{N}^*}\{|f| \geq M + \frac{1}{p}\}.$$
   La σ-sous-additivité de m donne alors $m(\{|f| > M\}) \leq \sum_{p\in\mathbb{N}^*} m(\{|f| \geq M + 1/p\})$. La question précédente donne $m(\{|f| \geq M + 1/p\}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $m(\{|f| > M\}) = 0$, ce qui donne bien $|f| \leq M$ p.p..

Devoir 1, exercice 4.9

Exercice 4.9 (Majoration d'une fonction intégrable décroissante) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que f est borélienne (et donc borélienne positive).

   Corrigé – *Soit $\alpha > 0$. comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$ l'ensemble $f^{-1}([\alpha,+\infty[)$ est un intervalle du type $]0,\beta[$ ou $]0,\beta]$ (avec $\beta \geq 0$), c'est donc un borélien. Si $\alpha \leq 0$, on a $f^{-1}([\alpha,+\infty[) = \mathbb{R}$, qui est aussi un borélien. Comme l'ensemble des intervalles $[\alpha,+\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est borélienne.*

2. On suppose que $\int f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq \mathrm{C}/x$ pour tout $x > 0$.

   Corrigé – *Soit $x > 0$. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ on a $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in]0,x[$ et donc $|f| \geq f(x)1_{]0,x]}$. En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}$, on en déduit $xf(x) \leq \|f\|_1$, ce qui est l'inégalité demandée avec $\mathrm{C} = \|f\|_1$.*

3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on retire l'hypothèse de décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (même si f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$).

   Corrigé – *Il suffit de prendre une fonction f intégrable, positive, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Un tel exemple est $f = \sum_{n>2} \varphi_n$ avec*

$$\varphi_n(x) = n^2(x - n + \frac{1}{n^2}) \text{ si } n - \frac{1}{n^2} \leq x \leq n,$$

$$\varphi_n(x) = -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}) \text{ si } n < x \leq n + \frac{1}{n^2},$$

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [n - \frac{1}{n^2}, [n + \frac{1}{n^2}].$$

Devoir 1, exercice 4.25 (écrit de manière légèrement plus détaillée)

Exercice 4.25 (Convergence p.p. et convergence vague)
On note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{B}_n=\cup_{i=0}^{n-1}]\frac{i}{n},\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}[$ et on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n=n^2 1_{\mathrm{B}_n}$.

1. Montrer que $f_n\in\mathcal{L}^1$ et que $\|f_n\|_1=1$.

Corrigé – *L'ensemble* B_n *est un borélien et donc* f_n *est borélienne positive. on a ensuite, par* σ- *additivité de* λ,

$$\int f_n d\lambda = n^2\lambda(\mathrm{B}_n)=n^2\sum_{i=0}^{n-1}\lambda(]\frac{i}{n},\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}[)=n^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n^3}=1.$$

On a donc $f_n\in\mathcal{L}^1$ *et* $\|f_n\|_1=1$ *(ce qui est équivalent à dire* $\lambda(\mathrm{B}_n)=n^2$*).*

2. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{C}_p=\cup_{q=p}^{+\infty}\mathrm{B}_q$. Soit $x\in\mathrm{C}_p^c$. Montrer que $f_n(x)\to 0$ quand $n\to+\infty$.

Corrigé – $\mathrm{C}_p^c=\cap_{q=p}^{+\infty}\mathrm{B}_q^c$. *Pour tout* $q>p$, *on a donc* $x\in\mathrm{B}_q^c$ *et donc* $f_q(x)=0$. *On en déduit bien que* $\lim_{q\to+\infty}f_q(x)=0$.

3. Montrer que $f_n\to 0$ p.p., quand $n\to+\infty$.

Corrigé – *Avec les notations de la question précédente, on a* $\lim_{n\to+\infty}f_q(x)=0$ *pour tout* $x\in\cup_{p\in\mathbb{N}^*}\mathrm{C}_p^c$, *c'est-à-dire pour tout* $x\in\mathrm{C}^c$ *avec* $\mathrm{C}=\cap_{p\in\mathbb{N}^*}\mathrm{C}_p$. *Pour en déduire que* $f_n\to 0$ *p.p., il suffit de montrer que* $\lambda(\mathrm{C})=0$.
Soit $p\in\mathbb{N}^*$. *En utilisant la monotonie et la* σ*-sous-additivité de* λ, *on a*

$$\lambda(\mathrm{C})\le\lambda(\mathrm{C}_p)\le\sum_{q=p}^{+\infty}\lambda(\mathrm{B}_q)\le\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{1}{q^2}.$$

Comme $\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\to 0$ *quand* $p\to+\infty$, *on en déduit* $\lambda(\mathrm{C})=0$ *et donc* $f_n\to 0$ *p.p..*

4. Soit $\varphi\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int f_n\varphi d\lambda-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})=\sum_{i=0}^{n-1}n^2\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}}(\varphi(x)-\varphi(\frac{i}{n}))dx\to 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

En déduire que $\displaystyle\int f_n\varphi d\lambda\to\int_0^1\varphi(x)dx$ quand $n\to+\infty$.

Corrigé – *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\int f_n\varphi d\lambda=n^2\int_{\mathrm{B}_n}\varphi d\lambda=n^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}}\varphi(x)dx,$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})=\sum_{i=0}^{n-1}n^2\varphi(\frac{i}{n})\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}}dx.$$

On en déduit bien que $\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} (\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n}))dx$.

On pose maintenant $\delta_n = \max\{|\varphi(x) - \varphi(y)|,\ x, y \in [0,1],\ |x-y| \le 1/n\}$, *de sorte que* $|\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n})| \le \delta_n$ *si* $i/n \le x \le i/n + 1/n^3$. *On a donc*

$$|\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})| \le \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} |\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n})| dx \le \delta_n.$$

Comme $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *la fonction* φ *est uniformément continue sur* $[0,1]$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. *Ceci donne bien*

$$\lim_{n\to+\infty} |\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})| = 0.$$

Comme φ *est continue sur* $[0,1]$, *il est bien connu que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \int_0^1 \varphi(x)dx$ *(voir le Chapitre 1). On a donc* $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \varphi d\lambda = \int_0^1 \varphi(x)dx$.

5. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Corrigé – *Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *En effet, on a* $f_n \to 0$ *p.p.. Si le théorème de convergence dominée pouvait être appliqué à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *il donnerait, en particulier,* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$, *ce qui est faux.*