Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

LICENCE 3 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE. MATHEMATIQUES GENERALES. L3MiMG.

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
11	**2L3MAT**	**SMI5U1T**	**5**

Nom de l'UE : Intégration et transformée de Fourier (UE 5-3)

- Contenu de l'envoi : Chapitres 8 et 10

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 :
Etudier le chapitre 8, sections 8.1 (densité) et 8.2 (séparabilité)
Exercices proposés (avec corrigés) : 8.3, 8.4, 8.6

Semaine 2 :
Etudier le chapitre 8, section 8.3 (compacité)
Exercices proposés (avec corrigés) : 8.7, 8.8, 8.9

Semaine 3 :
Etudier le chapitre 10, sections 10.1, 10.2 (Fourier dans L1)
Exercices proposés (avec corrigés) : 10.1, 10.2

Semaine 4 :
Etudier le chapitre 10, section 10.4 (Fourier dans L2)
Exercices proposés (avec corrigés) : 10.4, 10.7

-Coordonnées de l'enseignant responsable de l'envoi

T. Gallouet, LATP-CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13.
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr

Vous pouvez aussi consulter la page web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/int
et me poser des questions par email.

Chapitre 8

Densité, séparabilité et compacité

Ce chapitre est consacré en majeure partie aux espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω, λ_N désigne la restriction à $\mathcal{B}(\Omega)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (aussi notée λ_N) et $1 \leq p \leq \infty$.
On notera toujours $L^p(\Omega) = L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$.

8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$

Nous avons vu au chapitre précédent que les espaces L^p sont très intéressants car ils sont en particulier complets. Cependant, les éléments de ces espaces sont des objets avec lesquels il est malaisé de travailler. Pour démontrer des propriétés sur ces objets, on travaille très souvent par densité : on travaille sur des fonctions régulières, qui sont faciles à manipuler, et on passe ensuite à la limite, à condition d'avoir établi au préalable un résultat de densité, qui nous permet justement ce passage à la limite.

8.1.1 Densité des fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

Définition 8.1 (Fonction à support compact) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* f *est à support compact (dans* Ω*) s'il existe un compact* $K \subset \Omega$ *tel que* $f = 0$ *sur* $\Omega \setminus K$.

On note souvent $\mathrm{supp}(f)$ l'adhérence dans Ω de l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $\mathrm{supp}(f)$ est compact.

Définition 8.2 ($C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *si*

- f *est de classe* C^∞ *(de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*).*
- f *est à support compact (dans* Ω*).*

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 8.3 Si $\mathrm{N} = 1$ et $\Omega =]0,1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0,1[$ t.q. f soit nulle en dehors de ce compact.

Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0,\varepsilon[$ et pour $x \in]1-\varepsilon,1[$, alors $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

Théorème 8.4 (Densité de $\mathrm{C}_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *(par exemple,* $\Omega = \mathbb{R}^\mathrm{N}$*). Alors :*

$\mathrm{C}_c(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *c'est-à-dire :*

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega,\mathbb{R}) \text{ t.q. } \|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat est faite dans l'exercice 6.4 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$. La généralisation donnée ici se démontre de manière très voisine (grâce au résultat de régularité, proposition 7.17), voir l'exercice 8.1. ■

Une conséquence importante du théorème 8.4 est la continuité en moyenne que l'on donne maintenant.

Théorème 8.5 (Continuité en moyenne) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$*,et* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. *Alors,* $\|f(\cdot+h) - f\|_p \to 0$ *quand* $h \to 0$*, c'est-à-dire :*

$$\int |f(x+h) - f(x)|^p dx \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

La démonstration est ici encore très similaire à la démonstration vue pour $\mathrm{N} = 1$ dans l'exercice 6.4, elle est proposée dans l'exercice 8.2.

Remarque 8.6 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞. Considérer par exemple le cas $\mathrm{N} = 1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, en confondant f avec sa classe). On peut montrer que (voir l'exercice 8.4) :

$$\forall \varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2},$$
$$\forall h > 0,\ \|f(\cdot+h) - f\|_\infty = 1.$$

8.1.2 Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Définition 8.7 ($\mathrm{L}^1_{\mathbf{loc}}$) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. *Soit* $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$. *On définit que* f *est localement intégrable sur* Ω *si* $f 1_\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *t.q.* $f = g$ *p.p. sur* K*") pour tout compact* $\mathrm{K} \in \Omega$. *On note* $\mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)(= \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),\lambda_\mathrm{N}))$ *l'ensemble des fonctions localement intégrables sur* Ω.

Remarque 8.8 Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (ceci est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p, proposition 6.25).

Définition 8.9 (Famille régularisante) *Soit* $N \geq 1$ *et soit* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *t.q.* $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N\ ;\ \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$ *et* $\int \rho(x)dx = 1$. *On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *définie par :* $\rho_n(x) = n^N \rho(nx), x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 8.10 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que

$$\{x \in \mathbb{R}^N\ ;\ \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{\frac{1}{n}} \text{ et } \int \rho_n(x)dx = 1.$$

Notons qu'il existe bien des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ dans la définition 8.9. Pour $N = 1$, par exemple, il suffit de prendre

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha \exp(\frac{1}{x^2-1}) \text{ si } x \in]-1,1[, \\ 0 \text{ si } x \notin]-1,1[, \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ choisi pour avoir $\int \rho(x)dx = 1$.

Lemme 8.11 (Régularisation par convolution) *Soient* $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante et* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $f * \rho_n$ *est définie partout sur* $\mathbb{R}^N$ *et* $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. *De plus, s'il existe* $a > 0$ *t.q.* $f = 0$ *p.p. sur* B_a^c, *on a alors* $f * \rho_n = 0$ *sur* $B^c_{a+\frac{1}{n}}$ *(*$f * \rho_n$ *est donc à support compact).*

DÉMONSTRATION – La démonstration du fait que $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est donnée dans l'exercice 7.20. La seconde partie est donnée dans les exercices 7.20 et 7.19. L'indication de la seconde question de l'exercice 7.19 donne le support indiqué ici pour $f * \rho_n$. ∎

Proposition 8.12 *Soit* $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante. Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Alors,*

$$f * \rho_n \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence du théorème de continuité en moyenne (théorème 8.5). On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f * \rho_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x) \int \rho_n(y))dy \\ &= \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)dy, \end{aligned}$$

et donc :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy)^p.$$

Pour $p > 1$, on utilise l'inégalité de Höder en écrivant $\rho_n = \rho_n^{\frac{1}{p}} \rho_n^{\frac{1}{q}}$ (avec $q = p/(p-1)$) et on obtient (ce qui est aussi immédiatement vrai pour $p = 1$) :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy (\int \rho_n(y)dy)^{\frac{p}{q}} \tag{8.1}$$

$$\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy. \tag{8.2}$$

On remarque maintenant que l'application $(x,y)^t \mapsto (f(y)-f(x))$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (munis de leurs tribus boréliennes respectives) ; ceci est une conséquence (par exemple) de la proposition 7.11 et de la mesurabilité de la somme d'applications mesurables. L'application $(x,y)^t \mapsto (x,x-y)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (car continue). Par composition, l'application $(x,y)^t \mapsto (f(x-y)-f(x))$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit, en utilisant une nouvelle fois la mesurabilité de la composée d'applications mesurables (et du produit d'applications mesurables), que $(x,y)^t \mapsto |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)$ est mesurable (positive) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour déduire de (8.2) que :

$$\begin{aligned}\int |f_n(x)-f(x)|^p dx &\le \int \Big(\int |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)dy\Big)dx \\ &= \int \Big(\int |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)dx\Big)dy \\ &= \int_{B_{\frac{1}{n}}} \|f(\cdot-y)-f\|_p^p \rho_n(y)dy.\end{aligned} \tag{8.3}$$

On utilise maintenant le théorème 8.5. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}^N,\ |h| \le \eta \ \Rightarrow \|f(\cdot-h)-f\|_p \le \varepsilon.$$

On déduit donc de (8.3) que :

$$\frac{1}{n} \le \eta \Rightarrow \|f_n - f\|_p \le \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

Les deux résultats précédents permettent de démontrer le théorème de densité suivant :

Théorème 8.13 (Densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Soient* $N \ge 1$ *et* $p \in [1,+\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration proposée ici utilise une méthode dite de troncature et régularisation.

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on dit que f est à support compact s'il existe K compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c. On note A l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à support compact.

Etape 1. On montre dans cette étape que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{B_n}$. Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$ et $|f_n| \le |f|$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p (on utilise ici le fait que $p < \infty$). Il donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, on a bien montré la densité de A dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2. Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Or cette suite est donné avec $f_n = f * \rho_n$ où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille régularisante. En effet, le lemme 8.11 donne que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ et la proposition 8.12 donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. ∎

On rappelle (remarque 8.6) que $C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (et donc aussi $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$) n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Il est intéressant aussi de remarquer que le théorème précédent (théorème 8.13) est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$), finie sur les compacts. Toutefois la démonstration donnée ici doit alors être modifiée. Ceci est fait dans l'exercice 7.15 pour $p = 1$ (et la généralisation pour traiter tous les cas $p \in [1,\infty[$ est assez simple).

8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 8.14 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Alors,* $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

DÉMONSTRATION – Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on pose $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N ; d(x,\Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On remarque d'abord (en utilisant, comme pour le théorème précédent, le théorème de convergence dominée dans L^p) que $f 1_{K_n} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \varepsilon$.

On pose maintenant $g = f_{n_0}$. On peut considérer que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $g = 0$ p.p. sur K^c avec $K = K_{n_0}$. En prenant une famille régularisante, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le lemme 8.11 et la proposition 8.12 donnent que $g * \rho_n \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$ et $(g * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Il suffit alors de remarquer que la restriction de $g * \rho_n$ à Ω est à support compact dans Ω dès que $n > n_0$ pour conclure la démonstration. ■

Ici aussi, le théorème 8.14 est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les compacts. La démonstration donnée ici doit alors être modifiée (voir l'exercice 7.15).

8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$

Proposition 8.15 *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* p *tel que* $1 \leq p < +\infty$. *Alors, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est séparable.*

La démonstration fait l'objet de l'exercice 8.5 (et de 6.5 pour le car $\Omega = \mathbb{R}$).
Les espaces du type L^∞ ne sont, en général, pas séparables. L'exercice 8.6 montre que, par exemple, $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$ n'est pas séparable. Une adaptation simple de la démonstration de l'exercice 8.6 montre aussi que l'espace $C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$), muni de la norme de la convergence uniforme, n'est pas séparable. Par contre l'espace $C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 quand le norme de la variable tend vers l'infini), muni de la même norme, est séparable. Ceci est une conséquence des deux premières questions de l'exercice 8.5 (car C_c est dense dans C_0).

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité séquentielle est équivalente à la notion de compacité de Borel -Lebesgue (*i.e.* de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique (ce qui est notre cas, car E est un espace vectoriel normé).

Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore s'il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).

Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par un théorème de Riesz (différent des deux théorèmes de Riesz donnés dans ce livre !) que la boule unité fermée d'un e.v.n. E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$ (Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$), espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \le p < +\infty$ et Ω bornée, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.16 (Kolmogorov) *Soit $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \le p < +\infty$; on considère ici l'espace mesuré $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Soit $A \subset L^p(\Omega)$; A est relativement compacte si et seulement si :*

1. Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|f\|_p \le C$ pour tout $f \in A$,

2. la partie A est équicontinue en moyenne, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\text{pour tout } f \in A,\ |h| \le \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_p \le \varepsilon,$$

3. la partie A est équi-petite à l'infini, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$, t.q.

$$\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p dm \le \varepsilon \text{ pour tout } f \in A,$$

où $\tilde{f}$ est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$ et le théorème d'Ascoli que nous rappelons ci après (théorème 8.17). Elle est laissée à titre d'exercice, le cas $p = 1$ et $\Omega =]0, 1[$ est donné dans l'exercice 8.9. ■

Dans le cas où Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, le théorème 8.16 peut s'énoncer plus simplement sans introduire $\tilde{f}$. Ceci est développé dans l'exercice 8.10.

Théorème 8.17 (Ascoli) *Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e. $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall\ x, y \in K, |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon, \forall\ f \in A$.*

Corollaire 8.18 *Soient $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. On suppose que la famille $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov. On peut alors extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^p(\Omega)$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.*

8.4 Compacité faible-$*$

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible-$*$ dans le dual d'un espace de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.19 (Compacité faible-$*$ séq. des bornés de E' si E est séparable) *Soit F un espace de Banach séparable et F' son dual topologique. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de F'. Alors, il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $T \in F'$ t.q. la sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T $*$-faiblement dans F' (i.e. $T_{n_k}(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) pour tout élément u de F.)*

DÉMONSTRATION – La démonstration va se faire en trois étapes. L'étape principale est probablement la deuxième étape (qui décrit le procédé diagonal).

On commence par remarquer que, comme F est séparable, il existe une partie A de F, dénombrable et dense. Comme A est dénombrable, il existe uns suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $A = \{f_p, p \in \mathbb{N}^*\}$. On note aussi $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{F'}$ (on a $C < +\infty$ car la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F').

Etape 1. Dans cette première étape, on montre, par récurrence, l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

L'existence de ψ_1 découle du fait que la suite $(T_n(f_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ (en effet, on a $|T_n(f_1)| \le C\|f_1\|_F$). Puis, pour $p \ge 1$, en supposant $\psi_1,\ldots,\psi_p$ construits, on utilise le fait que la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On obtient l'existence d'une application strictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}(n)}(f_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 2 (procédé diagonal). On note φ_n l'application $\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n$. La deuxième étape consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \varphi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On va montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)) = \varphi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite de la suite $(T_{\varphi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $n = p$. Ceci prouve que $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 3. On utilise maintenant la densité de A dans F. L'étape 2 nous donne, pour tout $g \in A$, la convergence dans $\mathbb{R}$ de la suite $(T_{\psi(n)}(g))_{n\in\mathbb{N}}$. La densité de A dans F et le fait que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F' nous permet d'en déduire que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in F$. En effet, soit $f \in F$. Pour tout $g \in A$ et tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$|T_{\psi(n)}(f) - T_{\psi(m)}(f)| \le 2C\|f - g\|_F + |T_{\psi(n)}(g) - T_{\psi(m)}(g)|.$$

On en déduit facilement que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc est convergente.

Pour tout $f \in F$, on note $T(f)$ la limite (dans $\mathbb{R}$) de la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$. Comme les applications T_n sont linéaires, l'application T est aussi linéaire (de F dans $\mathbb{R}$). Puis, comme $\|T_n\|_{F'} \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $|T(f)| \le C\|f\|_F$ pour tout $f \in F$. On a donc $T \in F'$ et, finalement, $T_{\psi(n)} \to T$ $*$-faiblement dans F', quand $n \to +\infty$. Ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 8.19 s'applique aux suites bornées de $L^\infty(\Omega)$. En effet, grâce au théorème 6.70 et à la proposition 8.15, l'espace $L^\infty(\Omega)$ peut être identifié au dual de l'espace $L^1(\Omega)$, qui est un espace séparable (Ω est ici un borélien de $\mathbb{R}^N$). On a donc, par exemple, le résultat suivant :

Proposition 8.20 (Compacité faible-$*$ séquentielle des bornés de L^∞) *Soit $d \ge 1$. On note L^∞ l'espace $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty$ t.q. $u_n \to u$ $*$-faiblement dans L^∞.*

Dans le cas $p \in]1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.21 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p) *Soit $d \geq 1$ et soit $p \in]1,+\infty[$. On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p, i.e. telle qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in \mathrm{L}^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p, c'est-à-dire t.q. $\int (u_n v - uv)dm \to 0$ pour tout $v \in \mathrm{L}^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.*

On donne maintenant une conséquence, très utile pour les probabilités, de la proposition 8.19. Cette conséquence a déjà été évoquée dans la remarque 6.95.

Proposition 8.22 (Convergence étroite d'une suite tendue) *Soit $d \geq 1$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) < +\infty$. Il existe alors une sous-suite, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ notée m t.q.*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

De plus, si la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, on a alors $m_n \to m$ étroitement. (Ce dernier résultat est aussi vrai si on remplace l'hypothèse "$(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue" par "$m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$").

DÉMONSTRATION – On rappelle que $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \varphi(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty\}$. On munit $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|\varphi\|_u = \sup\{|\varphi(x)|, x \in \mathbb{R}^d\}$. L'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, muni de cette norme, est un espace de Banach séparable (alors que l'espace $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ muni de cette même norme n'est pas séparable).

On note E l'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (muni de la norme de la convergence uniforme). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{L}_n(\varphi) = \int \varphi dm_n$. La suite $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans E', car on a

$$\|\mathrm{L}_n\|_{\mathrm{E}'} \leq m_n(\mathbb{R}^d).$$

Il existe donc une sous-suite de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $\mathrm{L} \in \mathrm{E}'$ t.q.

$$\int \varphi dm_n \to \mathrm{L}(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{E}.$$

L'application L est donc une application linéaire positive (c'est-à-dire $\varphi \geq 0 \Rightarrow \mathrm{L}(\varphi) \geq 0$) de E dans $\mathbb{R}$. D'après le chapitre 5, il existe alors une mesure finie m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $\mathrm{L}(\varphi) = \int \varphi dm$ pour tout $\varphi \in \mathrm{E}$ (en fait le théorème 5.12 donne ce résultat pour $d = 1$, la démonstration est semblable pour $d > 1$). Ceci donne bien le résultat annoncé, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

Il est intéressant de noter que si m_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ une probabilité, la mesure m n'est pas forcément une probabilité et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut ne pas converger étroitement vers m. (Un exemple pour $d = 1$ consiste à prendre $m_n = \delta_n$ et $m = 0$.)

Toutefois, si on suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (ou si on suppose que $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$), la proposition 6.94 (ou la proposition 6.87 pour le cas $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$) donne la convergence étroite de m_n vers m, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

■

Du point de vue des probabilités, la conséquence de la proposition 8.22 est que si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. dont la suite des lois est tendue, il existe alors une v.a.r. X et une sous-suite de la suite X_n telle que cette sous-suite converge en loi vers X (cf. proposition 9.21 pour le cas de vecteurs aléatoires).

8.5 Exercices

Exercice 8.1 (Densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) Soient, $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon$. [Reprendre la démonstration de l'exercice 6.4 qui traite le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Utiliser le résultat de régularité, proposition 7.17.]

Exercice 8.2 (Continuité en moyenne) Soient $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$. [Reprendre la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4]

Exercice 8.3 (Convergence après translation)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, $N \geq 1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $u \in L^p$ tel que $u_n \to u$ dans L^p. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

1. On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que $u_n(\cdot+h_n)-u = u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)+u(\cdot+h_n)-u$ et donc*
$$\|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq \|u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)\|_p + \|u(\cdot+h_n)-u\|_p.$$
Comme $\|u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)\|_p = \|u_n-u\|_p$, on a donc
$$\|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq \|u_n-u\|_p + \|u(\cdot+h_n)-u\|_p.$$
Soit $\varepsilon > 0$, comme $u_n \to u$ dans L^p, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n-u\|_p \leq \varepsilon.$$
Puis, comme $u \in L^p$, la continuité en moyenne (théorème 8.5) donne l'existence de $\delta > 0$ tel que
$$|h| \leq \delta \Rightarrow \|u(\cdot+h)-u\|_p \leq \varepsilon.$$
Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|h_n| \leq \delta$ pour $n \geq n_2$. On a donc
$$n \geq \max\{n_1,n_2\} \Rightarrow \|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq 2\varepsilon.$$
Ce qui prouve bien que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

2. On suppose $p = +\infty$. Donner un exemple pour lequel $u_n(\cdot+h_n) \not\to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (on pourra se limiter a $N = 1$).

Corrigé – *Il suffit de prendre $u_n = u$ pour tout n et, par exemple, $u = 1_{\mathbb{R}_+}$. Pour tout $h \neq 0$, on a $\|u(\cdot+h)-u\|_\infty = 1$. Il suffit donc de prendre, par exemple, $h_n = 1/n$.*

Exercice 8.4 (Non densité de C_c dans L^∞) On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Corrigé – *Soit $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On va montrer que $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$ (ce qui donne bien finalement $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$). fdecc*

Soit donc $0 < \varepsilon < 1/2$.

On suppose tout d'abord que $\varphi(0) \geq \frac{1}{2}$. Il existe alors, par continuité de φ, $\delta > 0$ t.q. $\varphi(x) \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ pour tout $x \in [-\delta,0]$. On a donc $\varphi(x)-f(x) \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ pour presque tout $x \in [-\delta,0]$, ce qui prouve que $\lambda(\{|\varphi-f| \geq \frac{1}{2}-\varepsilon\}) \geq \lambda([-\delta,0]) = \delta > 0$. On a donc $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$.

On suppose maintenant que $\varphi(0) \leq \frac{1}{2}$. De manière analogue, il existe $\delta > 0$ t.q. $\varphi(x) \leq \frac{1}{2}+\varepsilon$ pour tout $x \in [0,\delta]$. On a alors $f(x)-\varphi(x) \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$ pour presque tout $x \in [0,\delta]$, ce qui prouve que $\lambda(\{|f-\varphi| \geq \frac{1}{2}-\varepsilon\}) \geq \lambda([0,\delta]) = \delta > 0$. On a donc aussi $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}-\varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a bien montré que $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}*$.

Corrigé – *Pour $h > 0$, on a $|f(\cdot+h)-f(\cdot)| = 1$ p.p. sur $[-h,0]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([-h,0]) = h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair que $|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$.*

Pour $h < 0$, on a $|f(\cdot+h)-f(\cdot)|_\infty = 1$ p.p. sur $[0,-h]$ et donc $\lambda(\{|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([0,-h]) = -h > 0$, ce qui prouve que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty \geq 1$. Comme il est clair aussi que $|f(\cdot+h)-f(\cdot)| \leq 1$ p.p., on a finalement $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$.

Exercice 8.5 (Séparabilité de $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) Soient $\mathrm{N} \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $q = 0,1,\ldots,2n^2-1$, on note : $\mathrm{I}_q^n = [-n+\frac{q}{n}, -n+\frac{q+1}{n}[$. On pose : $\mathrm{A}_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{\mathrm{I}_q^n} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n,n[^c\}$. On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A $f \in \mathrm{A}_n$, on associe l'ensemble des valeurs prises par f sur les intervalles I_q^n, $q = 0,1,\ldots,2n^2-1$. On construit ainsi une bijection de A_n dans $\mathbb{Q}^{2n^2}$, ce qui prouve que A_n est dénombrable car $\mathbb{Q}^{2n^2}$ est dénombrable.*

On en déduit que A est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

2. Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathrm{A}$ t.q. $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$.

Corrigé – *Soit $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$.*

Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ sur $[-a,a]^c$.

Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ t.q. $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

On choisit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geq a$ et $1/n \leq \delta$. On construit alors $g \in \mathrm{A}_n$ de la manière suivante :

$$g(x) = 0, \text{ si } x \in [-n,n[^c,$$
$$g(x) = r_q, \text{ si } x \in [-n+\tfrac{q}{n}, -n+\tfrac{q+1}{n}[,\ q \in \{0,1,\ldots,2n^2-1\},$$

avec $r_q \in \mathbb{Q}$ t.q. $|f(-n+\frac{q}{n})-r_q| \leq \varepsilon$ et $r_q = 0$ si $f(-n+\frac{q}{n}) = 0$.

On a $g \in \mathrm{A}$ (car $g \in \mathrm{A}_n$), $|g(x)-f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout x et $|g(x)-f(x)| = 0$ si $x \in [-a-1,a+1]^c$. On en déduit :

$$\int |g(x)-f(x)|^p dx \leq 2(a+1)2^p\varepsilon^p.$$

On peut donc trouver $g \in \mathrm{A}$ arbitrairement proche de f en norme L^p.

3. Conclure par la densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.4).

Corrigé – *Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 8.4, il existe $g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|g-f\|_p \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe $h \in \mathrm{A}$ t.q. $\|g-h\|_p \leq \varepsilon$. On a donc $\|f-h\|_p \leq 2\varepsilon$. Ce qui prouve que A est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Comme A est dénombrable, on en déduit que $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ est séparable.*

Exercice 8.6 (Non séparabilité de $\mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathrm{T},\lambda)$) On note B l'ensemble des f appartenant à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R},\mathrm{T},\lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B.]

Corrigé – *Soit P une partie $\mathbb{N}$. On construit $\varphi(\mathrm{P}) \in \mathrm{B}$ en prenant $\varphi(\mathrm{P}) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$ si $n \in \mathrm{P}$, $\varphi(\mathrm{P}) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ si $n \notin \mathrm{P}$ et $\varphi(\mathrm{P}) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*

φ est bien injective car, si $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$, il existe $n \in \mathrm{P}$ t.q. $n \notin \mathbb{Q}$ (ou il existe $n \in \mathrm{Q}$ t.q. $n \notin \mathcal{P}$). On a alors $\varphi(\mathrm{P}) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$ et $\varphi(\mathrm{Q}) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ (ou $\varphi(\mathrm{P}) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ et $\varphi(\mathrm{Q}) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$). On en déduit que $\|\varphi(\mathrm{P})-\varphi(\mathrm{Q})\|_\infty \geq 1$ car $\lambda(]n,n+1[) > 0$, et donc $\varphi(\mathrm{P}) \neq \varphi(\mathrm{Q})$.

Comme $\mathcal{P}(\mathrm{N})$ est non dénombrable (et non fini), l'ensemble B est aussi non dénombrable (et non fini).

2. Soit A une partie dense de $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},T,\lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \le \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A.

Corrigé – *Soit $f \in B$. Par densité de A dans $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},T,\lambda)$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \le \frac{1}{4}$. On peut donc construire (grâce à l'axiome du choix) une application ψ de B dans A t.q. $\|f-\psi(f)\|_\infty \le \frac{1}{4}$ pour tout $f \in B$.*

On monte maintenant que ψ est injective. En effet, soit $f_1, f_2 \in B$ t.q. $\psi(f_1)=\psi(f_2)$. On a alors, avec $g=\psi(f_1)=\psi(f_2)$, $\|f_1-f_2\|_\infty \le \|f_1-g\|_\infty + \|f_2-g\|_\infty \le \frac{1}{2}$. Ceci prouve que $f_1=f_2$ car $\|f_1-f_2\|_\infty \ge 1$ si $f_1 \ne f_2$ (il suffit de remarquer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ t.q. $|f_1-f_2|=1$ p.p. sur $]n,n+1[$).

3. Montrer que $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},T,\lambda)$ n'est pas séparable.

Corrigé – *Si $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},T,\lambda)$ est séparable, il existe A (au plus) dénombrable, dense dans $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R},T,\lambda)$. La question précédente permet de construire une injection de B de A, ce qui est en contradiction avec le fait que B est non dénombrable (et non fini).*

Exercice 8.7 (Convolution $L^p - L^q$) Pour $1 \le p \le \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $L^p = L^p_\mathbb{R}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est intégrable.

Corrigé – *Soit $x\in\mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car les applications f et $g(x-\cdot)$ sont mesurables. Puis, on déduit de l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1)) que $f(\cdot)g(x-\cdot)\in\mathcal{L}^1$ et :*

$$\|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1 \le \|f\|_p\|g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p\|g\|_q.$$

On peut donc définir $(f*g)(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $|(f*g)(x)| \le \|f\|_p\|g\|_q$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $|(f*g)(x)| = |\int f(\cdot)g(x-\cdot)d\lambda| \le \int |f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda = \|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1$. En utilisant l'inégalité montrée dans la question précédente, on a donc :*

$$|(f*g)(x)| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

(c) Montrer que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $x,h\in\mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{aligned}|f*g(x+h)-f*g(x)| &\le \int |f(\cdot)g(x+h-\cdot)-f(\cdot)g(x-\cdot)|d\lambda\\ &\le \|f\|_p\|g(x+h-\cdot)-g(x-\cdot)\|_q = \|f\|_p\|g(\cdot-h)-g\|_q.\end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^q (voir exercice 6.4,, le cas général de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ est donné dans le théorème 8.5) donne que $\|g(\cdot-h)-g\|_q \to 0$, quand $h\to 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f*g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Soit $F\in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F*G$ sur $\mathbb{R}$ en posant $F*G = f*g$, avec $f\in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f*g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G.]

Corrigé – *Soit $f_1,f_2\in F$ et $g_1,g_2\in G$. Comme $f_1=f_2$ p.p. et $g_1=g_2$ p.p., on a aussi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)=f_2(\cdot)g_2(x-\cdot)$ p.p. et donc $f_1*g_1(x)=f_2*g_2(x)$.*

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on peut donc définir $F*G(x)$ en posant $F*G(x)=f*g(x)$, avec $f\in F$ et $g\in G$ (car $f*g(x)$ ne dépend pas du choix de f et g dans F et G).

(b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F * G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

Corrigé – *On note* $\|\cdot\|_u$ *la norme de la convergence uniforme (on rappelle que, sur* $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, elle coïncide avec la norme* $\|\cdot\|_\infty$*).*

Soit $F \in L^p$ *et* $G \in L^q$*. Si* $f \in F$*,* $g \in G$*, on a déjà vu que, pour tout* $x \in R$ *:*

$$|F * G(x)| = |f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q = \|F\|_p \|G\|_q.$$

On en déduit $\|F * G\|_u = \sup\{|F * G(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|F\|_p \|G\|_q$*, ce qui prouve bien la continuité de la forme bilinéaire* $(F, G) \mapsto F * G$ *de* $L^p \times L^q$ *dans* $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

(c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F * G$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(F * G)(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

Corrigé – *On considère tout d'abord le cas* $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. On sait déjà que* $f * g$ *est continue (par exemple, parce que* $f \in \mathcal{L}^p$ *et* $g \in \mathcal{L}^q$*). D'autre part, comme* f *et* g *sont à support compact, il existe* $a > 0$ *et* $b > 0$ *t.q.* $f = 0$ *sur* $B^c(0, a)$ *et* $g = 0$ *sur* $B^c(0, b)$*. On en déduit que* $f * g = 0$ *sur* $B^c(0, a + b)$ *(ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 7.19). On a donc* $f * g \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

Soit maintenant $F \in L^p$ *et* $G \in L^q$*. Le théorème de densité dans les espaces* L^p *(exercice 6.4, ou encore théorème 8.4 pour un cas plus général) donne l'existence de deux suites* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *t.q.* $f_n \to F$ *dans* L^p *et* $g_n \to G$ *dans* L^q*, quand* $n \to +\infty$*. La continuité de la forme bilinéaire* $(F, G) \mapsto F * G$ *de* $L^p \times L^q$ *dans* $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *montre alors que* $f_n * g_n \to F * G$ *dans* $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(c'est-à-dire uniformément), quand* $n \to +\infty$*. Or* $f_n * g_n \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et* $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est fermé dans* $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, on a donc* $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f * g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f * g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé – *On procède ici comme dans le cas* $1 < p, q < \infty$*.*

Soit $x \in \mathbb{R}$*. L'application* $f(\cdot)g(x - \cdot)$ *est mesurable car produit d'applications mesurables. Puis, l'inégalité de Hölder pour le cas p = 1, q = ∞ (proposition (6.26)) donne* $f(\cdot)g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1$ *et :*

$$\|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g(x - \cdot)\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

On peut donc définir $(f * g)(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et on a* $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$*. Ceci donne* $\sup\{|(f * g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ *et donc que* $f * g$ *est bornée.*

Pour montrer que $f * g$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, on utilise l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour écrire, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f * g(x) = \int f(x - \cdot)g(\cdot)d\lambda.$$

Soit $x, h \in \mathbb{R}$*. On a donc :*

$$\begin{aligned} |f * g(x + h) - f * g(x)| &\leq \int |f(x + h - \cdot)g(\cdot) - f(x - \cdot)g(\cdot)| d\lambda \\ &\leq \|f(x + h - \cdot) - f(x - \cdot)\|_1 \|g\|_\infty = \|f(\cdot - h) - f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 *(théorème 5.21) donne que* $\|f(\cdot - h) - f\|_1 \to 0$*, quand* $h \to 0$*. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de* $f * g$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

On a donc bien $f * g$ *continue et bornée, c'est-à-dire* $f * g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

(b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F * G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F * G = f * g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

Corrigé – *La démonstration est identique à celle du cas $1 < p, q < \infty$. Elle n'est pas redonnée ici.*

(c) L'application $(F, G) \mapsto F * G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

Corrigé – *La réponse est oui car nous avons vu que* $\|f * g\|_u = \sup\{|(f * g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(d) A-t-on $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

Corrigé – *La réponse est non. On prend, par exemple,* $G = 1$ *p.p. et* $F \in L^1$, $F \neq 0$. *On a alors* $F * G(x) = \int F d\lambda$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc,* $F * G(x) \not\to 0$, *quand* $x \to \pm\infty$, *et* $F * G \notin C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8.8 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,
- $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x) dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Corrigé – *La fonction $f\varphi$ est mesurable car produit de fonctions mesurables. Elle est intégrable car on a*

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \|\varphi\|_u,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ *(avec* $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(x)|, x \in \mathbb{R}\} < \infty$ *car* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *est inclus dans* $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*) et donc :*

$$\int |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Ce qui donne bien $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $f * \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}^d$. *On pose* $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ *pour* $y \in \mathbb{R}^d$ *(n est fixé). On a donc* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *(car* $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*) et* $f\varphi = f(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$.

La première question donne $f(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ *et* $f * \rho_n(x)$ *est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par f donne :*

$$f * \rho_n(x) = \int f(y)\rho_n(x - y) dy = \int f(y)\varphi(y) dy = 0$$

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

Corrigé – *La proposition 8.12 donne* $f * \rho_n \to f$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $f_n = 0$ *p.p., on en déduit que* $f = 0$ *p.p.*

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω.)

Corrigé – *Soit* K *un compact de* Ω *t.q.* $\varphi = 0$ *sur* K^c. *On a alors* $g\varphi = g1_K\varphi$.
Comme $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, *la question 1(a) donne* $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g * \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

Corrigé – *Soit* $x \in \Omega_n$. *On pose* $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ *pour* $y \in \mathbb{R}^d$ *(n et x sont fixés). On a donc* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *; comme* $\rho_n(z) = 0$ *si* $|z| \geq 1/n$, *on a* $\varphi = 0$ *sur* K^c *où* K *est la boule fermée de centre x et de rayon* $1/n$, *c'est-à-dire* $K = \overline{B}(x, 1/n)$. *Comme* $x \in \Omega_n$, *on a* $K \subset \Omega$. *La fonction* φ *(ou, plus précisément, la restriction de* φ *à* Ω*) appartient donc à* $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$*).*

On a $g\varphi = g(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$. *On conclut comme dans la question 1(b) :*

La question 2(a) donne $g(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ *et* $g * \rho_n(x)$ *est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par g donne :*

$$g * \rho_n(x) = \int g(y)\rho_n(x - y)dy = \int g(y)\varphi(y)dy = 0$$

(c) Soit K un compact de Ω, montrer que $g1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Corrigé – *On note* α *la distance de* K *à* Ω^c, *c'est-à-dire* $\alpha = \inf\{|y - z|, y \in K, z \in \Omega^c\}$. *Cette distance est strictement positive car* K *est compact,* Ω^c *est fermé et* $K \cap O^c = \emptyset$ *(le fait que cette distance est strictement positive est démontré, par exemple, dans la démonstration du théorème 5.20). Soit* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $1/n_0 < \alpha$, *de sorte que* $K \subset \Omega_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(avec* Ω_n *défini dans la question 2(b)).*

La question 2(b) donne alors que, pour tout $n \geq n_0$, $g * \rho_n$ *est bien défini sur* K *et* $g * \rho_n = 0$ *sur* K.

Pour passer à limite sur n (et montrer que $g = 0$ *p.p. sur* K*), on pose* $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{R}^d; d(z, K) \leq 1/n_0\}$ *(où* $d(z, K)$ *est la distance de z à* K, *c'est-à-dire* $d(z, K) = \inf\{|z - y|, y \in K\}$*).* $\tilde{K}$ *est un compact de* $\mathbb{R}^d$ *et comme* $1/n_0 < \alpha$, *on a* $\tilde{K} \subset \Omega$. *On en déduit :*

$$g1_{\tilde{K}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

La proposition 8.12 donne alors $g1_{\tilde{K}} * \rho_n \to g1_{\tilde{K}}$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, *quand* $n \to +\infty$. *On a donc aussi, en prenant la restriction à* K *de ces fonctions :*

$$(g1_{\tilde{K}} * \rho_n)_{|K} \to g_{|K} \text{ dans } L^1(K, \mathcal{B}(K), \lambda_d), \text{ quand } n \to +\infty. \tag{8.4}$$

Soit $n \geq n_0$. *On remarque que* $g1_{\tilde{K}} * \rho_n = g * \rho_n$ *sur* K. *En effet, pour* $x \in K$ *et* $y \notin \tilde{K}$, *on a* $|x - y| > 1/n_0 \geq 1/n$ *et donc* $\rho_n(x - y) = 0$. *On en déduit, pour tout* $x \in K$,

$$g1_{\tilde{K}} * \rho_n(x) = \int g1_{\tilde{K}}(x)\rho_n(x - y)dy = \int g(x)\rho_n(x - y)dy = g * \rho_n(x).$$

On a bien montré que $g1_{\tilde{K}} * \rho_n = g * \rho_n$ *sur* K. *Comme* $g * \rho_n = 0$ *sur* K *(question 2(b)), on déduit de (8.4) que* $g = 0$ *p.p. sur* K.

Pour montrer que $g = 0$ *p.p. sur* Ω, *on remarque que* $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$, *avec* $K_n = \overline{\Omega}_n \cap B_n$ *(où* $\overline{\Omega}_n$ *est l'adhérence de* Ω_n *et* B_n *est la boule fermée de centre 0 et de rayon n). Comme* K_n *est un compact de* Ω, *la démonstration précédente donne* $g = 0$ *p.p. sur* K_n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *On en déduit que* $g = 0$ *p.p. sur* Ω.

Exercice 8.9 (Théorème de compacité dans L^1, Kolmogorov)
On pose $L^1(]0, 1[) = L^1_{\mathbb{R}}(]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0, 1[)$). Pour $f \in L^1(]0, 1[[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0, 1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus]0, 1[$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1(]0,1[)$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i, \varepsilon)$, où $B(f, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0,1[)$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (Condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *On utilise la précompacité pour* $\varepsilon = 1$. *Il existe* $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}$ *t.q.*

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i, 1).$$

En posant $M = \max\{\|f_i\|_1,\ i = 1, \ldots, p\}$ *on a donc* $\|f\|_1 \le M$ *pour tout* $f \in \mathcal{A}$, *ce qui prouve que* $\mathcal{A}$ *est une partie bornée de* $L^1(]0,1[)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \le \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.5}$$

Corrigé – *On utilise encore la précompacité, il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}$ *t.q.* $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i, \varepsilon)$.

Le théorème de continuité en moyenne (théorème 5.21) donne que pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ *il existe* $\alpha_i > 0$ *t.q.*

$$h \in \mathbb{R},\ |h| \le \alpha_i \Rightarrow \|\tilde{f}_i(\cdot + h) - \tilde{f}_i\|_1 \le \varepsilon.$$

On pose $\alpha = \min\{\alpha_i,\ i = 1, \ldots, p\}$. *On a bien* $\alpha > 0$ *et pour tout* $f \in \mathcal{A}$, *il existe* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *t.q.* $f \in B(f_i, \varepsilon)$. *On a alors*

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 &\le \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}_i(\cdot + h\|_1 + \|\tilde{f}_i(\cdot + h) - \tilde{f}_i\|_1 + \|\tilde{f}_i - \tilde{f}\|_1 \\ &= \|\tilde{f}_i(\cdot + h) - \tilde{f}_i\|_1 + 2\|f - f_i\|_1.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$h \in \mathbb{R},\ |h| \le \alpha \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \le 3\varepsilon,$$

ce qui termine cette question.

Partie II (Condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ une partie bornée de $L^1(]0,1[)$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (8.5).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \ge 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \ge 1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.6}$$

[On pourra remarquer que $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$.]

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{A}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a (avec le changement de variable* $z = ny$*)*

$$\tilde{f} * \rho_n(x) = \int \tilde{f}(x - y)\rho_n(y)dy = \int \tilde{f}(x - y)n\rho(ny)dy = \int \tilde{f}(x - \frac{z}{n})\rho(z)dz.$$

Ce qui donne bien, comme $\int \rho(x)dx = 1$, $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$ *et donc*

$$|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x)| \le \int |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)dy.$$

L'application $(x,y) \mapsto \tilde{f}(x - y/n)$ est borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de $(x,y) \mapsto x - y/n$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto \tilde{f}(s)$ qui est borélienne). Par stabilité de l'ensemble des fonctions boréliennes, l'application $(x,y) \mapsto |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)$ est donc aussi borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue étant σ-finie, on peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir

$$\|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)dy \Big) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|dx \Big)\rho(y)dy.$$

En prenant $n_0 \geq 1/\alpha$, où α est donné par (8.5), on obtient (8.6).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f} * \rho_n$.

(a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0,1[)$ t.q. :

$$x \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \leq C_1,$$

$$x, y \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_2|x - y|.$$

En déduire que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0,1], \mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli (théorème 8.17).]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\tilde{f} * \rho_n(x)| \leq n\|f\|_1\|\rho\|_\infty$.*
On peut donc prendre $C_1 = n\|\rho\|_\infty \sup_{f\in\mathcal{A}} \|f\|_1$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(y) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(z)n(\rho(nx - nz) - \rho(ny - nz))dz$ et donc, avec le théorème des accroissements finis appliqué à ρ,

$$|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(y)| \leq \|f\|_1 n^2\|\rho'\|_\infty|x - y|.$$

On peut donc prendre $C_2 = n^2\|\rho'\|_\infty \sup_{f\in\mathcal{A}} \|f\|_1$.
L'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est donc borné dans $C([0,1], \mathbb{R})$ et est composé de fonctions uniformément équicontinues. Le théorème d'Ascoli donne alors sa compacité dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1[\ )$.

Corrigé – *Il suffit ici d'utiliser la caractérisation de la relative compacité par la précompacité et le fait que pour toute fonction bornée sur $[0,1]$, on a $\|g\|_1 \leq \|g\|_\infty$.*

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *On utilise encore la caractérisation de la relative compacité par la précompacité. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (8.6), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{A}$ (où f_n est la restriction à $[0,1]$ de $\tilde{f} * \rho_n$). Puis, comme l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1[\ )$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(1)}, \ldots, f^{(p)} \in \mathcal{A}$ t.q. $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_n^{(i)}, \varepsilon)$.*
Soit $f \in \mathcal{A}$, il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f_n \in B(f_n^{(i)}, \varepsilon)$, on a alors

$$\|f - f^{(i)}\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|f_n - f_n^{(i)}\|_1 + \|f_n^{(i)} - f^{(i)}\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f^{(i)}, 3\varepsilon)$ et donc que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Exercice 8.10 (Théorème de Kolmogorov, autre énoncé) Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).

On suppose que pour tout $h \in]0,T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \le \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1.

1. Soit $d, h \in]0,T[$ t.q. $d + h \le T$. Montrer que

$$\int_0^d |u_n(t)| dt \le \int_0^d |u_n(t+h)| dt + \int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt. \tag{8.7}$$

Corrigé – *Pour tout $t \in]0,d[$ on a $|u_n(t)| \le |u_n(t+h)| + |u_n(t+h) - u_n(t)|$. En intégrant cette inégalité entre 0 et d, on obtient bien* (8.7).

2. Soit $h_0 \in]0,T[$ et $d \in]0, T - h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^d |u_n(t)| dt \le d\|u_n\|_1 + h_0\eta(h_0). \tag{8.8}$$

Corrigé – *Comme d'habitude, on choisit pour u_n l'un de représentants, de sorte que $u_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

L'inégalité (8.7) *est vraie pour tout $h \in]0,h_0[$. En intégrant* (8.7) *entre 0 et h_0 et en remarquant que $\int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \le \eta(h) \le \eta(h_0)$ (car $h \le h_0$ et $d \le T - h_0 \le T - h$) on obtient*

$$h_0 \int_0^d |u_n(t)| dt \le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)| dt \Big) dh + \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \Big) dh$$
$$\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)| dt \Big) dh + h_0\eta(h_0).$$

La mesure de Lebesgue est σ-finie et l'application $(t,h) \mapsto u_n(t+h)$ est borélienne de $]0,d[\times]0,h_0[$ dans $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de $(t,h) \mapsto t+h$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto u_n(s)$ qui est borélienne). On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir que

$$\int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)| dt \Big) dh = \int_0^d \Big(\int_0^{h_0} |u_n(t+h)| dh \Big) dt$$
$$\le \int_0^d \Big(\int_0^T |u_n(s)| ds \Big) \le d\|u_n\|_1.$$

On en déduit (8.8).

3. Montrer que $\int_0^d |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord $h_0 \in]0,T[$ t.q. $\eta(h_0) \le \varepsilon$. Puis, avec $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1$, on pose $\delta = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0/C\}$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$0 \le d \le \delta \Rightarrow \int_0^d |u_n(t)| dt \le 2\varepsilon.$$

On a donc $\int_0^d |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Une démonstration analogue donne aussi que $\int_{T-d}^T |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n (il suffit de raisonner avec $v_n(t) = u_n(T-t)$).

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 8.16, qui utilise le prolongement de u_n par 0.]

Corrigé – *On prolonge u_n par 0 hors de $]0,T[$ (et on note toujours u_n la fonction prolongée). Pour appliquer le théorème 8.16, il suffit de montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \to 0 \text{ quand } h \to 0^+, \text{ uniformément par rapport à } n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, on remarque que pour $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} &|u_n(t+h) - u_n(t)|dt \\ &\le \int_{-h}^{0} |u_n(t+h)|dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt + \int_{T-h}^{T} |u_n(t)|dt \\ &= \int_0^h |u_n(t)|dt + \int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt + \int_{T-h}^{T} |u_n(t)|dt.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_1 > 0$ t.q. $\eta(h_1) \le \varepsilon$. Puis, avec la question précédente, il existe $h_2 > 0$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \le h \le h_2 \Rightarrow \int_0^h |u_n(t)|dt \le \varepsilon \text{ et } \int_{T-h}^{T} |u_n(t)|dt \le \varepsilon.$$

Avec $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, on a donc (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \le h \le h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le 3\varepsilon.$$

Ceci termine la question.

Chapitre 10

Transformation de Fourier

10.1 Introduction et notations

La notion de série de Fourier permet d'analyser les fonctions définies d'un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), et donc aussi les fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La notion de transformée de Fourier permet d'analyser les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Les deux notions ont une multitude d'applications en physique et en mathématiques. La transformée de Fourier est une notion employée par exemple en théorie du signal, en théorie des probabilités et pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite, on considérera l'espace mesuré $(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et on notera $d\lambda_{\mathrm{N}}(x) = dx$. Soit $\mathrm{N} \geq 1$, les espaces $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ ont été définis dans la section 4.10 et les espaces $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ ont été définis dans la section 6.2. On rappelle aussi que si f est une fonction définie de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$, la fonction f est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont mesurables (chaque ensemble, $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étant muni de sa tribu borélienne). On peut, bien sûr, aussi définir les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.1 (Espaces $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$)
Soit $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction mesurable de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$).
On dit que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ si $|f| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et on définit $\|f\|_p$ par $\|f\|_p = \||f\||_p$ où $\||f\||_p$ est la norme de $|f|$ dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ (vue au chapitre 6).
L'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ est l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ quotienté par le relation d'équivalence "= p.p.". C'est un espace de Banach (complexe), c'est-à-dire un e.v.n. (sur $\mathbb{C}$) complet.

Remarque 10.2 Soit $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$.

10.2 Transformation de Fourier dans L^1

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Soit $N \geq 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \ldots, t_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on note $x \cdot t$ le produit scalaire euclidien de x et t, c'est-à-dire $x \cdot t = \sum_{i=1}^N x_i t_i$. Dans ce chapitre, On note aussi $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ou parfois simplement $L^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, pour $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.3 (Transformée de Fourier dans L^1) *Soit $N \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour $t \in \mathbb{R}^N$, l'application $x \mapsto e^{-ix\cdot t} f(x)$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) appartient à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On définit alors $\widehat{f}(t)$ par :*

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x) e^{-ix\cdot t} dx.$$

La fonction $\widehat{f}$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) s'appelle transformée de Fourier de f, qu'on notera également $\mathcal{F}(f)$.

On note $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ t.q. } g(t) \to 0 \text{ quand } |t| \to +\infty\}$. On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\|\varphi\|_u = \max_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Proposition 10.4 (Linéarité de la transformée de Fourier) *Soit $N \geq 1$. L'application $\mathcal{F}$ qui à f (appartenant à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) associe sa transformée de Fourier est linéaire continue de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION – Le théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.52) appliqué à la fonction $(x, t) \mapsto e^{-ix.t} f(x)$ entraîne immédiatement que $\widehat{f}$ est continue. Montrons que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cas $N = 1$. On remarque que pour $t \neq 0$, on a, comme $e^{i\pi} = -1$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t})t} f(x) dx,$$

et donc avec un changement de variable simple,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iyt} f(y + \frac{\pi}{t}) dy.$$

On en déduit que

$$2\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ixt} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{t})) dx$$

et donc que $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t})\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.21) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

Cas $N > 1$. On reprend la même méthode.

Pour $t \neq 0$, $t = (t_1, \ldots, t_N)^t$, il existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ t.q. $|t_j| = \max_{k=1,\ldots,N} |t_k|$. On a alors, comme $e^{i\pi} = -1$, en notant e_j le j–ième vecteur de base de $\mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-i(x - \frac{\pi}{t_j} e_j)\cdot t} f(x) dx,$$

et donc avec un changement de variable simple,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy\cdot t} f(y + \frac{\pi}{t_j} e_j) dy.$$

On en déduit que $|\widehat{f}(t)| \le \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t_j}e_j)\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 8.5) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

■

La transformée de Fourier a la propriété intéressante de transformer la convolution en produit. Ceci est montré dans la proposition suivante.

Proposition 10.5 (Transformée de Fourier d'un produit) *Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}\widehat{g}$.*

DÉMONSTRATION – Par la proposition 7.22, on a $f * g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f * g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ix\cdot t} dx =$$

$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t} dy \right) dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini (théorème 7.12) à la fonction

$$(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}$$

(qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ car son module est la fonction $(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^{2N}$ est égale à $\|f\|_1\|g\|_1$), on obtient :

$$\widehat{f * g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t} dx \right) g(y)e^{-iy\cdot t} dy.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx = \int f(z)e^{-iz\cdot t}dz = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(t)$, on en déduit :

$$\widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t) \int g(y)e^{-iy\cdot t}dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(t)\widehat{g}(t),$$

ce qui est le résultat annoncé.

■

10.2.2 Théorème d'inversion

Il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

- La transformée de Fourier d'une fonction f caractérise-t-elle la fonction f (c'est-à-dire si $\widehat{f} = \widehat{g}$, a-t-on $f = g$ p.p.) ?
- Peut-on retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier ?

Les réponses à ces questions sont fournies par le théorème d'inversion de Fourier :

Théorème 10.6 (Inversion partielle de la transformée de Fourier) *Soit $N \ge 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. On a alors $f = \widehat{\widehat{f}}(-.)$ p.p., c'est-à-dire :*

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \widehat{f}(x)e^{ixt}dx, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

La démonstration fait l'objet de l'exercice 10.1.

Une conséquence de ce théorème est l'injectivité de l'application $\mathcal{F}$, qui fournit donc une réponse positive à la première question. En effet, soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{f} = \widehat{g}$; alors par linéarité, $\widehat{f-g} = 0$ et donc $\widehat{f-g} \in L^1_{\mathbb{C}}$. En appliquant le théorème d'inversion, on a donc $f = g$ p.p..

Ce théorème apporte aussi une réponse partielle à la deuxième : on peut calculer f à partir de $\widehat{f}$ dès que $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. Il faut remarquer à ce propos que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier (voir exercice 10.2).

10.2.3 Régularité et décroissance à l'infini

Proposition 10.7 (Différentiabilité, dimension 1)

1. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où f' est la dérivée de f). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f')(t) = (it)\mathcal{F}(f)(t)$.*
2. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ t.q. $(\cdot)f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où $(\cdot)f$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $xf(x)$). Alors, $\mathcal{F}(f) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)'(t) = \mathcal{F}((-i\cdot)f)(t)$.*

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item consiste à faire une intégration par parties sur l'intervalle $[-n,n]$ puis à faire tendre n vers l'infini (en remarquant que $f(\pm n) \to 0$, quand $n \to +\infty$, voir l'exercice 5.6).

Le deuxième item est une conséquence immédiate du théorème 4.53 (théorème de dérivation sous le signe $\int$). ■

La transformation de Fourier transforme donc la dérivation en multiplication par la fonction $(i\cdot)$, et la multiplication par $(-i\cdot)$ en dérivation. Cette propriété est utilisée, par exemple, pour la résolution d'équations différentielles (qui sont ainsi transformées en équations algébriques).

Cette propriété se généralise au cas de la dimension N et pour un ordre k de dérivation quelconque. On introduit pour ce faire les notations suivantes : soient $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)^t \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. On définit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_N$ et

$$D^\alpha f = \Big(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}\Big) f$$

lorsque cette dérivée existe.

Proposition 10.8 (Différentiabilité, dimension N)

1. *Soit $N \geq 1$ et $k \geq 1$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ t.q. $D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$, avec $(it)^\alpha = (it_1)^{\alpha_1}(it_2)^{\alpha_2}\ldots(it_N)^{\alpha_N}$.*
2. *Soit f t.q. $(.)^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ et $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-i\cdot)^\alpha f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$.*

La proposition 10.8 montre que la dérivabilité de f entraîne la décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini (plus f est dérivable, plus $\widehat{f}$ décroît vite à l'infini), et réciproquement. Cette remarque incite à définir l'espace des fonctions à décroissance rapide (souvent appelé espace de Schwartz),

Définition 10.9 (Espace de Schwartz) *Soit $N \geq 1$, on appelle espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ ou $\mathcal{S}_N$ ou même $\mathcal{S}$, l'espace des fonctions dites à décroissance rapide, défini par :*

$$\mathcal{S}_N = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(x)^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}.$$

On va montrer l'invariance par transformation de Fourier de cet espace. On commence par remarquer que $\mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. En effet, si $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$, en prenant des choix convenables de α et β dans la définition de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$, on remarque qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $(1+|x|^{\mathrm{N}+1})|f(x)| \le \mathrm{C}$. On en déduit que $f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Plus généralement, si $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$, on remarque que $(\cdot)^\beta \mathrm{D}^\alpha f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour tout $a, \beta \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. On obtient alors la proposition 10.10.

Proposition 10.10 (Transformée de Fourier et dérivation dans $\mathcal{S}$) *Soit* $\mathrm{N} \ge 1$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$. *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^\mathrm{N}$ *on a :*

$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{D}^\alpha((-i\cdot)^\beta f)\Big) = (i\cdot)^\alpha \widehat{(-i\cdot)^\beta f} = (i\cdot)^\alpha \mathrm{D}^\beta \widehat{f}, \tag{10.1}$$

$$\mathcal{F}[(-i\cdot)^\alpha \mathrm{D}^\beta f] = \mathrm{D}^\alpha \widehat{\mathrm{D}^\beta f} = \mathrm{D}^\alpha[(i\cdot)^\beta \widehat{f}]. \tag{10.2}$$

La démonstration est une adaptation simple de celle de la proposition 10.8.
La proposition 10.10 et le théorème 10.6 nous permettent alors de remarquer que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$.

Proposition 10.11 (Transformée de Fourier dans S_N) *Soit* $\mathrm{N} \ge 1$. *L'application* $\mathcal{F}$ *qui à* f *associe sa transformée de Fourier est une bijection de* $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ *dans* $\mathcal{S}_\mathrm{N}$. *De plus, pour tout* $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$, *on a* $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$.

DÉMONSTRATION – En utilisant la proposition 10.10, on montre facilement que $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$. Le théorème d'inversion (théorème 10.6) donne alors que f est injective et que $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ pour tout $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$. De cette dernière formule, on déduit que $\mathcal{F}$ est surjective (et donc bijective) de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$. ■

10.3 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Il est facile d'étendre la définition de la transformation de Fourier à une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. Plus précisément, si m est une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ ($\mathrm{N} \ge 1$), la définition 10.12 définit la fonction $\widehat{m}$ (continue et bornée de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{C}$) et, si $m = f\lambda_\mathrm{N}$, avec $f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ (c'est-à-dire que m est la mesure signée de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$), on a $\widehat{m}(t) = \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. De même, si m est une mesure à valeurs complexes, on a alors $m = m_1 + im_2$, où m_1 et m_2 sont des mesures signées (ce sont les parties réelle et imaginaire de m). On peut alors définir $\widehat{m}$. C'est la fonction continue bornée de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $\widehat{m}(t) = \widehat{m}_1(t) + i\widehat{m}_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Définition 10.12 (Transformée de Fourier d'une mesure signée) *Soit* $\mathrm{N} \ge 1$ *et* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. *Soit* $t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, *l'application* $x \mapsto e^{-ix\cdot t}$ *(définie de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *dans* $\mathbb{C}$*) appartient à* $\mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), m)$ *(car elle est continue, donc borélienne, et bornée). On définit alors* $\widehat{m}(t)$ *par :*

$$\widehat{m}(t) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int e^{-ix\cdot t} dm(x).$$

La fonction $\widehat{m}$ *(définie de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *dans* $\mathbb{C}$*) s'appelle transformée de Fourier de* m.

On rappelle que

$$\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \sup_{t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}} |g(t)| < \infty\}$$

et que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme.

Proposition 10.13 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$. *Soit* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *La fonction* $\widehat{m}$ *appartient à* $C_b(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $\widehat{m}$ est bornée est simple. On utilise la décomposition de Hahn (proposition 2.33), c'est-à-dire le fait que $m = m^+ - m^-$, où $m^{\pm}$ sont deux mesure finies étrangères. On remarque alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, on a $|\widehat{m}(t)| \leq |m|(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) < +\infty$, où $|m| = m^+ + m^-$.

La fait que $\widehat{m}$ est continue est une conséquence immédiate du théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.52) appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t}$ (et avec les mesures finies $m^{\pm}$). ■

Comme pour la transformation de Fourier dans L^1, on peut se demander si $\widehat{m}$ caractérise la mesure signée m et si on peut retrouver m à partir de $\widehat{m}$. La proposition suivante s'intéresse à ces deux questions.

Proposition 10.14 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$.

1. *Soit* m *et* μ *deux mesures signées sur les boréliens de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *On suppose que* $\widehat{m} = \widehat{\mu}$. *alors,* $m = \mu$.
2. *Soit* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *On suppose que* $\widehat{m} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. *Alors,* $m = f\lambda_{\mathrm{N}}$ *avec* $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$ *p.p. (c'est-à-dire p.p. pour la mesure* λ_{N}*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 10.6.
Nous avons vu dans la section précédente qu'il y avait un lien entre les propriétés de décroissance de f à l'infini et les propriétés de régularité de $\widehat{f}$ (propositions 10.7, 10.8 et 10.10). Dans le même esprit, on peut remarquer que, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, borélienne et intégrable, la continuité de $\widehat{f}$ en 0 donne une précision sur la convergence vers 0, quand $a \to +\infty$, de $\int_{]-a,a[^c} |f(x)|dx$. Nous donnons dans le lemme 10.15 cette précision dans le cas plus général d'une mesure (positive) finie. Ce lemme permet de démontrer le théorème 10.22 (lui-même utile pour démontrer le théorème central limite, théorème 10.24).

Lemme 10.15 *Soit* m *une mesure (positive) finie (et non nulle) sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On pose* $\mathrm{M} = m(\mathbb{R})$ *et, pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{m}(t) + \widehat{m}(-t)}{2}.$$

(La fonction ψ *prend donc ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *et même dans* $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, *est continue en* 0 *et* $\psi(0) = \mathrm{M}$.*) On a alors, pour tout* $a > 0$,

$$m(\{x, |x| \geq a\}) \leq a\int_0^{2/a} (\mathrm{M} - \psi(t))dt.$$

DÉMONSTRATION – On peut supposer $\mathrm{M} = 1$ (il suffit, si $\mathrm{M} \neq 1$, de remplacer la mesure m par la mesure m/M). On remarque tout d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{m}(t) + \widehat{m}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (e^{-ixt} + e^{ixt})dm(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \cos(xt)dm(x).$$

et donc

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)dm(x).$$

On en déduit bien que $\psi(t) \in \mathbb{R}$, $|\psi(t)| \leq 1$ et que $\psi(0) = 1$.

Soit $a > 0$, on pose $\varepsilon = 2/a$ et $\mathrm{T} = \int_0^{\varepsilon}(1 - \psi(t))dt$. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{T} = \int_0^{\varepsilon}\Big(\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(xt))dm(x)\Big)dt &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_0^{\varepsilon}(1 - \cos(xt))dt\Big)dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x})dm(x).\end{aligned}$$

Mais, $(\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) = \varepsilon(1 - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x}) \geq \varepsilon/2$ si $|\varepsilon x| \geq 2$, ce qui est vrai si $|x| \geq a$ car $\varepsilon a = 2$. On a donc (comme $(\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) \geq 0$ pour tout x)

$$\mathrm{T} = \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) dm(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} m(\{x, |x| \geq a\}).$$

On obtient donc, finalement,

$$m(\{x, |x| \geq a\}) \leq \frac{2\mathrm{T}}{\varepsilon} \leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} (1 - \psi(t)) dt = a \int_0^{2/a} (1 - \psi(t)) dt.$$

Ce qui est le résultat annoncé. ■

10.4 Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$. On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ est un espace de Hilbert et que le produit scalaire sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ est défini par (en notant $dt = d\lambda_\mathrm{N}(t)$) :

$$(f \mid g)_2 = \int f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Il est clair que la définition de $\widehat{f}$ qu'on a donnée pour $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ ne s'applique pas pour un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Pour définir la transformée de Fourier d'un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on va utiliser la densité de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (on peut montrer que $\mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, comme on a montré que $\mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$). On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et que c'est une isométrie pour la norme de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On utilisera ensuite la densité de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour définir la transformée de Fourier des éléments de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Proposition 10.16 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* $f, g \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$ *(on a donc, en particulier,* $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$*). Alors* $\widehat{f}$ *et* $\widehat{g}$ *sont des éléments de* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ *et* $(f \mid g)_2 = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2$*. En particulier,* $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Démonstration – Soit $f, g \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$. On a alors aussi $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$. Comme $\mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a donc f, g, $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On va montrer que $(f \mid g)_2 = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2$.

Comme $f, \widehat{f} \in \mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on peut appliquer le théorème d'inversion (théorème 10.6) pour transformer le produit scalaire de f avec g.

Le théorème d'inversion donne $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ et donc :

$$(f \mid g)_2 = \int \widehat{\widehat{f}}(-t)\bar{g}(t) dt = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t} \widehat{f}(x) dx \right) \bar{g}(t) dt.$$

On utilise maintenant le théorème de Fubini (théorème 7.12). Il s'applique car $\widehat{f}, \bar{g} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On obtient :

$$(f \mid g)_2 = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t} \bar{g}(t) dt \right) \widehat{f}(x) dx = \int \bar{\widehat{g}}(t) \widehat{f}(t) dt = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2,$$

ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 10.16 permet de définir, par un argument de densité, la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Théorème 10.17 (Transformée de Fourier dans L^2, Plancherel) *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$*. Il existe une application linéaire continue* $\tilde{\mathcal{F}}$ *de* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ *dans* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ *t.q. :*

1. Si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \widehat{f}$ p.p..

2. Pour tout $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $(f \mid g)_2 = (\tilde{\mathcal{F}}(f) \mid \tilde{\mathcal{F}}(g))_2$.

3. Pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $f = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$.

4. $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ s'appelle la transformée de Fourier de f. Compte tenu du premier item, on notera en général, $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$) ou si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\widehat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$).

DÉMONSTRATION – L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est définie sur $\mathcal{S}_N$, qui est un sous espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et prend ses valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, en confondant, comme d'habitude, un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ avec l'un de ses représentants). Comme cette application est linéaire, continue pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et que $\mathcal{S}_N$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \supset C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, voir le théorème 8.14), on en déduit que cette application se prolonge (de manière unique) en une application, notée $\tilde{\mathcal{F}}$, linéaire continue de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Plus précisément, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.16 donne alors que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Elle converge donc dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On aimerait définir $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ comme étant la limite (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) de la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est possible à condition que cette limite ne dépende que de f et pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f. Or, ce dernier point est facile car si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f, on a $\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a ainsi défini $\tilde{\mathcal{F}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

La linéarité de $\tilde{\mathcal{F}}$ découle immédiatement du fait que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Enfin, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.16 donne que $\|\widehat{f_n}\|_2 = \|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Ce qui prouve la continuité de $\tilde{\mathcal{F}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On montre maintenant les 4 items du théorème.

1. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. En reprenant la démonstration du théorème 8.14, il est facile de voir qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car dans la démonstration du théorème 8.14, la suite construite pour converger vers f dans L^p ne dépend pas de p). On en déduit que $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et que $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et donc que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ p.p. quand $n \to +\infty$. On en déduit bien que $\widehat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f)$ p.p..
2. Soit $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.16 donne $(\widehat{f_n} \mid \widehat{g_n})_2 = (f_n \mid g_n)_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient bien $(\tilde{\mathcal{F}}(f) \mid \tilde{\mathcal{F}}(g))_2 = (f \mid g)_2$.
3. Soit $f \in L^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne aussi $\widehat{f_n}(-\cdot) \to \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\widehat{\widehat{f_n}}(-\cdot) \to \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. La proposition 10.11 donne $f_n = \widehat{\widehat{f_n}}(-\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc (par unicité de la limite dans L^2) que $f = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$ p.p..
4. L'injectivité de $\tilde{\mathcal{F}}$ (de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) découle du fait que $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que $\tilde{\mathcal{F}}$ est linéaire. La surjectivité est une conséquence immédiate du troisième item.

■

Remarque 10.18 Pour définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on aurait pu utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et ne pas introduire l'espace $\mathcal{S}_N$ (voir l'exercice 10.5 pour le cas N = 1).

10.5 Résolution d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles

On donne ici deux exemples simples d'utilisation de la transformation de Fourier pour la résolution d'une équation différentielle (souvent notée EDO pour Équation Différentielle Ordinaire) ou d'une équation aux dérivées partielles (souvent notée EDP pour Équation aux Dérivées Partielles).

Soit $N \geq 0$, $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $g \in \mathcal{S}_1$ (donnés). On cherche $f \in \mathcal{S}_1$ qui vérifie :

$$a_N f^{(N)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{10.3}$$

Si $f \in \mathcal{S}_1$ vérifie (10.3), elle vérifie nécessairement, par transformation de Fourier :

$$a_N \widehat{f^{(N)}}(t) + \ldots + a_1 \widehat{f'}(t) + a_0 \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

c'est-à-dire :

$$a_N (it)^N \widehat{f}(t) + \ldots + a_1 it \widehat{f}(t) + a_0 \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En posant $p(t) = a_N (it)^N + \ldots + a_1 it + a_0$ et en supposant que p ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\widehat{f}(t) = \frac{\widehat{g}(t)}{p(t)}.$$

Comme $g \in \mathcal{S}_1$ et que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que $\frac{\widehat{g}}{p} \in \mathcal{S}_1$. En utilisant maintenant le théorème d'inversion, ou la proposition 10.11, on obtient :

$$f(t) = \widehat{\widehat{f}}(-t) = \widehat{\left(\frac{\widehat{g}}{p}\right)}(-t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

On a donc montré que f est nécessairement donnée par (10.4). Réciproquement, il est facile de voir que la fonction donnée par (10.4) est solution de (10.3), c'est donc l'unique solution dans $\mathcal{S}_1$ de (10.3) (en supposant que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$).

Soit $N \geq 1$, on considère une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe C^2 (c'est-à-dire deux fois continûment dérivable), dont on peut donc définir le Laplacien $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. On cherche à déterminer les fonctions harmoniques de $\mathcal{S}_N$, c'est-à-dire les fonctions $u \in \mathcal{S}_N$ telles que :

$$-\Delta u(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.5}$$

Cherchons $u \in \mathcal{S}_N$ (et donc $\Delta u \in \mathcal{S}_N$) solution de (10.5). On a donc $\widehat{\Delta u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), c'est-à-dire $|t|^2 \widehat{u}(t) = 0$ et donc $\widehat{u}(t) = 0$, pour tout $t \neq 0$. Comme $\widehat{u}$ est continue, ceci entraîne que $\widehat{u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), et donc $u = 0$. La fonction identiquement égale à 0 est donc la seule solution de (10.5) dans $\mathcal{S}_N$.

On peut effectuer un raisonnement analogue si on cherche u de classe C^2 et dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut aussi le faire si u est seulement dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$, il faut alors convenablement définir Δu). On obtient encore que la seule solution de (10.5) est $u = 0$.

Par contre, ce résultat d'unicité n'est plus vrai si on ne demande pas à u d'être de carré intégrable. En effet, les fonctions constantes sont toutes solutions de (10.5) (et on peut montrer que ce sont les seules fonctions, de classe C^2et bornées, solutions de (10.5), c'est le théorème de Liouville en analyse complexe).

10.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

La transformée de Fourier a son équivalent en probabilités : il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire (rien à voir avec la fonction caractéristique d'un ensemble !).

Définition 10.19 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d. *On appelle fonction caractéristique de* X *la fonction de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iX\cdot u} dP = E(e^{iX\cdot u}), \text{ pour } u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans la définition précédente, la fonction $e^{iX\cdot u}$ est bien intégrable sur Ω (pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. En notant p_X la loi de X, on remarque également que $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\widehat{p}_X(-\cdot)$. La section 10.3 donne alors quelques propriétés élémentaires de la fonction caractéristique d'un v..a..

Proposition 10.20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d. *La fonction caractéristique de* X *vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_X \in C_b(\mathbb{R}^d, C)$.

2. La loi de X *est entièrement déterminée par* φ_X *(c'est-à-dire que si* Y *est un autre v.a. de dimension* d *et que* $\varphi_X = \varphi_Y$, *on a nécessairement* $p_X = p_Y$*).*

3. Si $\varphi_X \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, *la loi de* X *a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, *c'est-à-dire* $p_X = f\lambda_d$, *et :*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot u} \varphi_X(u) du, \;\; \lambda_d\text{-p.s. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION – Comme $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\widehat{p}_X(-\cdot)$, le premier item est donnée par la proposition 10.13 (qui donne $\widehat{p}_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$).

Le deuxième item est donnée par le premier item de la proposition 10.14.

Pour le troisième item, on remarque que le deuxième item de la proposition 10.14 donne $p_X = f\lambda_d$ avec $f = \widehat{\widehat{p_X}}(-\cdot)$, ce qui donne λ_d-p.s. en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t} \widehat{p_X}(t) dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot t} \varphi_X(t) dt.$$

■

Les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour montrer l'indépendance de v.a.r. (ou de v.a.). On donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition 10.21 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *d v.a.r.. Alors, les v.a.r* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *sont indépendantes si et seulement si on a*

$$\varphi_{\mathrm{X}}(u) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{\mathrm{X}_j}(u_j)$$

pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$*, où* X *est le v.a. de composantes* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$.

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 9.28 les v.a.r. $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ sont indépendantes si et seulement $p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_d}$. Par la proposition 10.14, ces deux mesures sont égales si et seulement si leurs transformées de Fourier sont égales, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\varphi_{\mathrm{X}}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_d}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Comme $e^{ix\cdot u} = \prod_{j=1}^{d} e^{ix_j u_j}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d)^t$ et tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, la définition de la mesure produit donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_d}) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{\mathrm{X}_j}(u_j),$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

Il est intéressant aussi de connaître le lien entre convergence en loi et convergence simple des fonctions caractéristiques. Nous donnons ce lien dans le deuxième item du théorème 10.22 (dû à Paul Lévy).

Théorème 10.22 (Convergence en loi et fonctions caractéristiques, Paul Levy) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un suite de v.a. de dimension* d.

1. *On suppose que la fonction caractéristique de* X_n *converge simplement (quand* $n \to +\infty$*) vers une fonction* φ *continue en* 0*. Il existe alors un v.a.* X *t.q.* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *en loi, quand* $n \to +\infty$.
2. *Soit* X *un v.a. de dimension* d*. Alors,* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si et seulement si* $\varphi_{\mathrm{X}_n}(u) \to \varphi_{\mathrm{X}}(u)$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$.

DÉMONSTRATION – Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier item. En effet, si $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en loi, on a, bien sûr, $\varphi_{\mathrm{X}_n}(u) \to \varphi_{\mathrm{X}}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ (car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$). Réciproquement, on suppose que $\varphi_{\mathrm{X}_n}(u) \to \varphi_{\mathrm{X}}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Comme la fonction φ_{X} est continue (et donc, en particulier continue en 0), le premier item donne que X_n converge en loi vers un v.a. Y. Mais ceci donne que X et Y ont même fonction caractéristique et donc même loi. On en déduit bien que X_n tend vers X en loi.

Nous démontrons maintenant le premier item du théorème 10.22. Cette démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape on montre que la suite des lois des X_n est tendue (on utilise ici le lemme 10.15 et la continuité de φ). Puis dans la seconde étape on conclut grâce à la proposition 9.21.

Etape 1. On montre dans cette étape que la suite des lois des X_n est tendue. Pour cela, il suffit de montrer que la suite des lois de chaque composante des X_n est tendue. Soit donc $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $(\mathrm{X}_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des i–ème composantes des X_n. On note m_n la loi de $\mathrm{X}_n^{(i)}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2}\varphi_{\mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{(i)}}(t) + \varphi_{\mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{(i)}}(-t) = \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{m}_n(t) + \widehat{m}_n(-t)}{2}$$

Le lemme 10.15 donne alors, pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq a \int_0^{2/a} (1 - \psi_n(t))dt. \tag{10.6}$$

On a $\varphi_{X_N^{(i)}}(t) = \varphi_{X_n}(te_i)$ (ou e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$), la fonction $\psi_n(t)$ converge donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa limite est une fonction ψ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) continue en 0. Comme $\psi_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\psi(0) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme ψ est continue en 0 et $\psi(0) = 1$, il existe $a_0 > 0$ t.q. $\max_{t\in[0,2/a_0]}(1-\psi(t)) \le \varepsilon$, et donc

$$a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi(t))dt \le 2\varepsilon.$$

La fonction ψ_n converge simplement vers ψ et $0 \le (1-\psi_n) \le 1$ le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi_n(t))dt = a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi(t))dt.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi_n(t))dt \le 3\varepsilon.$$

Avec (10.6) on a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow m_n(\{x, |x| \ge a_0\}) \le 3\varepsilon.$$

D'autre part, en utilisant la continuité décroissante d'une mesure, pour tout $n \in \{1, \ldots, n_0-1\}$, il existe a_n t.q. $m_n(\{x, |x| \ge a_n\}) \le 3\varepsilon$.

En prenant $a = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$ on a donc

$$m_n(\{x, |x| \ge a\}) \le 3\varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue et termine la première étape.

Etape 2. Dans cette seconde étape il suffit d'utiliser la proposition 9.21. Cette proposition nous donne l'existence d'une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et d'un v.a. X tel que cette sous-suite tende vers X en loi. On en déduit, en particulier que $\varphi_X = \varphi$. Il reste à montrer que toute la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers X en loi (et pas seulement une sous-suite). Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi vers X, il existe $\phi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $E(\phi(X_n)) \not\to E(\phi(X))$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, que nous noterons aussi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (pour ne pas alourdir les notations), t.q.

$$|E(\phi(X_n)) - E(\phi(X))| \ge \varepsilon. \tag{10.7}$$

Mais, la proposition 9.21 nous donne l'existence d'une sous-suite de cette sous-suite et d'un v.a. Y t.q. la sous-suite de la sous-suite tende vers Y en loi. Comme la convergence en loi donne la convergence simple des fonctions caractéristiques (et que $\varphi_{X_n} \to \varphi$ simplement), on en déduit que $\varphi_Y = \varphi = \varphi_X$. On a donc $P_X = P_Y$. La sous-suite de la sous-suite tend donc vers X en loi. En contradiction avec (10.7). On a bien ainsi montré finalement que $X_n \to X$ en loi. ■

On donne maintenant la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien.

Proposition 10.23 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit X une v.a.r. gaussienne. On note m son espérance (donc, $m = E(X) \in \mathbb{R}$) et σ^2 sa variance (donc, $\sigma^2 = E((X-m)^2) \ge 0$) de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

2. *Soit $d \ge 1$ et X une v.a gaussien de dimension d. On note m son espérance (donc, $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$) et D sa matrice de covariance (donc, D est une matrice symétrique, composantes d'indices j et k de X) de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ (proposition 9.33). On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{1}{2}Du\cdot u}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION – Soit X une v.a.r. gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On suppose tout d'abord que $\sigma^2 = 0$, on a alors $X = m$ p.s. et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{imu}$, ce qui est bien la formule annoncée. On suppose maintenant que $\sigma > 0$, on a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy,$$

ce qui donne $\varphi_X(u) = e^{imu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\sigma u)$ avec $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $y \mapsto e^{y^2}$ est paire, on a aussi :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on remarque que le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique (théorème 4.53) et donne que ψ est de classe C^1 et

$$\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-y) \sin(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy.$$

En intégrant par parties cette dernière intégrale (en fait, on intègre par parties sur $[-n, n]$ puis on fait tendre n vers l'infini), on obtient :

$$\psi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} t \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy = -t\psi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $\psi(t) = \psi(0) e^{\frac{-t^2}{2}}$. Comme $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, on en déduit que $\psi(t) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{-t^2}{2}}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc que $\varphi_X(u) = e^{imu} e^{\frac{-\sigma^2 u^2}{2}}$, ce qui est bien la formule annoncée.

On suppose maintenant que $d > 1$ et que X est un v.a. gaussien. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a $\varphi_X(u) = E(e^{iX \cdot u}) = \varphi_{X \cdot u}(1)$. Pour connaître $\varphi_X(u)$, il suffit donc de connaître la fonction caractéristique de la v.a.r. $X \cdot u$. Comme X est un v.a. gaussien, la v.a.r. $X \cdot u$ est une v.a.r. gaussienne. Sa moyenne est $E(X \cdot u) = E(X) \cdot u = m \cdot u$ et sa variance est (voir l'exercice 9.5) :

$$\sigma^2 = E((X \cdot u - m \cdot u)^2) = E(u^t (X - m)(X - m)^t u) = u^t \text{Cov}(X) u = u^t D u.$$

On a donc, d'après la première partie de cette démonstration (c'est-à-dire le cas $d = 1$),

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X \cdot u}(1) = e^{im \cdot u} e^{-\frac{u^t D u}{2}},$$

ce qui est bien la formule annoncée (car $u^t D u = Du \cdot u$). ■

On montre enfin le théorème central limite, qui nous dit que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend en loi vers une variable aléatoire gaussienne.

Théorème 10.24 (Théorème central limite) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. de dimension* d *i.i.d.. On suppose que* $E(|X_1|^2) < \infty$. *On pose* $E(X_1) = m$, $D = Cov(X_1)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m).$$

La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge alors en loi vers tout v.a.* Y *dont la loi est la loi normale multidimensionnelle* $\mathcal{N}(0, D)$. *(Voir la définition 9.5 et la proposition 9.33 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)*

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 10.22 et la proposition 10.23, il suffit de montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(u) = e^{-\frac{u^t D u}{2}},$$

où φ_{Y_n} est la fonction caractéristique du v.a. Y_n.

Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\varphi_{Y_n}(u) = E(e^{iY_n\cdot u}) = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}\sum_{p=1}^n (X_p-m)\cdot u}) = E(\prod_{p=1}^n e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_p-m)\cdot u}).$$

Les v.a. X_p $(p = 1, \ldots, n)$ étant indépendants et identiquement distribués, on a donc, par la proposition 9.27 (cette proposition est écrite pour des fonctions à valeurs réelles mais elle s'étend à des fonctions à valeurs complexes en décomposant les fonctions en parties réelles et imaginaires),

$$\varphi_{Y_n}(u) = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u})^n. \tag{10.8}$$

On pose $z_n = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u})$ et on calcule maintenant z_n en faisant un développement limité des fonctions cos et sin. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$, $i = 1, 2$ et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \sin(x) = x + x^2\varepsilon_2(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = 1 - \frac{1}{2n}\int_\Omega((X_1-m)\cdot u)^2 dP \\ +\frac{1}{n}\int_\Omega((X_1-m)\cdot u)^2\varepsilon_1(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = \frac{1}{2n}\int_\Omega(X_1-m)\cdot u dP \\ +\frac{1}{n}\int_\Omega((X_1-m)\cdot u)^2\varepsilon_2(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP.\end{aligned}$$

Comme $E(|X_1|^2) < +\infty$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega((X_1-m)\cdot u)^2\varepsilon_i(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega((X_1-m)\cdot u)^2 dP &= \int_\Omega u^t(X_1-m)(X_1-m)^t u dP \\ &= u^t\Big(\int_\Omega(X_1-m)(X_1-m)^t dP\Big)u = u^t Du.\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega(X_1-m)\cdot u dP = \Big(\int_\Omega(X_1-m)dP\Big)\cdot u = 0.$$

En posant $a = \dfrac{u^t Du}{2}$, on a donc

$$\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = 1 - \frac{b_n}{n},\ \int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = \frac{c_n}{n},$$

avec $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. En posant $a_n = b_n + ic_n$, on a donc $z_n = (1 - \frac{a_n}{n})$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Avec (10.8), ceci donne

$$\varphi_{Y_n}(u) = z_n^n = (1 - \frac{a_n}{n})^n.$$

Comme $a \in \mathbb{R}$, le lemme 10.25 donne le résultat, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(u) = e^{-a} = e^{-\frac{u^t Du}{2}}$. ■

Lemme 10.25
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes t.q. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. *On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a_n}{n})^n = e^{-a}.$$

DÉMONSTRATION – Ce lemme est bien connu si $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que $a_n < n$ pour n assez grand et que $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{a_n}{n}) = -\lim_{n\to+\infty} a_n = -a$. La difficulté est ici que a_n peut ne pas être un nombre réel.

On pose $z_n = 1-\frac{a_n}{n}$ et $y_n = 1-\frac{a}{n}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car elle est convergente), il existe $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$ t.q. $|a_n| \le \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $|z_n| \le 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$ (et aussi $|y_n| \le 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$). On a alors (en écrivant $\varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$ avec $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par $\varphi(t) = (tz_n + (1-t)y_n)^n$)

$$z_n^n - y_n^n = n(z_n - y_n)\int_0^1 (tz_n + (1-t)y^n)^{n-1}dt.$$

Comme $|tz_n + (1-t)y_n| \le t|z_n| + (1-t)|y_n| \le 1+\dfrac{\mathrm{M}}{n} \le e^{\frac{\mathrm{M}}{n}}$ (pour tout $n\in\mathbb{N}$), on en déduit que

$$|z_n^n - y_n^n| \le n|z_n - y_n|e^{\mathrm{M}} = |a-a_n|e^{\mathrm{M}}.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} z_n^n = \lim_{n\to+\infty} y_n^n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a}{n})^n = e^{-a}$. ■

10.7 Exercices

10.7.1 Transformation de Fourier

Exercice 10.1 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$) Soit $\mathrm{H}(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)e^{itx}dt, x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\dfrac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\dfrac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme* H *est paire, on a* $(2\pi)^{\frac{1}{2}}h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt$ *et donc*

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}h_\lambda(x) = 2\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-\lambda t}\cos(tx)dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on remarque que

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt = \frac{1}{\lambda} - (\frac{x}{\lambda})^2\int_0^n e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt + a_n,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Ceci donne*

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt = \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}(1+\lambda a_n),$$

et donc $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$.

Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx$, *on utilise le changement de variable* $x = \lambda y$, *on obtient*

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

Corrigé – *Noter que λ désigne ici à la fois le paramètre λ introduit au début de l'énoncé et la mesure de Lebesgue. Cette maladresse de notation semble toutefois sans gravité.*

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h_\lambda \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$, $f * h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h_\lambda(x-t)dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda y)e^{i(x-t)y}dy\right)dt.$$

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ et $\mathrm{H}(\lambda\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$, on peut utiliser le théorème de Fubini (théorème 7.12) pour inverser l'ordre d'intégration et obtenir :

$$\begin{aligned} f * h_\lambda(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda y)e^{ixy}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ity}dt\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda y)e^{ixy}\widehat{f}(y)dy. \end{aligned}$$

3. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g * h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]

Corrigé – *On utilise maintenant le fait que $h_\lambda \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ pour remarquer que $g * h_\lambda(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $x = 0$, on a :*

$$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h_\lambda(x)dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} g(x)dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda}$, on obtient :

$$g * h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda y)\frac{1}{1+y^2}dy.$$

Comme $|g(\lambda y)\frac{1}{1+y^2}| \le \|g\|_u \frac{1}{1+y^2}$ (avec $\|g\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$) et que la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire (grâce à la continuité de g en 0) :

$$\lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} g(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(0).$$

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$, montrer que :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

[On pourra utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)|dx$.]

Corrigé – *Comme $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(y)dy = \sqrt{2\pi}$, on a :*

$$\begin{aligned} \|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))h_\lambda(y)dy|dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|h_\lambda(y)dy\right)dx. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7), on en déduit :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|dx\right)h_\lambda(y)dy = g * h_\lambda(0),$$

avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)| dx$.

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 *(théorème 5.21, écrit pour de fonctions à valeurs réelles mais la généralisation est immédiate pour des fonctions à valeurs complexes) donne que* g *est continue en* 0 *et donc aussi continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(en remarquant que* $|g(y) - g(z)| \leq |g(y-z)|$*) et donc aussi mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$*. Elle est également bornée (car* $|g(y)| \leq 2\|f\|_1$*, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*). On peut donc utiliser la question précédente, elle donne que* $\lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = 0$ *et donc que* $\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = 0$.

5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.6.

Corrigé – *On note* $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathrm{T}, \lambda)$*. Soit* $f \in \mathrm{L}^1$ *(on a donc* $\widehat{f} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*). On suppose que* $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1$*. Soit* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*_+$ *une suite t.q.* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$*. Comme* $f \in \mathrm{L}^1$*, la question précédente nous donne que* $f * h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ *dans* L^1 *et la question 2 nous donne pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f * h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda_n t) \widehat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée qui s'applique parce que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1$ *et que l'on a, pour tout* x *et tout* n*,* $|\mathrm{H}(\lambda_n t)\widehat{f}(t)e^{ixt}| \leq |\widehat{f}(x)|$*. Comme* $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}(\lambda_n x) = 1$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} f * h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt} dt = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Enfin, comme $f * h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ *dans* L^1*, on peut supposer, après extraction d'une sous-suite, que* $f * h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ *p.p.. On a donc, finalement (par unicité de la limite dans* $\mathbb{R}$*),* $\sqrt{2\pi} f = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ *p.p., c'est-à-dire* $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ *p.p..*

Exercice 10.2 (La transformation de Fourier n'est ni stable ni surjective) Soit $a \in \mathbb{R}^*_+$. On note $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$ l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $f = 1_{[-a,a]}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f. En déduire que $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier.

Corrigé – *On a bien* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$*. Soit* $t \in \mathbb{R}^*$*, on a*

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixt} dx = \frac{1}{-it\sqrt{2\pi}}(e^{-iat} - e^{iat}) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} 2\sin(at) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at)}{t}.$$

Pour $t = 0$*, on a* $\widehat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a$*. (On peut remarquer que* $\widehat{f}$ *est bien continue sur* $\mathbb{R}$*.)*

La fonction $\widehat{f}$ *n'est pas intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(pour la mesure de Lebesgue), ce qui montre que* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$ *n'est pas stable par Fourier.*

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = 1_{[-n,n]}$. Calculer $f * g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{h_n} = f * g_n$. Montrer que la suite $f * g_n$ est bornée dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$ dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. La fonction* $f * g_n$ *est définie sur tout* $\mathbb{R}$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_n(x-y) dy = \lambda([-a,a] \cap [x-n, x+n]), \tag{10.9}$$

car $f(y)g_n(x-y) = 1$ *si* $y \in [-a,a] \cap [x-n, x+n]$ *et* 0 *sinon.*

On peut eventuellement expliciter $f * g_n$ *(mais ce n'est pas nécessaire pour la suite). Pour* $n > a$*, on obtient :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq a+n, \\ a - x + n & \text{si } -a+n \leq x < a+n \\ 2a & \text{si } a-n \leq x < -a+n \\ x+n+a & \text{si } -n-a \leq x < a-n \\ 0 & \text{si } x < -n-a. \end{cases}$$

Comme f et g_n appartiennent à $L^1_{\mathbb{C}}$, on sait (par le cours) que $f * g_n \in L^1_{\mathbb{C}}$ et $\widehat{f * g_n} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g_n}$. On obtient donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en posant $\sin(t)/t = 1$ pour $t = 0$),

$$\widehat{f * g_n}(t) = h_n(t), \text{ avec } h_n(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(at)\sin(nt)}{t^2}.$$

La fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $|h_n(t)| \le \sqrt{8/\pi}(1/t^2)$ pour tout t, on en déduit que $h_n \in L^1_{\mathbb{C}}$, on peut donc appliquer le théorème d'inversion de Fourier. Il donne

$$f * g_n(-\cdot) = \widehat{\widehat{f * g_n}} = \widehat{h_n}.$$

Comme $f * g_n(-\cdot) = f * g_n$ (par (10.9)), on a bien finalement $f * g_n = \widehat{h_n}$ avec $h_n \in L^1_{\mathbb{C}}$.

Comme f et g_n sont de carré intégrable, on sait que $f * g_n \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$) (voir l'exercice 8.7). Ceci peut aussi se voir directement sur la formule pour $f * g_n$. La formule (10.9) donne aussi $|f * g_n(x)| \le 2a$ pour tout x et tout n. La suite $(f * g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (et aussi dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$). On montre maintenant que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$.

Soit $\alpha > 0$ t.q. $\sin(at)/(at) \ge 1/2$ pour tout $t \in [0,\alpha]$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}}\int_{\mathbb{R}} |h_n(t)|dt \ge \frac{a}{2}\int_0^{\alpha} |\frac{\sin(nt)}{t}|dt = \frac{a}{2}\int_0^{n\alpha} |\frac{\sin(z)}{z}|dz,$$

Ce qui prouve que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$ car la fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Si l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ était surjective de L^1_C dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, elle serait alors bijective et continue (car on sait déjà qu'elle est injective et continue). Le théorème de Banach [1] donnerait alors que son inverse est aussi continue, ce qui est faux car la suite $(\widehat{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$.

Exercice 10.3 (Une condition donnant $\widehat{f} \in L^1$)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},T,\lambda)$.

1. Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\widehat{g} \in L^1$, $g\widehat{f} \in L^1$ et $\int f\widehat{g}d\lambda = \int g\widehat{f}d\lambda$.
2. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B * 1_B(t) = (1 - |t|)^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. On pose $\theta_n(t) = (1 - \frac{|t|}{n})^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $\widehat{\theta}_1(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
   [On pourra remarquer que $\theta_1 = 1_B * 1_B$ avec $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.]
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}^\star$, montrer que
   $$\widehat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}.$$
4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\widehat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\widehat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique). On utilise la fonction θ_n de la question précédente.
   (a) On note $\varphi_n = \theta_n\widehat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \widehat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \widehat{f}d\lambda$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \ge 0$ indépendant de n tel que $\int \widehat{\theta}_n(y)dy = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\widehat{f} \in L^1$.

Exercice 10.4 (Transformée de Fourier inverse) Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On suppose que la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$, est aussi intégrable (pour la mesure de Lebesgue).

1. Théorème de Banach : Si T est une application linéaire bijective et continue d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, alors son inverse est continue.

1. En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathrm{Re}(\widehat{f}(-t)) = \mathrm{Re}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{Im}(\widehat{f}(-t)) = -\mathrm{Im}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où $\mathrm{Re}(\xi)$ et $\mathrm{Im}(\xi)$ désignent les parties réelle et imaginaire du nombre complexe ξ.

Corrigé – *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx$.*

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\widehat{f}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixt}dx.$$

En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on obtient alors la formule suivante pour le conjugué de $\widehat{f}(-t)$ (noté $\overline{\widehat{f}(-t)}$) :

$$\overline{\widehat{f}(-t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,\overline{e^{ixt}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx = \widehat{f}(t).$$

En reprenant encore le conjugué, ceci donne bien $\widehat{f}(-t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

2. Montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(\widehat{f}(t)e^{itx})dt \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Corrigé – *Comme $\widehat{f}$ est intégrable, on sait $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ p.p. (théorème 10.1). On a donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

Dans l'intégrale de $-\infty$ à 0, on utilise le changement de variable $s = -t$, on obtient

$$\sqrt{2\pi}f(x) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(-s)e^{-ixs}ds + \int_0^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

En regroupant les deux intégrales, on en déduit

$$\sqrt{2\pi}f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\widehat{f}(-t)e^{-ixt} + \widehat{f}(t)e^{ixt}\right)dt.$$

La première question montre que le nombre complexe $\widehat{f}(-t)$ est le conjugué de $\widehat{f}(t)$. Comme le nombre complexe e^{-ixt} est le conjugué de e^{ixt} on en déduit que $\widehat{f}(-t)e^{-ixt}$ est le conjugué de $\widehat{f}(t)e^{ixt}$. Ceci donne alors

$$\sqrt{2\pi}f(x) = \int_0^{+\infty} 2Re(\widehat{f}(t)e^{ixt})dt.$$

On obtient bien, finalement, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} Re(\widehat{f}(t)e^{itx})dt.$$

Exercice 10.5 (Transformée de Fourier pour f de classe C^2, à support compact) On note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in C^2_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^2, et qu'il existe K compact de $\mathbb{R}$ t.q. $f = 0$ sur K^c).

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$.

2. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$. [On pourra utiliser la proposition 10.7.]

3. Montrer que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

N.B. Comme $C_c^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, cet exercice permet de définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}$ sans utiliser l'espace $\mathcal{S}_1$.

Exercice 10.6 (Caractérisation de m par $\widehat{m}$) Soit $d \geq 1$.

1. Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} = \widehat{\mu}$.

(a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda_d)$. Montrer que $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$.

Corrigé – *On remarque que $\int \widehat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t} \varphi(x) dx \right) dm(t)$. (Les intégrales sont toutes sur $\mathbb{R}^d$). La mesure signée m peut se décomposer en différence de deux mesures positives étrangères $m = m^+ - m^-$ (décomposition de Hahn, proposition 2.33). Comme*

$$\int\int |e^{-ix\cdot t}\varphi(x)| dx dm^{\pm}(t) = \|\varphi\|_1 m^{\pm}(\mathbb{R}^d) < +\infty,$$

on peut utiliser le théorème de Funini-Tonelli (théorème 7.7) avec les mesures λ_d et m^+ et les mesures λ_d et m^-. On obtient ainsi :

$$\int \widehat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t} dm(t) \right) \varphi(x) dx = \int \widehat{m}(x)\varphi(x) dx.$$

Le même raisonnement donne $\int \widehat{\varphi} d\mu = \int \widehat{\mu}(x)\varphi(x)dx$. Comme $\widehat{m}(x) = \widehat{\mu}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on en déduit bien $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$.

(b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$).

Corrigé –
Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda_d)$, la question précédente donne $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$. Or, l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une bijection dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ (proposition 10.11). On a donc $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$.

(c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$).

Corrigé – *Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$, uniformément sur $\mathbb{R}^d$, quand $n \to +\infty$. La question précédente donne $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise alors le théorème de convergence dominée (ce qui est possible car les mesures $m^{\pm}$ et $\mu^{\pm}$ sont des mesures finies), il donne $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$.*

La proposition 5.8 donne alors $m = \mu$.

2. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$.

Exercice 10.7 (Transformée de Fourier du produit de fonctions)
Pour $p \in [1,+\infty]$, On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans L^p.
On note $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, on note $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Si $f \in L^1$, on désigne par $\widehat{f}$ la transformée de f (on a donc $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$).
Si $f \in L^2$, on désigne par $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\tilde{\mathcal{F}}(f) \in L^2$).
On rappelle que si $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\widehat{f} = F(f)$ p.p.. Dans ce cas, on confond, en général, $\widehat{f}$ et $\tilde{\mathcal{F}}(f)$.

1. (Convolution $L^2 - L^2$). Soit $u, v \in L^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $s \mapsto u(t-s)v(s)$ est intégrable et donc que la fonction $u * v$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ par la formule

$$u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-s)v(s)ds, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $u * v \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\|u * v\|_\infty \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.

Corrigé – *On peut choisir pour u et v des représentants et donc considérer que $u, v \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La question est alors corrigée dans l'exercice 8.7 (voir la première question de cet exercice en prenant $p = q = 2$). Dans l'exercice 8.7, les fonctions sont à valeurs réelles mais la démonstration est identique pour des fonctions à valeurs complexes.*

2. Soit $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(a) Montrer que f, g, $fg \in L^1 \cap L^2$, puis que $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que f et g appartiennent à l'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}_1$ (voir la definition 10.9). Comme $\mathcal{S}_1 \subset L^p$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on a donc $f, g \in L^1 \cap L^2$ (avec la confusion habituelle entre un élément de L^p et son représentant continu lorsqu'il existe). Puis, comme la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_1$ (voir la proposition 10.11), on a aussi $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}_1$ et donc $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$.*

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}(t).$$

[On pourra, par exemple, utiliser le fait que $f, \widehat{g} \in L^1$ et calculer $\widehat{f} * \widehat{g}(t)$ en utilisant la définition de $\widehat{f}$ et la transformée de Fourier inverse pour $\widehat{g}$.]

Corrigé – *Soit $t \in \mathbb{R}$. comme $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2$, la fonction $\widehat{f} * \widehat{g}$ est bien définie au point t et on a*

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t-x)\widehat{g}(x)dx.$$

Comme $f \in L^1$, on peut utiliser la formule définissant $\widehat{f}(t-x)$. Elle donne

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-x)y} f(y)dy \Big) \widehat{g}(x)dx.$$

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini car $|e^{-i(t-x)y} f(y)\widehat{g}(x)| = |f(y)\widehat{g}(x)|$ (et $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)\widehat{g}(x)| dx dy = \|f\|_1 \|\widehat{g}\|_1 < +\infty$). On obtient

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \widehat{g}(x)dx \Big) e^{-ity} f(y)dy.$$

Comme $g, \widehat{g} \in L^1$, le théorème d'inversion de Fourier (théorème 10.6) donne $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \widehat{g}(x)dx$ et donc

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y)g(y)dy,$$

c'est-à-dire (noter que $fg \in L^1$) $\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{fg}(t)$.

3. Soit $f, g \in L^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)(t).$$

Corrigé – *Il suffit d'utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans L^2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que $f_n \to f$ dans L^2 et $g_n \to g$ dans L^2, quand $n \to +\infty$. On a alors $f_n g_n \to fg$ dans L^1 (il suffit de remarquer que $\|f_n g_n - fg\|_1 \le \|f_n - f\|_2 \|g_n\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2$). La transformée de Fourier envoie continûment L^1 dans $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a donc $\widehat{f_n g_n} \to \widehat{fg}$ uniformément sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier envoie aussi continûment L^2 dans L^2. On a donc $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ et $\widehat{g_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(g)$ dans L^2. La première question donne alors que $\widehat{f_n} * \widehat{g_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$, la question précédente donne $\widehat{f_n g_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f_n} * \widehat{g_n}(t)$. En passant à la limte quand $n \to +\infty$ on en déduit bien que $\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)(t)$.

Exercice 10.8 (Caractérisation des fonctions à valeurs réelles) Soit $d \ge 1$. Pour $1 \le p \le \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}_d$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 10.9 (Fourier, série et transformée)
On rappelle que l'espace $\mathcal{S}$ est défini par

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty\}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ (On rappelle que $\widehat{\varphi}$ est alors aussi dans l'espace $\mathcal{S}$ et que $\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi(-\cdot)$).

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi)$ est absolument convergente (dans $\mathbb{C}$).
   Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $f(t)$ par $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi)$.
2. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que f est 2π-périodique.
   On rappelle que ceci donne que f est somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que pour tout t dans $\mathbb{R}$ on a
   $$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int},$$
   avec $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que
   $$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\widehat{\varphi}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(-n).$$
   En déduire que pour tout t dans $\mathbb{R}$
   $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t + 2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(-n) e^{int}.$$

Exercice 10.10 ($f \in C_c^\infty$ et $\widehat{f} = 0$ sur un ouvert non vide implique $f = 0$)
Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\widehat{f} = 0$ sur U. Montrer que $f = 0$ sur tout $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que l'application $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto \int f(x) e^{-ix(\xi + i\eta)} dx$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{C}$.]