Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

CTES
Centre de Télé-Enseignement Sciences

MASTER 1 MATHEMATIQUES – INFORMATIQUE
MATHEMATIQUES GENERALES
M1...

Expédition dans la semaine n°	Etape	Code UE	N° d'envoi de l'UE
43	**M1, UE 1.3**	**MIMA-SMAAU11T**	**1**

Nom de l'UE : Mesure, Intégration, Probabilités

Le cours est essentiellement tiré d'un livre disponible sur la page web indiquée ci dessous. Pour chaque semaine, il est proposé d'étudier une partie du cours et de faire des exercices (corrigés).
Deux devoirs sont à rendre afin de bénéficier d'une note de contrôle continu.
note finale=max(note-examen, 1/3(2 note-examen + note-contrôle-continu)).

- Contenu de l'envoi : Cours : Chapitre 2 et chapitre 3 paragraphes 1 à 4, Exercices

- Guide du travail à effectuer

Semaine 1 (Tribu, mesures) :
Etudier les paragraphes 2.2 (tribu) et 2.3 (mesure, probabilité)
Exercices proposés (avec corrigés) : 2.1 à 2.6, 2.15, 2.16, 2.26

Semaine 2 (mesure de Lebesgue et probabilités sur B(R) :
Etudier le paragraphe 2.5 (mesure de Lebesgue).
On pourra sauter la partie de 2.36 à 2.42 (existence de la mesure de Lebesgue)
Etudier le paragraphe 2.6.3 (probabilité sur B(R))
Exercices proposés (avec corrigés) : 2.27, 2.28, 2.32, 2.35

Semaine 3 (Indépendance de tribus et d'évènements) :
Etudier les paragraphes 2.6.1 et 2.6.2
Exercices proposés (avec corrigés) : 3.19 (questions 1 à 4)

Semaine 4 (fonction mesurable, variable aléatoire) :
Etudier les paragraphes 3.1, 3.2, 3.3
Exercices proposés (avec corrigés) : 3.1, 3.3, 3.7, 3.11, 3.17
3.19 (question 5), 3.20, 3.21

-Coordonnées des enseignants responsables de l'envoi

E. Hillion et T. Gallouet, CMI, 39 rue Joliot Curie, 13453 marseille cedex 13
email : thierry.gallouet@univ-amu.fr, erwan.hillion@univ-amu.fr
Vous pouvez aussi consulter la page web:
http://www.cmi.univ-mrs.fr/~gallouet/tele.d/mip.d
et nous poser des questions par le forum d'ametice ou par email

Chapitre 2

Tribus et mesures

2.1 Introduction

2.1.1 Cas d'un problème "discret"

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu'un certain événement, résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple l'expérience qui consiste à lancer un dé. On appelle éventualité associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et univers des possibles l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 ; on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au dé cassé. On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est-à-dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E.

À partir des éventualités, qui sont donc les éléments de l'univers des possibles E, on définit les événements, qui forment un ensemble de parties de E. Dans notre exemple du lancer de dé, l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. Dans l'exemple du dé, la partie $\{2, 4, 6\}$ de E est l'événement : "le résultat du lancer est pair". On appelle événement élémentaire un singleton, par exemple $\{6\}$ dans notre exemple du lancer de dé, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement vide l'ensemble vide $\emptyset$ (qui a donc une chance nulle de se réaliser). Pour mesurer la chance qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble des événements (donc de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dans notre exemple du lancer de dé) dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (qui semblent naturelles...). La chance (ou probabilité) pour un événement $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ de se réaliser sera donc le nombre $p(\mathrm{A})$, appartenant à $[0, 1]$.

L'exemple du lancer de dé, que nous venons de considérer, est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis, l'ensemble E est alors infini dénombrable (on rappelle qu'un ensemble I est dénombrable s'il existe une bijection de I dans $\mathbb{N}$, il est au plus dénombrable s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$), ou des problèmes (parfois appelés continus) où E est infini non dénombrable.

2.1.2 Exemple continu

Considérons maintenant l'expérience qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire est alors un point $(x, y) \in \mathrm{E}$ (le point d'impact de la balle), et un événement semble être une partie quelconque A de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. On suppose qu'on a effectué le lancer sans viser, c'est-à-dire en supposant que n'importe quel point de la table a une chance égale d'être atteint (les événements élémentaires sont dit équiprobables), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste…). On se rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d'être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement deviner que la probabilité pour une partie A d'être atteinte (dans le modèle équiprobable) est le rapport entre la surface de A et la surface de E. La notion intuitive de surface correspond en fait à la notion mathématique de mesure que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l'a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, *i.e.* qui vérifie les propriétés (4.1)-(4.2), et qui mesure toutes les parties de $\mathbb{R}$ (au sens intuitif de longueur) ou $\mathbb{R}^2$ (au sens intuitif de surface), ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ (voir à ce sujet l'exercice 2.28). On va donc définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ (qu'on appelle tribu) sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d'un ensemble fini, la tribu sera, en général, $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ tout entier. Mais, dans le cas de la balle de ping-pong que vous venons de décrire, l'ensemble des événements sera une tribu strictement incluse dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

2.2 Tribu ou $\sigma-$algèbre

Définition 2.1 (Tribu ou $\sigma-$algèbre) *Soient* E *un ensemble,* T *une famille de parties de* E *(i.e.* $\mathrm{T} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*). La famille* T *est une tribu (on dit aussi une $\sigma-$algèbre) sur* E *si* T *vérifie :*

1. $\emptyset \in \mathrm{T}, \mathrm{E} \in \mathrm{T}$,
2. T *est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T*, on a* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

3. T *est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T*, on a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.
4. T *est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*, on a* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}$ *(On rappelle que* $\mathrm{A}^c = \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$*).*

Il est clair que, pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1-4 de la définition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in \mathrm{T}$ (ou $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$), 2 (ou 3) et 4.

Exemples de tribus sur E : $\{\emptyset, \mathrm{E}\}$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ sont des tribus sur E.

Définition 2.2 (Langage probabiliste) *Soient* E *un ensemble quelconque (parfois appelé l'univers des possibles) et* T *une tribu ; on appelle éventualités les éléments de* E *et événements les éléments de* T. *On appelle événement élémentaire un singleton appartenant à* T. *On dit que deux événements* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *sont incompatibles si* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

Proposition 2.3 (Stabilité par intersection des tribus) *Soient* E *et* I *deux ensembles. Pour tout* $i \in \mathrm{I}$*, on se donne une tribu* T_i *sur* E. *Alors, la famille (de parties de* E*)*

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E};\ \mathrm{A} \in \mathrm{T}_i,\ \forall i \in \mathrm{I}\}$$

est encore une tribu sur E.

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de la première question de l'exercice 2.2. ■

Cette proposition nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 2.4 (Tribu engendrée) *Soient* E *un ensemble et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$. *On appelle tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ *la plus petite tribu contenant* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire la tribu* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ *intersection de toutes les tribus sur* E *contenant* $\mathcal{C}$ *(cette intersection est non vide car* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$*).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est identique à celle de tribu en remplaçant "dénombrable" par "finie".

Définition 2.5 (Algèbre) *Soient* E *un ensemble,* $\mathcal{A}$ *une famille de parties de* E *(i.e.* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*). La famille* $\mathcal{A}$ *est une algèbre sur* E *si* $\mathcal{A}$ *vérifie :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathrm{E} \in \mathcal{A}$,

2. *$\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout* $A, B \in \mathcal{A}$ *on a* $A \cup B \in \mathcal{A}$.
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout* $A, B \in \mathcal{A}$ *on a* $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *on a* $A^c \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.6 (Algèbre engendrée) *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. *Comme pour les tribus, on peut définir l'algèbre engendrée par* $\mathcal{C}$. *C'est la plus petite algèbre contenant* $\mathcal{C}$, *c'est-à-dire l'intersection de toutes les algèbres contenant* $\mathcal{C}$ *(voir l'exercice 2.9).*

Soit E un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (voir la définition 2.4 et l'exercice 2.2). Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : intersection dénombrable, union dénombrable et passage au complémentaire. Plus précisément, on pose :

$$\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) = \{A \subset E \text{ tel que } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{avec, pour tout } n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\},$$
$$\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) = \{A \subset E \text{ tel que } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{avec, pour tout } n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\},$$
$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).$$

Prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $T(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci-après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset T(\mathcal{C})$. Cependant, $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu (cela est moins facile à voir). En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, pour $n \geq 1$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset T(\mathcal{C})$).

Remarque 2.7 *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$. *Il est alors facile de voir que* $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$ *(cf. Exercice 2.2).*

La construction de la tribu de Borel s'appuie sur la topologie des ouverts de $\mathbb{R}$. Rappelons à toutes fins utiles qu'une topologie est précisément la donnée des ouverts :

Définition 2.8 (Topologie) *Soit* E *un ensemble. Une topologie sur* E *est donnée par une famille de parties de* E, *appelées ouverts de* E, *contenant* $\emptyset$ *et* E, *stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. L'ensemble* E, *muni de cette famille de parties, est alors un espace topologique.*

Définition 2.9 (Tribu borélienne) *Soit* E *un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de* E, *cette tribu sera notée* $\mathcal{B}(E)$. *Dans le cas* $E = \mathbb{R}$, *cette tribu est donc notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On appelle borélien de* $\mathbb{R}$ *un élément de la tribu borélienne.*

Un des objectifs principaux de ce chapitre est de construire une application λ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

1. $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$,
2. $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. (Noter que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ grâce à la stabilité d'une tribu par union dénombrable.)

C'est l'objet du paragraphe 2.5. Une question naturelle est de savoir si l'on peut prendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La réponse est non (voir les exercices 2.28 et 2.29). On peut même démontrer que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (alors que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$).

On donne maintenant un rappel rapide sur les cardinaux (sans entrer dans les aspects difficiles de la théorie des ensembles, et donc de manière peut-être un peu imprécise).

Soient A et B deux ensembles.

1. On dit que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ s'il existe une application bijective de A dans B. Pour montrer que deux ensembles ont même cardinaux, il est souvent très utile d'utiliser le théorème de Bernstein (voir l'exercice 1.11). Ce théorème dit que s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B (et donc $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$). Le théorème de Bernstein motive également la définition suivante.
2. On dit que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ s'il existe une application injective de A dans B.
3. Un autre théorème intéressant, dû à Cantor, donne que, pour tout ensemble X, on a $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ (c'est-à-dire $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ et $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$). On a donc, en particulier, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$. La démonstration du théorème de Cantor est très simple. Soit $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$. On va montrer que φ ne peut pas être surjective. On pose $A = \{x \in X ; x \notin \varphi(x)\}$ (A peut être l'ensemble vide). Supposons que $A \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Soit alors $a \in X$ tel que $A = \varphi(a)$. Si $a \in A = \varphi(a)$, alors $a \notin A$ par définition de A. Si $a \notin A = \varphi(a)$, alors $a \in A$ par définition de A. On a donc montré que A ne peut pas avoir d'antécédent (par φ) et donc φ n'est pas surjective.

Proposition 2.10 *On note $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_2 = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{]a,\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. Alors $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Noter que d'autres caractérisations de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, semblables, sont possibles.)*

DÉMONSTRATION – On a, par définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On va démontrer ci-après que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ (le fait que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_3)$ est laissé au lecteur).

Comme $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, on a $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. On va montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$, on aura alors que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose $\mathrm{O} \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$). Le lemme 2.11 ci-après nous donne l'existence d'une famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in \mathrm{A}}$ d'intervalles ouverts telle que $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ et $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_n$. Noter qu'on a aussi $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ en posant $\mathrm{I}_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N}\setminus \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{I}_n \in \mathcal{C}_2 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ pour tout $n \in \mathrm{A}$ et $\emptyset \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$, on en déduit, par stabilité dénombrable d'une tribu, que $\mathrm{O} \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. Donc, $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. On a bien montré que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. ■

Lemme 2.11 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés.*

DÉMONSTRATION – Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathrm{O} \neq \emptyset$. On pose $\mathrm{A} = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Q}^2 ; \beta < \gamma,]\beta,\gamma[\subset \mathrm{O}\}$. On a donc $\bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[\subset \mathrm{O}$. On va montrer que $\mathrm{O} \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$ (et donc que $\mathrm{O} = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$).

Soit $x \in \mathrm{O}$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset \mathrm{O}$. En prenant $\beta_x \in \mathbb{Q}\cap]x-\alpha_x, x[$ et $\gamma_x \in \mathbb{Q}\cap]x, x+\alpha_x[$ (de tels β_x et γ_x existent) on a donc $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \mathrm{O}$ et donc $(\beta_x,\gamma_x) \in \mathrm{A}$. D'où $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$. On a bien montré que $\mathrm{O} \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$ et donc que $\mathrm{O} = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$. Comme $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, A est au plus dénombrable et le lemme est démontré. ■

On peut aussi montrer que tout ouvert non vide est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (cf. le lemme 2.44 page 65).

Définition 2.12 (Espace et partie mesurable ou probabilisable) *Soient* E *un ensemble et* T *une tribu sur* E*. Le couple* (E, T) *est appelé espace mesurable ou (en langage probabiliste !) espace probabilisable. Les parties de* E *qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de* T *sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).*

2.3 Mesure, probabilité

Définition 2.13 (Mesure) *Soit* (E, T) *un espace mesurable. On appelle mesure une application* $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(avec* $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$*) vérifiant :*

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. m *est* σ*-additive, c'est-à-dire que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T *disjoints deux à deux (i.e. tels que* $A_n \cap A_m = \emptyset$*, si* $n \neq m$*) on a :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.1}$$

Remarque 2.14

1. Dans la définition précédente on a étendu à $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'addition dans $\mathbb{R}_+$. On a simplement posé $x + (+\infty) = +\infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Noter également que la somme de la série dans la définition précédente est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que, bien sûr, $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum_{p=0}^{n} a_p \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to +\infty$.
2. Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquer que $x + y = x + z$ implique $y = z$ si $x \neq +\infty$.
3. Dans la définition précédente, la condition 1. peut être remplacée par la condition : $\exists \ A \in T, m(A) < \infty$. La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur attentif.
4. Il est intéressant de remarquer que, pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance. Plus précisément, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$. C'est l'objet du lemme 2.15.
5. Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité, c'est-à-dire que

$$m(\bigcup_{p=0}^{n} A_p) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p)$$

   pour toute famille finie $(A_p)_{p=0,\ldots,n}$ d'éléments de T, disjoints deux à deux. L'additivité se démontre avec la σ-additivité en prenant $A_p = \emptyset$ pour $p > n$ dans (2.1).
6. Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $T = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il est facile de construire des mesures sur T, mais il n'existe pas de mesure sur T, notée m, telle que $m(]a, b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (voir les exercices 2.29 et 2.28). Une telle mesure existe si on prend pour T la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, c'est l'objet de la section 2.5.

Lemme 2.15 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *et soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective ; alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}.$$

DÉMONSTRATION – On pose

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p) \text{ et } B = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} (= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}).$$

Noter que $A, B \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On veut montrer que $A = B$.

On montre d'abord que $B \leq A$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Comme $a_q \geq 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \leq \sum_{p=0}^{N} a_p \leq A$. On en déduit, faisant tendre n vers ∞ que $B \leq A$.

En raisonnant avec l'inverse de φ on a aussi $A \leq B$ et finalement $A = B$. ■

Définition 2.16 (Mesure finie et probabilité) *Soit* (E, T) *un espace mesurable.*

1. *On appelle mesure finie une mesure* m *sur* T *telle que* $m(E) < \infty$.
2. *On appelle probabilité une mesure* p *sur* T *telle que* $p(E) = 1$.

Définition 2.17 (Espace mesuré, espace probabilisé) *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* m *une mesure (resp. une probabilité) sur* T. *Le triplet* (E, T, m) *est appelé espace mesuré (resp. espace probabilisé).*

Définition 2.18 (Mesure σ-finie) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que* m *est* σ*-finie (ou que* (E, T, m) *est* σ*-fini) si il existe une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$A_n \in T, \quad m(A_n) < +\infty, \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \textit{et} \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Remarque 2.19 Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini. Une conséquence de la définition 2.18 est qu'il existe alors une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de T telle que $m(E_n) < +\infty$ pour tout n, $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$. En effet, à partir de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la définition 2.18, on construit une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$E_0 = A_0 \text{ et, pour } n > 0, \ E_n = A_n \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} E_p.$$

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien les propriétés désirées.

Exemple 2.20 (Mesure de Dirac) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $a \in E$. *On définit sur* T *la mesure* δ_a *par (pour* $A \in T$*) :*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \notin A, \\ 1 & \textit{si } a \in A. \end{cases} \tag{2.2}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Remarque 2.21 (Comment choisir la probabilité) Soit (E, T) un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur T. C'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rende compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion de fréquence, qui est une notion expérimentale à l'origine. Soit $A \in T$ un événement, dont on cherche à évaluer la probabilité $p(A)$. On effectue pour cela N fois l'expérience dont l'univers des possibles est E, et on note N_A le nombre de fois où l'événement A est réalisé. A N fixé, on définit alors la *fréquence* $f_N(A)$ de l'événement A par :

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Expérimentalement, il s'avère que $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. C'est ce qu'on appelle la loi empirique des grands nombres. On peut donc définir expérimentalement $p(A) = \lim_{N\to+\infty} f_N(A)$. Cependant, on n'a pas ainsi démontré que p est une probabilité : il ne s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On donnera plus loin la loi forte des grands nombres (proposition 6.99), qui permettra de justifier mathématiquement la loi empirique. On peut remarquer que $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1$.

Exemple 2.22 (Le cas équiprobable) Soit (E, T, p) un espace probabilisé. On suppose que tous les singletons appartiennent à la tribu et que les événements élémentaires sont équiprobables. On a alors : $p(\{x\}) = \frac{1}{\mathrm{card} E}$ pour tout $x \in E$.

Définition 2.23 (Mesure atomique) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré tel que :* $\{x\} \in T$ *pour tout* x *de* E. *On dit que* m *est portée par* $S \in T$ *si* $m(S^c) = 0$. *Soit* $x \in E$, *on dit que* x *est un atome ponctuel de* m *si* $m(\{x\}) \neq 0$. *On dit que* m *est purement atomique si elle est portée par la partie de* E *formée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.*

Définition 2.24 (Mesure diffuse) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* m *une mesure sur* T *. On dit que* m *est diffuse si* $\{x\} \in T$ *et* $m(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in E$. *(Cette définition est aussi valable pour une mesure signée sur* T, *définie dans la section 2.4.)*

Définition 2.25 (Partie négligeable) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $A \subset E$. *On dit que* A *est négligeable s'il existe un ensemble* $B \in T$ *tel que* $A \subset B$ *et* $m(B) = 0$.

Définition 2.26 (Mesure complète) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que* m *est complète (ou que l'espace* (E, T, m) *est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à* T.

La proposition suivante donne les principales propriétés d'une mesure.

Proposition 2.27 (Propriétés des mesures) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. La mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. Monotonie : Soit $A, B \in T$, $A \subset B$, *alors*

$$m(A) \leq m(B). \tag{2.3}$$

2. σ*-sous-additivité : Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.4}$$

3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \subset A_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)). \tag{2.5}$$

4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_{n+1} \subset A_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et telle que il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, *alors*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)). \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ces propriétés est facile : elles découlent toutes du caractère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention : ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées que nous verrons à la section 2.4.

1. *Monotonie.* Soit $A, B \in T$, $A \subset B$. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Comme $A \in T$ et $B \setminus A = B \cap A^c \in T$, l'additivité de m (voir la remarque 2.14) donne $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$, car m prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   Noter aussi que $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$ si $0 \leq m(A) \leq m(B) < \infty$ (mais cette relation n'a pas de sens si $m(A) = m(B) = \infty$).

2. $\sigma-$*sous additivité.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On veut montrer que
$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$
   On pose $B_0 = A_0$ et, par récurrence sur n, $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} B_i)$ pour $n \geq 1$. Par récurrence sur n on montre que $B_n \in T$ pour tout n en remarquant que, pour $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c)$. La construction des B_n assure que
$$B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \neq m \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$
   Pour vérifier cette dernière propriété, on remarque que
$$B_n \subset A_n \text{ et donc } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Puis, si $x \in A_n$ et $x \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$, on a alors

$$x \in A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c) = B_n.$$

Ceci prouve que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

et donc, finalement,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

On utilise maintenant la σ-additivité de m et la monotonie de m (car $B_n \subset A_n$) pour écrire que

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

3. *Continuité croissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par monotonie de m, on a

$$m(A_{n+1}) \geq m(A_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$B_0 = A_0 \text{ et } B_n = A_n \setminus A_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1$$

(noter que $A_{n-1} \subset A_n$). On a

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, B_n \in T \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$

La σ-additivité de m nous donne

$$m(A) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m(B_p).$$

Puis, comme $A_n = \bigcup_{p=0}^{n} B_p$, l'additivité de m (qui se déduit de la σ-additivité) nous donne

$$\sum_{p=0}^{n} m(B_p) = m(A_n) \text{ et donc } m(A) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

4. *Continuité décroissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$.

   Par monotonie, on a $m(A_{n+1}) \leq m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

   On a aussi, par monotonie,

$$m(A) \leq m(A_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ avec } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Comme $m(A_{n_0}) < \infty$, on a aussi

$$m(A_n) < \infty \text{ pour tout } n \geq n_0 \text{ et } m(A) < \infty.$$

On pose $B_n = A_{n_0} \setminus A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \geq n_0$. La suite $(B_n)_{n \geq n_0}$ est croissante ($B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$) et

$$B = \bigcup_{n \geq 0} B_n = \bigcup_{n \geq n_0} (A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n \geq n_0} A_n = A_{n_0} \setminus A.$$

La continuité croissante donne

$$m(A_{n_0} \setminus A) = m(B) = \lim_{n \to +\infty} m(B_n) = \lim_{n \to +\infty} m(A_{n_0} \setminus A_n). \tag{2.7}$$

Comme $A \subset A_{n_0}$, on a $m(A_{n_0} \setminus A) = m(A_{n_0}) - m(A)$ (car $m(A) \leq m(A_{n_0}) < \infty$, on utilise ici la remarque à la fin de la preuve de la monotonie). De même, comme $A_n \subset A_{n_0}$ (pour $n \geq n_0$), on a $m(A_{n_0} \setminus A_n) = m(A_{n_0}) - m(A_n)$ (car $m(A_n) \leq m(A_{n_0}) < \infty$). En utilisant une nouvelle fois que $m(A_{n_0}) < \infty$, on déduit de (2.7) que $m(A) = \lim_{n \to +\infty} m(A_n)$. ■

Théorème 2.28 (Mesure complétée) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on note* $\mathcal{N}_m$ *l'ensemble des parties négligeables. On pose* $\overline{T} = \{A \cup N,\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$. *Alors* $\overline{T}$ *est une tribu, et il existe une et une seule mesure, notée* $\overline{m}$, *sur* $\overline{T}$, *égale à m sur* T. *De plus, une partie de* E *est négligeable pour* $(E, \overline{T}, \overline{m})$ *si et seulement si elle est négligeable pour* (E, T, m). *la mesure* $\overline{m}$ *est complète et l'espace mesuré* $(E, \overline{T}, \overline{m})$ *s'appelle le complété de* (E, T, m). *La mesure* $\overline{m}$ *s'appelle la mesure complétée de la mesure m.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 2.33.

On introduit maintenant la notion de mesure absolument continue, cette notion est intéressante en liaison avec les mesures de densité (définition 4.21). On montrera au chapitre 6 que, si (E, T, m) un espace mesuré σ-fini et μ une mesure finie sur T, alors μ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m (théorème 6.78). Cette notion de mesure absolument continue peut être sautée en première lecture.

Définition 2.29 (Mesure absolument continue, mesure étrangère)

Soient (E, T) *un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur* T.

1. *On dit que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m (et on note* $\mu << m$*) si pour tout* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$, *alors* $\mu(A) = 0$.
2. *On dit que la mesure μ est étrangère à la mesure m (et note* $\mu \perp m$*) s'il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $\mu(A^c) = 0$.

Proposition 2.30 *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* m *et* μ *des mesures (positives) sur* T *; on suppose de plus que la mesure* μ *est* σ*-finie. Alors il existe une mesure* μ_a *absolument continue par rapport à* m *et une mesure* μ_e *étrangère à* m *(et à* μ_a*) telle que* $\mu = \mu_a + \mu_e$.

DÉMONSTRATION – On suppose tout d'abord que μ est une mesure finie. On pose $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in T, m(A) = 0\}$. Il existe donc une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $m(A_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mu(A_n) \to \alpha$, quand $n \to +\infty$. On pose alors $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a $C \in T$, $0 \le m(C) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = 0$ (par σ-sous additivité de m), $\mu(C) \ge \mu(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par monotonie de μ) et donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $\mu(C) \ge \alpha$. Enfin, la définition de α donne alors $\mu(C) = \alpha$. On a donc trouvé $C \in T$ tel que $m(C) = 0$ et $\mu(C) = \alpha$.

Pour $A \in T$, on pose $\mu_e(A) = \mu(A \cap C)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap C^c)$.

Il est clair que μ_e et μ_a sont des mesures sur T et que $\mu = \mu_e + \mu_a$. Comme $\mu_e(C^c) = 0$ et $\mu_a(C) = 0$, les mesures μ_a et μ_e sont étrangères. Comme $m(C) = 0$ et $\mu_e(C^c) = 0$, les mesures μ_e et m sont aussi étrangères. Il reste à montrer que μ_a est absolument continue par rapport à m.

Soit $B \in T$ tel que $m(B) = 0$. On veut montrer que $\mu_a(B) = 0$, c'est-à-dire que $\mu(B \cap C^c) = 0$. On pose $D = B \cap C^c$ et $F = C \cup D$. Comme $D \cap C = \emptyset$, on a

$$m(F) = m(C) + m(D) \le m(C) + m(B) = 0 \text{ et } mu(F) = \mu(C) + \mu(D) = \alpha + \mu(D).$$

Comme $m(F) = 0$, la définition de α donne que $\mu(F) \le \alpha$. On a donc $\alpha + \mu(D) \le \alpha$, d'où l'on déduit, comme $\alpha \in \mathbb{R}$ (et c'est ici que l'on utilise le fait que μ est une mesure finie), que $\mu(D) = 0$, c'est-à-dire $\mu_a(B) = 0$. On a bien ainsi montré que μ_a est absolument continue par rapport à m.

On considère maintenant le cas général où μ est σ-finie. Il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \ne m$ (voir la remarque 2.19).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in T$, on pose

$$\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap E_n).$$

La mesure $\mu^{(n)}$ est donc finie sur T. Le raisonnement précédent donne donc l'existence de $\mu_a^{(n)}$ absolument continue par rapport à m et de $\mu_e^{(n)}$ étrangère à m (et à $\mu_a^{(n)}$) telle que $\mu^{(n)} = \mu_a^{(n)} + \mu_e^{(n)}$. On pose alors, pour $A \in T$:

$$\mu_e(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_e^{(n)}(A);\ \mu_a(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_a^{(n)}(A).$$

μ_e et μ_a sont bien des mesures sur T (voir l'exercice 4.2) et il est clair que $\mu = \mu_e + \mu_a$, μ_a absolument continue par rapport à m et μ_e étrangère à m (et à μ_a). ■

Il est parfois utile (surtout en théorie des probabilités, mais une telle question apparaît aussi dans le section 2.5 et dans le chapitre 7) de montrer l'unicité d'une mesure ayant des propriétés données. La proposition suivante donne une méthode pour montrer une telle unicité (d'autres méthodes sont possibles, voir, par exemple, la proposition 5.8 dans le chapitre 5).

Proposition 2.31 (Condition suffisante pour l'égalité de deux mesures) *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* m, μ *deux mesures sur* T. *On suppose qu'il existe* $\mathcal{C} \subset T$ *tel que*

1. $\mathcal{C}$ *engendre* T,
2. $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie (c'est-à-dire* $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$*),*
3. *Il existe une suite* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *telle que* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,
4. $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{C}$.

On a alors $m = \mu$ *(c'est-à-dire* $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in T$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 2.22 qui découle de l'exercice 2.14 (consacré au théorème $\pi - \lambda$ de E. Dynkin).

2.4 Mesure signée

Définition 2.32 (Mesure signée) *Soit* (E, T) *un espace mesurable. On appelle mesure signée (sur* T*) une application* $m : T \to \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété de* σ*-additivité, c'est-à-dire telle que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \cap A_m = \emptyset$, *si* $n \neq m$,

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.8}$$

Noter qu'une mesure signée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En prenant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans (2.8), on en déduit que $m(\emptyset) = 0$.

On peut aussi considérer des mesures à valeurs complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, les parties réelles et imaginaires de ces mesures à valeurs complexes sont des mesures signées.

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c'est-à-dire (cf. définition 2.13) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Lorsque l'on s'intéressera à des mesures prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on précisera qu'il s'agit de mesures signées. Noter que les mesures signées ne vérifient pas, en général, les propriétés (2.3) et (2.4). Pour avoir un contre–exemple, il suffit de considérer une mesure signée m (non nulle) telle que $-m$ soit une mesure (positive).

Proposition 2.33 (Décomposition de Hahn d'une mesure signée) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* m *une mesure signée sur* T*. Alors, il existe deux mesures (positives) finies, notées* m^+ *et* m^-*, telles que :*

1. $m(A) = m^+(A) - m^-(A)$*, pour tout* $A \in T$.

2. Les mesures m^+ *et* m^- *sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe* $C \in T$ *tel que* $m^+(C) = 0$*, et* $m^-(E \setminus C) = 0$.

Une conséquence des propriétés ci-dessus est que $m^-(A) = -m(A \cap C)$ *et* $m^+(A) = m(A \cap C^c)$ *pour tout* $A \in T$.

De plus, la décomposition de m *en différence de deux mesures (positives) finies étrangères est unique. Elle s'appelle décomposition de Hahn de* m.

DÉMONSTRATION – La démonstration d'existence de m^+ et m^- est décomposée en trois étapes. Dans la première étape, on va montrer que, si $A \in T$, il existe $\tilde{A} \in T$ tel que $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \Rightarrow m(B) \geq 0.$$

Cette première étape nous permettra, dans l'étape 2, de montrer l'existence de $C \in T$ tel que $m(C) = \sup\{m(A), A \in T\}$; ceci montre, en particulier que $\sup\{m(A), A \in T\} < \infty$.

Enfin, dans l'étape 3, on pose $m^+(A) = m(A \cap C)$ et $m^-(A) = -m(A \cap C^c)$ (pour tout $A \in T$) et on remarque que m^+ et m^- sont des mesures finies, étrangères et telles que $m = m^+ - m^-$.

Étape 1. Soit $A \in T$, on montre, dans cette étape, qu'il existe $\tilde{A} \in T$ tel que $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \Rightarrow m(B) \geq 0. \tag{2.9}$$

On commence par montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T tels que :

1. $B_0 = A$,
2. $B_{n+1} \subset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $m(B_n \setminus B_{n+1}) \leq \beta_n = \max\{\frac{\alpha_n}{2}, -1\}$ où $\alpha_n = \inf\{m(C), C \in T, C \subset B_n\}$.

On prend $B_0 = A$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, on suppose B_p connu pour $p \leq n$. On a

$$\alpha_n = \inf\{m(C), C \subset B_n\} \leq 0$$

(car $\emptyset \subset B_n$). Si $\alpha_n = -\infty$, il existe $C_n \in T$ tel que

$$C_n \subset B_n \text{ et } m(C_n) \leq \beta_n = -1.$$

Si $-\infty < \alpha_n < 0$, on a $\beta_n > \alpha_n$, il existe donc $C_n \in T$ tel que

$$C_n \subset B_n \text{ et } m(C_n) \leq \beta_n.$$

Si $\alpha_n = 0$, on prend $C_n = \emptyset$. Enfin, on prend $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$ et on obtient bien les propriétés désirées en remarquant que $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $m > n$, on a donc $C_m \subset B_m \subset B_{n+1}$ et donc $C_m \cap C_n = \emptyset$ (car $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$). Par σ-additivité de m, on en déduit

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n).$$

Comme $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \in \mathbb{R}$, la série de terme général $m(C_n)$ est convergente. On a donc

$$m(C_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ et donc } \beta_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

(car $m(C_n) \leq \beta_n \leq 0$) et, finalement,

$$\alpha_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On pose maintenant

$$\tilde{A} = A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

On a, bien sûr, $\tilde{A} \in T$ et $\tilde{A} \subset A$. On montre maintenant que $\tilde{A}$ vérifie (2.9). Soit $C \in T$, $C \subset \tilde{A}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \subset B_n$ et donc $m(C) \geq \alpha_n$. Quand $n \to +\infty$, on en déduit que $m(C) \geq 0$. ce qui donne bien (2.9).

Il reste à montrer que $m(\tilde{A}) \geq m(A)$. Comme $A = \tilde{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$ (et que cette union est "disjointe"), la σ-additivité de m donne que $m(A) = m(\tilde{A}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n) \leq m(\tilde{A})$. Ce qui termine la première étape.

Étape 2. On pose $\alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ et on montre, dans cette étape, qu'il existe $C \in T$ tel que $m(C) = \alpha$.

Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T telle que $m(A_n) \to \alpha$ quand $n \to +\infty$. Grâce à l'étape 1, on peut supposer (quitte à remplacer A_n par $\tilde{A_n}$ construit comme dans l'étape 1) que A_n vérifie (2.9), c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B \in T,\ B \subset A_n \Rightarrow m(B) \geq 0. \tag{2.10}$$

On pose $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On commence par montrer que $m(C) \geq m(A_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire C comme une union "disjointe" :

$$C = A_m \cup (\bigcup_{n\neq m} C_{n,m}),$$

avec $C_{n,m} \in T$ et $C_{n,m} \subset A_n$ pour tout $m \neq n$. En effet, il suffit pour cela de construire par récurrence (sur n) la suite des $C_{n,m}$ en prenant pour $C_{n,m}$ l'intersection de C avec A_n à laquelle on retranche A_m et les $C_{n,m}$ précédemment construits.
Par σ-additivité de m, on a

$$m(C) = m(A_m) + \sum_{n\neq m} m(C_{n,m})$$

puis, comme $C_{n,m} \subset A_n$, on a, par (2.10), $m(C_{n,m}) \geq 0$. On en déduit $m(C) \geq m(A_m)$.

En faisant tendre m vers ∞, on a alors $m(C) \geq \alpha$ et donc, finalement $m(C) = \alpha$.

Étape 3. Construction de m^+ et m^-.

Pour construire m^+ et m^-, on utilise un élément C de T tel que $m(\mathrm{C}) = \alpha = \sup\{m(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathrm{T}\}$ (l'existence de C a été montré à l'étape 2). Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose :

$$m^+(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}),\ m^-(\mathrm{A}) = -m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c).$$

On a $m^+(\emptyset) = m^-(\emptyset) = 0$ (car $m(\emptyset) = 0$) et les applications m^+ et m^- sont des applications σ−additives de T dans $\mathbb{R}$ (car m est σ−additive). Pour montrer que m^+ et m^- sont des mesures finies, il suffit de montrer qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce que l'on montre maintenant.

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a, par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha = m(\mathrm{C}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + m(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{C}) \le m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + \alpha.$$

On en déduit $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \ge 0$, ce qui prouve bien que $m^+(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+$. On a aussi, encore une fois par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha \ge m(\mathrm{C}) + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) = \alpha + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c).$$

On en déduit $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) \le 0$ et donc $m^-(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+$.

Les applications m^+ et m^- sont des mesures finies (noter que $m^+(\mathrm{E}) = m(\mathrm{E} \cap \mathrm{C}) < \infty$ et $m^-(\mathrm{E}) = m(\mathrm{E} \cap \mathrm{C}^c) < \infty$). Elles sont étrangères car

$$m^+(\mathrm{C}^c) = m(\mathrm{C}^c \cap \mathrm{C}) = m(\emptyset) = 0 \text{ et } m^-(\mathrm{C}) = -m(\mathrm{C} \cap \mathrm{C}^c) = 0.$$

Enfin, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a, par σ-additivité de m :

$$m(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) = m^+(\mathrm{A}) - m^-(\mathrm{A}).$$

Ceci termine la démonstration de l'existence de m^+ et m^-.

Pour montrer l'unicité de cette décomposition de m, on suppose que μ et ν sont deux mesures finies étrangères telles que $m = \mu - \nu$. Comme elle sont étrangères, il existe $\mathrm{D} \in \mathrm{T}$ tel que $\mu(\mathrm{D}^c) = \nu(\mathrm{D}) = 0$. On montre alors que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a nécessairement :

$$\mu(\mathrm{A}) = \sup\{m(\mathrm{B});\ \mathrm{B} \in \mathrm{T},\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A}\}. \tag{2.11}$$

En effet, si $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, on a $m(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{B}) - \nu(\mathrm{B}) \le \mu(\mathrm{B}) \le \mu(\mathrm{A})$ (par positivité de ν et monotonie de μ). Puis, en prenant $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{D}$, on a

$$m(\mathrm{B}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) - \nu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}^c) = \mu(\mathrm{A}).$$

Ceci prouve bien que (2.11) est vraie (et prouve que le sup est atteint pour $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{D}$). L'égalité (2.11) donne donc de manière unique μ en fonction de m. L'unicité de ν découle alors du fait que $\nu = \mu - m$. ■

Remarque 2.34 Une conséquence de la proposition 2.33 est que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n)$ apparaissant dans (2.8) est absolument convergente car (pour toute famille $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$, si $n \ne m$) on a

$$\sum_{p=0}^{n} |m(\mathrm{A}_p)| \le \sum_{p=0}^{n} m^+(\mathrm{A}_p) + \sum_{p=0}^{n} m^-(\mathrm{A}_p) \le m^+(\mathrm{E}) + m^-(\mathrm{E}) < \infty.$$

En fait, la définition 2.32 donne directement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n)$ apparaissant dans (2.8) est commutativement convergente (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans

$\mathbb{R}$, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Elle est donc absolument convergente (voir l'exercice 2.34). Nous verrons plus loin que cette équivalence entre les séries absolument convergentes et les séries commutativement convergentes est fausse pour des séries à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie.

2.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Il serait bien agréable, pour la suite du cours, de montrer l'existence d'une application λ, définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, telle que l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle, et qui vérifie les propriétés (4.1) et (4.2). Malheureusement, on peut montrer qu'une telle application n'existe pas (voir les exercices 2.29 et 2.28). Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (l'exercice 2.29 donne alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.35 (Carathéodory) *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ telle que $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Pour la partie "existence" de ce théorème, nous donnons dans cette section une démonstration due à Carathéodory. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^*(A)$ par :

$$\lambda^*(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}}\in E_A} \sum_{i=1}^{n} \ell(A_i),$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, et $\ell(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i. On peut montrer (voir l'exercice 2.28) que l'application λ^* ainsi définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure).

On montre toutefois dans cette section que la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue. L'existence de la mesure de Lebesgue peut aussi être démontrée en utilisant un théorème plus général (de F. Riesz) que nous verrons dans un chapitre ultérieur (théorème 5.6 page 271).

Après la définition de λ^* et la démonstration de propriétés de λ^*, on donne la démonstration de la partie existence du théorème de Carathéodory (voir page 61). La partie unicité du théorème de Carathéodory (voir page 65) peut être démontrée en utilisant la régularité des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Théorème 2.43, très utile dans la suite du cours) et d'un lemme classique sur les ouverts de $\mathbb{R}$ (lemme 2.44). Cette partie "unicité" peut aussi être démontrée, plus directement, en utilisant la proposition 2.31.

Définition 2.36 (Définition de λ^*) *Soit* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *On pose*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n); (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A\},$$

avec $E_A = \{(I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n =]a_n, b_n[,\ -\infty < a_n \leq b_n < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$ *et* $\ell(I) = b - a$ *si* $I =]a, b[,\ -\infty < a \leq b < +\infty$.

Proposition 2.37 (Propriétés de λ^*) *L'application* $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(définie dans la définition 2.36) vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$,

2. (Monotonie) $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, *pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *tel que* $A \subset B$,

3. (σ−sous additivité) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *alors*

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n),$$

4. $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $-\infty < a < b < +\infty$.

DÉMONSTRATION – On remarque tout d'abord que $\lambda^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (car $\lambda^*(A)$ est la borne inférieure d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Propriété 1. Pour montrer que $\lambda^*(\emptyset) = 0$, il suffit de remarquer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\emptyset$ avec $I_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $0 \leq \lambda^*(\emptyset) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = 0$.

Propriété 2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \subset B$. On a $E_B \subset E_A$ et donc $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Propriété 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sinon, l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in E_{A_n}$ telle que

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que :

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}).$$

Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{\varphi(n)})$, où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie, voir le lemme 2.15 page 45). Avec le lemme 2.38 ci-dessous, on en déduit :

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m})) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\lambda^*(\mathrm{A}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\mathrm{A}_n).$$

Propriété 4. Pour montrer la quatrième propriété, on commence par montrer que

$$\lambda^*([a,b]) = b-a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}, a<b. \tag{2.12}$$

Soit donc $a,\ b\in\mathbb{R}$, $a<b$.
Comme $[a,b]\subset]a-\varepsilon,b+\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon>0$, on a $\lambda^*([a,b])\leq b-a+2\varepsilon$. On en déduit $\lambda^*([a,b])\leq b-a$.
Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in \mathrm{E}_{[a,b]}$. Par compacité de $[a,b]$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $[a,b]\subset\bigcup_{p=0}^n \mathrm{I}_p$. On peut alors construire (par récurrence) i_0, i_1, $\ldots$, $i_q\in\{0,\ldots,n\}$ tels que $a_{i_0}<a$, $a_{i_{p+1}}<b_{i_p}$ pour tout $p\in\{0,\ldots,q-1\}$, $b<b_{i_q}$. On en déduit que

$$b-a<\sum_{p=0}^{q} b_{i_p}-a_{i_p}\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(\mathrm{I}_n) \text{ et donc } b-a\leq\lambda^*([a,b]).$$

Ceci donne bien (2.12).
En remarquant que $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\subset]a,b[\subset[a,b]$ pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, et $0<\varepsilon<(b-a)/2$, la monotonie de λ^* donne (avec (2.12)) que $\lambda^*(]a,b[)=b-a$ pour tout $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. La monotonie de λ^* donne alors aussi que

$$\lambda^*([a,b[)=\lambda^*(]a,b])=\lambda^*(]a,b[)=b-a \text{ pour tout } a,b\in\mathbb{R}, a<b$$

, et enfin que

$$l^*(]-\infty,a])=\lambda^*(]-\infty,a[)=\lambda^*(]a,+\infty])=\lambda^*([a,+\infty])=+\infty \text{ pour tout } a\in\mathbb{R}.$$

. ■

Lemme 2.38 (Double série à termes positifs) *Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\subset\mathbb{R}_+$. Alors on a :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}).$$

DÉMONSTRATION – On pose

$$\mathrm{A}=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} \text{ et } \mathrm{B}=\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}),$$

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On rappelle que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}=\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{\varphi(p)}$.
Pour tout $i,\ j\in\mathbb{N}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\{0,\ldots,i\}\times\{0,\ldots j\}\subset\{\varphi(0),\ldots,\varphi(n)\}$. Comme $a_{n,m}\geq 0$ pour tout (n,m), on en déduit que

$$\mathrm{A}\geq\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}\geq\sum_{n=0}^{i}(\sum_{m=0}^{j} a_{n,m})$$

et donc, en faisant tendre j puis i vers $+\infty$, que $A \geq B$. Un raisonnement similaire donne que $B \geq A$ et donc $A = B$. ■

On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que λ^* est une mesure.

Définition 2.39 (Tribu de Lebesgue) *On pose* $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ *pour tout* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$*. On rappelle que* λ^* *est définie dans la définition 2.36 (et que* $E^c = \mathbb{R} \setminus E$*). Cet ensemble de parties de* $\mathbb{R}$ *noté* $\mathcal{L}$ *s'appelle tribu de Lebesgue (on montre dans la proposition 2.42 que* $\mathcal{L}$ *est bien une tribu).*

Remarque 2.40 On peut avoir une première idée de l'intérêt de la définition 2.39 en remarquant qu'elle donne immédiatement l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$. En effet, soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ tels que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et soit $A \subset \mathbb{R}$. On suppose que $E_1 \in \mathcal{L}$ et on utilise la définition de $\mathcal{L}$ avec $A \cap (E_1 \cup E_2)$, on obtient (car $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) :

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) \\ &= \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2).\end{aligned}$$

Par récurrence sur n, on a donc aussi

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^*(A \cap E_i),$$

dès que $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$, $A, E_n \subset \mathbb{R}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

En particulier, en prenant $A = \mathbb{R}$, on obtient l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\lambda^*(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^*(E_i),$$

si $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 2.41 Pour tout E, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a, par $\sigma-$sous additivité de λ^*,

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.39), il suffit donc de montrer que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.42 (Propriétés de $\mathcal{L}$) *$\mathcal{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et $\lambda^*_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. $\mathcal{L}$ et λ^* sont définies dans les définitions 2.36 et 2.39.*

DÉMONSTRATION – Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par "passage au complémentaire". On sait aussi que $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de λ^* à $\mathcal{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Étape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union finie et que, si $n \geq 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{L}$ est telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors on a :

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i), \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$ en prenant $A = \mathbb{R}$, cette propriété d'additivité a déjà été signalée dans la remarque 2.40.)

Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ et de montrer la propriété (2.13) pour $n = 2$. Soit donc $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$, il suffit de montrer (voir la remarque 2.41) que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Par σ−sous additivité de λ^* on a

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \ &\leq \lambda^*(A \cap E_1) \\ &+ \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).\end{aligned}$$

Comme $E_2 \in \mathcal{L}$, on a

$$\lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Puis, comme $E_1 \in \mathcal{L}$, on a

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c).$$

On en déduit

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^*(A).$$

Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$.

Pour montrer (2.13) avec $n = 2$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) \\ &= \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) \\ &= \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2).\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathcal{L}$.) Ceci termine l'étape 1.

Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie.

Étape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de λ^* à $\mathcal{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition 2.42).

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On veut montrer que $E \in \mathcal{L}$. On commence par remarquer que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (2.13). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)) + \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c) \tag{2.14}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c). \tag{2.15}$$

En utilisant le fait que $E^c \subset (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c$ et la monotonie de λ^*, on a

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c) \geq \lambda^*(A \cap E^c).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (2.15) et en utilisant la $\sigma-$sous additivité de λ^*, on en déduit alors que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Ceci prouve que $E \in \mathcal{L}$ (voir remarque 2.41) et donc que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que λ^* est une mesure sur $\mathcal{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Par monotonie de λ^* on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(\bigcup_{p=0}^{n} E_p) \leq \lambda^*(E) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et donc, en utilisant l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (2.13) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^{n} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E)$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E).$$

D'autre part, $\lambda^*(E) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p)$, par $\sigma-$sous additivité de λ^*. On a donc

$$\lambda^*(E) = \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p).$$

Ceci prouve que $\lambda^*_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. ■

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "EXISTENCE" DU THÉORÈME *2.35* Pour montrer la partie "existence" du théorème 2.35, il suffit, grâce aux propositions 2.37 et 2.42, de montrer que $\mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.39) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de montrer que $]a,+\infty[\in \mathcal{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $E =]a,+\infty[$ et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

On peut supposer que $\lambda^*(A) < +\infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^*(A)$, il existe $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A$ telle que $\lambda^*(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \varepsilon$. Comme $A \cap E \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E))$ et $A \cap E^c \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E^c))$, la σ−sous additivité de λ^* donne

$$\lambda^*(A \cap E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E) \quad \text{et} \quad \lambda^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E^c).$$

Comme $I_n \cap E$ et $I_n \cap E^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition 2.37 donne $\lambda^*(I_n \cap E) = \ell(I_n \cap E)$ et $\lambda^*(I_n \cap E^c) = \ell(I_n \cap E^c)$. On en déduit

$$\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

(car $\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c) = \ell(I_n)$) et donc $\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $E \in \mathcal{L}$. ■

On va maintenant démontrer un théorème important dont on peut déduire, en particulier, la partie "unicité" du théorème 2.35.

Théorème 2.43 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts) *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que m est finie sur les compacts, c'est-à-dire que $m(K) < +\infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ (noter qu'un compact est nécessairement dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tel que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. En particulier, on a donc, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(A) = \inf\{m(O),\ O$ ouvert contenant $A\}$ et $m(A) = \sup\{m(K),\ K$ compact inclus dans $A\}$.*

DÉMONSTRATION – On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $A =]a,b[$.

Pour tout $n \geq n_0$ avec n_0 tel que $(2/n_0) < b - a$ on a :

$$[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset A \subset]a,b[.$$

Pour $n \geq n_0$, on pose $B_n =]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[)$. La suite $(B_n)_{n\geq n_0}$ est une suite décroissante et $\bigcap_{n\geq n_0} B_n = \emptyset$. Comme m est finie sur les compacts, on a $m(B_n) \leq m([a,b]) < +\infty$. En utilisant la continuité décroissante de m (proposition 2.27), on a donc :

$$m(]a,b[\setminus[a+(\frac{1}{n}), b-\frac{1}{n}]) = m(]a,a+\frac{1}{n})[\cup]b-\frac{1}{n},b[) = m(B_n) \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ en prenant n assez grand on a $m(\mathrm{B}_n) \leq \varepsilon$. En prenant $\mathrm{O} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{F} = [a + (1/n), b - (1/n)]$, on a bien O ouvert, F fermé, $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $]a, b[\in \mathrm{T}$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in \mathrm{T}$ (il suffit de prendre $\mathrm{F} = \mathrm{O} = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, on a $\mathrm{O}^c \subset \mathrm{A}^c \subset \mathrm{F}^c$ et $\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{O}^c = \mathrm{O} \setminus \mathrm{F}$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ et $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. On veut montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(\mathrm{A}) < +\infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(\mathrm{A}) = +\infty$.

Premier cas. On suppose que $m(\mathrm{A}) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé tel que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{A}_n \subset \mathrm{O}_n$ et $m(\mathrm{O}_n \setminus \mathrm{F}_n) \leq (\varepsilon/2^n)$. On pose

$$\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{O}_n \text{ et } \tilde{\mathrm{F}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n.$$

On a $\tilde{\mathrm{F}} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, $m(\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) \leq 2\varepsilon$, car $(\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{O}_n \setminus \mathrm{F}_n)$, et O ouvert mais $\tilde{\mathrm{F}}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(\mathrm{A}) < +\infty$, on a aussi $m(\tilde{\mathrm{F}}) < +\infty$. Par continuité croissante de m (appliquée à la suite $(\bigcup_{p=0}^n \mathrm{F}_p)_{n\in\mathbb{N}}$), on a $m(\bigcup_{p=0}^n \mathrm{F}_p) \to m(\tilde{\mathrm{F}})$, quand $n \to +\infty$, d'où (puisque $m(\tilde{\mathrm{F}}) < +\infty$) $m(\tilde{\mathrm{F}}) - m(\bigcup_{p=0}^n \mathrm{F}_p) \to 0$. On prend alors $\mathrm{F} = \bigcup_{p=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_p$ avec N assez grand pour que $m(\tilde{\mathrm{F}} \setminus \mathrm{F}) = m(\tilde{\mathrm{F}}) - m(\mathrm{F}) \leq \varepsilon$. On a bien $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$, O ouvert, F fermé et, comme $(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) = (\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) \cup (\tilde{\mathrm{F}} \setminus \mathrm{F})$, on a $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) = m(\mathrm{O} \setminus \tilde{\mathrm{F}}) + m(\tilde{\mathrm{F}} \setminus \mathrm{F}) \leq 3\varepsilon$, ce qui prouve que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(\mathrm{A}) = +\infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{\mathrm{F}}) = +\infty$). On raisonne en trois étapes :

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On remarque d'abord que $\mathrm{A}_n \cap [p, p+1[\in \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé tel que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A}_n \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc :
$$\mathrm{F}_k = \mathrm{F} \cap [p, p+1-\frac{1}{k}] \subset \mathrm{A}_n \cap [p, p+1[\subset \mathrm{O}_k = \mathrm{O} \cap]p - \frac{1}{k}, p+1[.$$
On a F_k fermé, O_k ouvert et $(\mathrm{O}_k \setminus \mathrm{F}_k) \subset (\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \cup]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[$. On en déduit :
$$m(\mathrm{O}_k \setminus \mathrm{F}_k) \leq \varepsilon + m(]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[).$$
Or la continuité décroissante de m donne que $m((]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[) \to 0$ quand $k \to +\infty$ (on utilise ici le fait que $m([p-1, p+1]) < +\infty$ car m est finie sur les compacts). Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m(\mathrm{O}_k \setminus \mathrm{F}_k) \leq 2\varepsilon$, ce qui donne bien que $\mathrm{A}_n \cap [p, p+1[\in \mathrm{T}$.
2. Comme $m(\mathrm{A} \cap [p, p+1[) < +\infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $\mathrm{A} \cap [p, p+1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \cap [p, p+1[)$. Il donne que $\mathrm{A} \cap [p, p+1[\in \mathrm{T}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
3. On montre enfin que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_p et un fermé G_p tel que $\mathrm{G}_p \subset \mathrm{A} \cap [p, p+1[\subset \mathrm{O}_p$ et $m(\mathrm{O}_p \setminus \mathrm{G}_p) \leq \varepsilon/(2^{|p|})$. On prend

$O = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} O_p$ et $F = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} G_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \leq 3\varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tel que $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to +\infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]p-1, p+1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in]p-1, p+1[$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $x_n \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} G_q$ et que $G_q \subset [q, q+1[$ pour tout q, on a donc $x_n \in G_p \cup G_{p-1}$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $G_p \cup G_{p-1}$ est fermé, on en déduit que $x \in G_p \cup G_{p-1} \subset F$ et donc que F est fermé.

Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que $m(A) = \inf\{m(O)$, O ouvert contenant A$\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque d'abord que la monotonie d'une mesure donne

$$m(A) \leq \inf\{m(O), \text{O ouvert contenant A}\}.$$

Puis, l'inégalité inverse est immédiate si $m(A) = +\infty$. Enfin, si $m(A) < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \leq \varepsilon$. On a donc $O \setminus A \subset O \setminus F$ et donc (par monotonie de m)

$$m(O \setminus A) \leq \varepsilon \text{ et } m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \leq m(A) + \varepsilon.$$

On a donc trouvé un ouvert O contenant A tel que $m(O) - \varepsilon \leq m(A)$. On en déduit que $\inf\{m(O)$, O ouvert contenant A$\} \leq m(A)$ et finalement que $m(A) = \inf\{m(O)$, O ouvert contenant A$\}$.

De manière semblable, on montre aussi que $m(A) = \sup\{m(K), \text{K compact, } K \subset A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ici aussi, on commence par remarquer que la monotonie d'une mesure donne

$$m(A) \geq \sup\{m(K), \text{K compact}, K \subset A\}.$$

On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F fermé tel que $F \subset A$ et $m(A \setminus F) \leq \varepsilon$. Si $m(A) = +\infty$, on en déduit que $m(F) = +\infty$ et donc que $m(K_n) \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$ (par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n, n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\sup\{m(K), \text{K compact inclus dans A}\} = +\infty = m(A).$$

Si $m(A) < +\infty$, on a $m(A) \geq m(F) \geq m(A) - \varepsilon$ et donc, pour n assez grand (toujours par continuité croissante de m),

$$m(K_n) \geq m(F) - \varepsilon \geq m(A) - 2\varepsilon \text{ avec } K_n = F \cap [-n, n].$$

Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que ε est arbitraire, on en déduit que $\sup\{m(K)$, K compact inclus dans A$\} \geq m(A)$ et donc, finalement,

$$m(A) = \sup\{m(K), \text{K compact}, K \subset A\}.$$

■

Pour démontrer la partie “unicité” du théorème 2.35 avec le théorème 2.43 on a aussi besoin du petit lemme suivant (différent du lemme 2.11 car dans le lemme 2.44 on demande que les intervalles ouverts soient disjoints et on ne demande plus qu'ils soient bornés).

Lemme 2.44 (Ouverts de $\mathbb{R}$) *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *alors* O *est une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux, c'est-à-dire qu'il existe* $(\mathrm{I}_n)_{n\in \mathrm{J}}$ *tel que* $\mathrm{J} \subset \mathbb{N}$, I_n *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *pour tout* n, $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{I}_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *et* $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in \mathrm{J}} \mathrm{I}_n$.

DÉMONSTRATION – Pour $x \in \mathrm{O}$ on pose

$$\mathrm{O}_x = \{y \in \mathrm{O}; \mathrm{I}(x,y) \subset \mathrm{O}\},\ \text{avec}\ \mathrm{I}(x,y) = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\}$$

(on a donc $\mathrm{I}(x,y) = [x,y]$ ou $[y,x]$). On remarque que $\mathrm{O} = \bigcup_{x\in \mathrm{O}} \mathrm{O}_x$ et que O_x est, pour tout $x \in \mathrm{O}$, un intervalle ouvert (c'est l'intervalle $]\inf \mathrm{O}_x, \sup \mathrm{O}_x[$, avec $\inf \mathrm{O}_x$, $\sup \mathrm{O}_x \in \overline{\mathbb{R}}$). Il est aussi facile de voir que, pour tous x, $y \in \mathrm{O}$, $\mathrm{O}_x \cap \mathrm{O}_y \neq \emptyset$ implique que $\mathrm{O}_x = \mathrm{O}_y$. On peut trouver $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ tel que $\mathrm{O} = \bigcup_{x\in \mathrm{A}} \mathrm{O}_x$ et $\mathrm{O}_x \cap \mathrm{O}_y = \emptyset$ si x, $y \in \mathrm{A}$, $x \neq y$. Comme $\mathrm{O}_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, on peut donc construire une application de A dans $\mathbb{Q}$ en choisissant pour chaque $x \in \mathrm{A}$ un rationnel de O_x (ce qui est possible car tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel). Cette application est injective car

$$\mathrm{O}_x \cap \mathrm{O}_y = \emptyset \text{ si } x, y \in \mathrm{A}, x \neq y.$$

L'ensemble A est donc au plus dénombrable, ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Remarque 2.45 Dans la démonstration du lemme 2.44, O_x est la composante connexe de x. Le lemme 2.44 consiste donc à remarquer qu'un ouvert est réunion de ses composantes connexes, que celles ci sont disjointes deux à deux et sont des ouverts connexes et donc des intervalles ouverts (car un connexe dans $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle).

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "UNICITÉ" DU THÉORÈME *2.35*

On a construit une mesure, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda(]a,b[) = b-a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supposons que m soit aussi une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b-a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On veut montrer que $\lambda = m$ (sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Nous le montrons ici avec deux méthodes différentes, utilisant le théorème 2.43 ou la proposition 2.31.

Première méthode, avec le théorème 2.43 sur la régularité d'une mesure finie sur les compacts. En utilisant le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44) et les propriétés de σ-additivité de λ et de m, on montre que $\lambda(\mathrm{O}) = m(\mathrm{O})$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m et pour λ, car m et λ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts), on obtient $\lambda(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *i.e.* $m = \lambda$.

Deuxième méthode, avec la proposition 2.31. On utilise la proposition 2.31 avec (E, T) = ($\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$. On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. On prend maintenant $\mathrm{F}_n =]n, n+1]$ pour n

$\in \mathbb{Z}$. La famille $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, on a, par continuité décroissante de m,

$$\begin{aligned} m(]a,b]) &= \lim_{p\to+\infty} m(]a, b+\frac{1}{p}[) \\ &= \lim_{p\to+\infty} (b - a + \frac{1}{p}) \\ &= b - a \\ &= \lambda(]a,b]). \end{aligned}$$

On a donc $m = \lambda$ sur $\mathcal{C}$ (et $m(F_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$). On peut donc appliquer la proposition 2.31. Elle donne $\lambda = m$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.46 Nous avons vu que la mesure de Lebesgue, notée λ, est régulière. Ceci ne donne pas, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'égalité de la mesure de A avec la mesure de son intérieur ou de son adhérence. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre, par exemple, $A = \mathbb{Q}$. On a alors $\lambda(A) = 0$ (voir la remarque 2.49) et $\lambda(\overline{A}) = +\infty$.

Remarque 2.47 Nous avons donc, dans cette section, construit une application, notée λ^*, de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette application n'est pas une mesure mais nous avons montré que la restriction de λ^* à la tribu de Lebesgue, notée $\mathcal{L}$, est une mesure. Puis, nous avons démontré que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ et obtenu ainsi, en prenant la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la mesure que nous cherchions. On peut se demander toutefois quelle est la différence entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Du point de vue des cardinaux, cette différence est considérable car $\mathtt{card}(\mathcal{L}) = \mathtt{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ alors que $\mathtt{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathtt{card}(\mathbb{R})$ mais du point de vue de l'intégration, la différence est dérisoire, comme nous pourrons le voir avec l'exercice 4.19 (plus complet que l'exercice 2.33) car l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda^*_{|\mathcal{L}})$ est simplement le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})})$.

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.48 (Invariance par translation "généralisée") *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Pour* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *on note* $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta, x \in A\}$. *On a alors :*

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *implique* $\alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

2. $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\alpha = 1$, *cette propriété s'appelle* "invariance par translation de λ".

DÉMONSTRATION – Pour la première partie de la proposition, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On montre facilement que T est une tribu contenant les intervalles ouverts, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour la deuxième partie, on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_1(A) = \lambda(\alpha A + \beta)$ et $m_2(A) = |\alpha|\lambda(A)$. Il est facile de voir que m_1 et m_2 sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les bornés, et qu'elles sont égales sur l'ensemble des intervalles ouverts. On raisonne alors comme dans la démonstration de la partie “unicité” du théorème 2.35, en utilisant le théorème 2.43 ou la proposition 2.31. Par exemple, en utilisant le lemme 2.44 et les propriétés de σ-additivité de m_1 et de m_2, on montre que $m_1(O) = m_2(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m_1 et pour m_2), on obtient $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.49 La mesure de Lebesgue est diffuse (c'est-à-dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$. Ainsi,

$$\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit “ensemble de Cantor”, K, qui est une partie compacte non dénombrable de [0,1], vérifiant $\lambda(K) = 0$, voir exercice 2.32).

Définition 2.50 (Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(ou, plus généralement,* $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $T = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); B \subset I\}$ *(on peut montrer que* $T = \mathcal{B}(I)$*, où* I *est muni de la topologie induite par celle de* $\mathbb{R}$*, voir l'exercice 2.3 page 75). Il est facile de voir que* T *est une tribu sur* I *et que la restriction de* λ *(définie dans le théorème 2.35) à* T *est une mesure sur* T*, donc sur les boréliens de* I *(voir l'exercice 2.17 page 90). On note toujours par* λ *cette mesure.*

2.6 Indépendance et probabilité conditionnelle

2.6.1 Probabilité conditionnelle

Commençons par expliquer la notion de probabilité conditionnelle sur l'exemple du lancer de dé. On se place dans le modèle équiprobable : soient $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $T = \mathcal{P}(E)$ et p la probabilité définie par $p(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in E$. La probabilité de l'événement A “obtenir 6” est $\frac{1}{6}$. Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la chance d'obtenir un 6, alors que l'on sait déjà que le résultat est pair (événement $B = \{2,4,6\}$). Intuitivement, on a envie de dire que la “chance” d'obtenir un 6 est alors $\frac{1}{\mathrm{card} B} = \frac{1}{3}$.

Définition 2.51 (Probabilité conditionnelle) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $A, B \in T$.

Si $p(B) \neq 0$ *la probabilité conditionnelle de* A *par rapport à* B *(on dit aussi probabilité de* A *par rapport à* B*), notée* $p(A|B)$*, est définie par* $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Si $p(\mathrm{B}) = 0$ *la probabilité conditionnelle de* A *par rapport à* B*, notée* $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$*, n'est pas définie. C'est un nombre arbitraire entre* 0 *et* 1.

De cette définition on déduit la formule de Bayes : soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$, alors :

$$p(\mathrm{B})p(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \tag{2.16}$$

Remarque 2.52 Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $p(\mathrm{A}) \neq 0$. Alors l'application $p_{\mathrm{A}} : \mathrm{T} \to [0, 1]$ définie par :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}, \forall \mathrm{B} \in \mathrm{T}$$

est une probabilité sur T. On dit que "la masse de p_{A} est concentrée en A" : on a en effet : $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$, pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$. On a aussi $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1$.

Remarque 2.53 *Voici un corollaire immédiat de la relation 2.16. Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *est un espace probabilisé et* $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *une partition de* E *telle que* $p(\mathrm{C}_n) \neq 0$*. On a alors, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$,

$$p(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(\mathrm{C}_n)p(\mathrm{A}|\mathrm{C}_n).$$

2.6.2 Evénements indépendants, tribus indépendantes

Définition 2.54 (Indépendance de deux événements) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé. On dit que deux événements* A *et* B *sont indépendants si* $p(\mathrm{A})p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Remarque 2.55 Lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, il y a des événements qui semblent *a priori* indépendants, c'est-à-dire que la réalisation de l'un semble n'avoir aucune influence sur la réalisation de l'autre. On choisira alors, pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte cette indépendance. Attention toutefois, pour une probabilité p donnée, deux événements peuvent être indépendants alors qu'ils ne paraissent pas intuitivement indépendants, voir à ce sujet l'exercice 9.15 page 589 sur les variables aléatoires indépendantes.

Exemple 2.56 Prenons comme exemple le lancer simultané de deux dés : *a priori*, il parait raisonnable de supposer que les résultats obtenus pour chacun des deux dés n'influent pas l'un sur l'autre, et on va donc chercher une probabilité qui respecte cette indépendance. L'univers des possibles est ici

$$\mathrm{E} = \{(i, j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}.$$

Les résultats de chaque lancer simultané des deux dés étant équiprobables, on a donc envie de définir, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $p(A) = \frac{\text{card}A}{36}$. Voyons maintenant si deux événements *a priori* indépendants sont indépendants pour cette probabilité. Considérons par exemple l'événement A : "obtenir un double 6" ; on peut écrire : $A = B \cap C$, où B est l'événement "obtenir un 6 sur le premier dé" et C l'événement "obtenir un 6 sur le deuxième dé". On doit donc vérifier que : $p(A) = p(B)p(C)$. Or $B = \{(6, j), 1 \le j \le 6\}$ et $C = \{(i, 6), 1 \le i \le 6\}$. On a donc $p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$, et on a bien $p(A) = p(B)p(C)(= \frac{1}{36})$.

On généralise la notion d'indépendance de deux événements en introduisant la notion d'indépendance de tribus.

Définition 2.57 (Indépendance des tribus) *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de tribus incluses dans* T.

1. *Soit* $N > 1$. *On dit que les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes (on dit aussi que la suite* $T_1, \ldots, T_N$ *est indépendante) si pour toute famille* $(A_1, \ldots, A_N)$ *d'événements tels que* $A_k \in T_k$ *pour* $k = 1, \ldots, N$ *on a :* $p(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = p(A_1)p(A_2) \ldots p(A_N)$.
2. *On dit que la suite* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est indépendante (ou que les tribus* $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ *sont indépendantes) si pour tout* $N \ge 1$, *les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes.*

On peut facilement remarquer que si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé (E, T, p), ils sont indépendants (au sens de la définition 2.54) si et seulement si les tribus $T_A = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ et $T_B = \{\emptyset, E, B, B^c\}$ sont indépendantes (voir l'exercice 3.19). Par contre, si A, B et C sont trois événements d'un espace probabilisé (E, T, p), le fait que $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$ n'implique pas que les tribus T_A, T_B et T_C sont indépendantes (il suffit, par exemple, de considérer le cas où $C = \emptyset$ et $A = B$ avec $p(A) \in]0, 1[$). La bonne notion d'indépendance est la notion d'indépendance de tribus et c'est par elle qu'on définit l'indépendance de plusieurs événements (définition 2.58).

Définition 2.58 (Evénements indépendants) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *des événements, on dit que les* N *événements* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *sont indépendants si les* N *tribus engendrées par les événements* A_k, $k = 1 \ldots, N$ *(c'est-à-dire les* N *tribus définies par* $T_k = \{A_k, A_k^c, E, \emptyset\}$ *pour* $k = 1 \ldots, N$*) sont indépendantes.*

Sous les hypothèses de la définition précédente, on peut remarquer que les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendants, c'est-à-dire que les tribus engendrées par $A_1, \ldots, A_N$

sont indépendantes) si et seulement si

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1,\ldots,N\},$$

voir l'exercice 3.19. Nous terminons ce paragraphe par une proposition sur les tribus indépendantes :

Proposition 2.59 *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,\ldots N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *La tribu* T_0 *est alors indépendante de la tribu engendrée par les tribus* $T_1,\ldots,T_N$.
2. *(Généralisation) Soit* $N > 1$, $q > 1$, $n_0,\ldots,n_q$ *tel que* $n_0 = 0$, $n_i \le n_{i+1}$ *(pour* $i = 0,\ldots,q-1$*),* $n_q = N$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,\ldots N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *Pour* $i = 1,\ldots,q$, *on note* τ_i *la tribu engendrée par les tribus* T_n *pour* $n = n_{i-1},\ldots,n_i$. *Alors, les tribus* $\tau_1,\ldots,\tau_q$ *sont indépendantes.*

DÉMONSTRATION – On montre tout d'abord le premier item de la proposition. On note S la tribu engendrée par les tribus $T_1,\ldots,T_N$. Comme S est la plus petite tribu contenant les tribus T_k ($k = 1,\ldots,N$), elle est incluse dans T. On veut montrer que T_0 et S sont indépendantes, c'est-à-dire que $p(A\cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $A \in T_0$ et tout $B \in S$. Pour le montrer, on va utiliser la proposition 2.31 (donnant l'unicité d'une mesure). Soit $A \in T_0$, on définit les mesures m et μ sur T en posant :

$$m(B) = p(A\cap B),\ \mu(B) = p(A)p(B), \text{ pour } B \in T,$$

et on pose :

$$\mathcal{C} = \{\bigcap_{k=1}^{N} A_k,\ A_k \in T_k \text{ pour } k = 1,\ldots,N\}.$$

Pour $B \in \mathcal{C}$, on a $B = \bigcap_{k=1}^{N} A_k$ avec $A_k \in T_k$ avec $k = 1, \ldots, N$. On a donc, en utilisant l'indépendance des tribus $T_0, T_1, \ldots, T_N$,

$$m(B) = p(A\cap B) = p(A)p(A_1)p(A_2)\ldots p(A_N) = p(A)p(B) = \mu(B).$$

On a donc $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection et que $E \in \mathcal{C}$, la proposition 2.31 nous donne $m = \mu$ sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme cette tribu contient toutes les tribus T_k ($k = 1, \ldots, N$), elle contient aussi S (en fait, elle est égale à S). On a donc bien montré que $p(A\cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $B \in S$ et pour tout $A \in T_0$.

Pour montrer le deuxième item (qui est une généralisation du premier), il suffit de faire une récurrence finie de q étapes et d'utiliser la technique précédente. Par exemple, pour $q = 2$ la technique précédente donne :

$$p((\bigcap_{k=0}^{n_1} A_k) \cap B_2) = p(\bigcap_{k=0}^{n_1} A_k)p(B_2),$$

pour $A_k \in T_k$, $k = 0,\ldots,n_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Puis en reprenant la technique précédente, on montre $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)p(B_2)$ pour $B_1 \in \tau_1$ et $B_2 \in \tau_2$, ce qui donne bien l'indépendance de τ_1 et τ_2. ■

2.6.3 Probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$

Une probabilité est définie sur un espace probabilisable. Très souvent, on ne connaît du problème aléatoire que l'on cherche à modéliser ni l'ensemble E ("univers des possibles") ni la tribu T (ensemble des événements) ni la probabilité p. Par contre, on connaît une "image" de la probabilité p par une application (dite mesurable, voir chapitre suivant) X de E dans $\mathbb{R}$. On travaille alors avec l'espace beaucoup plus sympathique (car mieux défini...) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, ou p_X est une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que les probabilistes appellent "loi de probabilité" (elle dépend de p et de l'application X).

Nous donnons maintenant quelques notions propres aux lois de probabilités (ou probabilités définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$), ainsi que quelques exemples concrets utilisés dans la représentation de phénomènes aléatoires.

Théorème 2.60 (Fonction de répartition) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de la probabilité p la fonction* F*, définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$ *par :* $\mathrm{F}(t) = p(]-\infty, t])$.

La fonction F *est croissante et continue à droite. De plus, on a* $\lim_{t\to-\infty} \mathrm{F}(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t) = 1$.

DÉMONSTRATION – La croissance de F est une conséquence de la monotonie de p (proposition 2.27). En effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On a $]-\infty, a] \subset]-\infty, b]$ et donc, par monotonie de p, $\mathrm{F}(a) = p(]-\infty, a]) \le p(]-\infty, b]) = \mathrm{F}(b)$, ce qui montre bien la croissance de F.

Pour montrer que F est continue à droite, on utilise la continuité décroissante de p (proposition 2.27). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \downarrow a$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$). On remarque que

$$]-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, a_n],]-\infty, a_{n+1}] \subset]-\infty, a_n] \text{ et } p(]-\infty, a_n]) < +\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité décroissante de p donne alors

$$\mathrm{F}(a_n) = p(]-\infty, a_n]) \to p(]-\infty, a]) = \mathrm{F}(a) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci montre la continuité à droite de F.

Pour montrer que $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{F}(a) = 1$, on utilise la continuité croissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \uparrow +\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \ge a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \to +\infty$). On pose $\mathrm{A}_n =]-\infty, a_n]$. On a $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = \mathbb{R}$. Par continuité croissante de p (Proposition 2.27), on a donc

$$\mathrm{F}(a_n) = p(\mathrm{A}_n) \to p(\mathbb{R}) = 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci prouve que $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{F}(a) = 1$.

Pour montrer que $\lim_{a\to-\infty} \mathrm{F}(a) = 0$, on utilise la continuité décroissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \downarrow -\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \le a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n$

$= -\infty$). On pose $B_n =]-\infty, a_n]$. On a $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(B_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Par continuité décroissante de p (Proposition 2.27), on a donc

$$F(a_n) = p(B_n) \to p(\emptyset) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci prouve que $\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0$. ■

Le théorème 2.60 a une réciproque que nous énonçons dans le théorème 2.61.

Théorème 2.61 (Fonction de répartition et probabilité) *Soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante, continue à droite et telle que*

$$\lim_{t\to-\infty}, F(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} F(t) = 1.$$

Alors, il existe une unique probabilité p *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *telle que* F *soit la fonction de répartition de* p.

La démonstration du théorème 2.61 n'est pas faite ici car ce théorème est essentiellement contenu dans le théorème 2.62 que nous donnons maintenant.

Théorème 2.62 (Lebesgue-Stieltjes)

1. *Soit* m *une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, finie sur les compacts (on dit "localement finie"). Soit* $a \in \mathbb{R}$*, on définit la fonction* F *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = m(]a,t])$ *si* $t \geq a$ *et* $F(t) = -m(]t,a])$ *si* $t \leq a$*. Alors, la fonction* F *est continue à droite et croissante.*
2. *Réciproquement, soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante et continue à droite. Alors,il existe une unique mesure* m *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a \leq b$*, on ait* $m(]a,b]) = F(b) - F(a)$*. Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à* F.

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item est essentiellement la même que celle du théorème 2.60. Elle n'est pas détaillée ici.

Pour démontrer le deuxième item, on introduit l, application définie de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$) par : $l(]a,b]) = F(b) - F(a)$. La démonstration du fait qu'il existe un prolongement unique de cette application en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est très voisine à celle du théorème de Carathéodory (théorème 2.35). Elle n'est pas détaillée ici. ■

Donnons, pour clore ce chapitre, quelques exemples de lois de probabilités, c'est-à-dire de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$, et leurs fonctions de répartition associées.

Définition 2.63 (Loi de probabilité discrète) *Soit p une loi de probabilité. On dit que p est discrète si elle est purement atomique. L'ensemble de ses atomes $\mathcal{A}$ est nécessairement dénombrable (voir l'exercice 2.23). La probabilité p s'écrit alors*

$$p = \sum_{a \in \mathcal{A}} p(\{a\})\delta_a,$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac en a., définie par (2.2) *La fonction de répartition de la probabilité p est définie par :*

$$\mathrm{F}(t) = \sum_{a \in \mathcal{A}, a \leq t} p(\{a\}).$$

Exemple 2.64 (Exemples de lois discrètes) *Donnons quelques exemples de probabilités discrètes, p, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}$ l'ensemble (dénombrable) de leurs atomes.*

— *La loi uniforme discrète :* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_{\mathrm{N}}\}$, $p(\{a_i\}) = \dfrac{1}{\mathrm{N}}$

— *La loi binomiale :* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$, $\mathrm{P} \in]0,1[$, $p(\{k\}) = \mathrm{C}_{\mathrm{N}}^k \mathrm{P}^k (1-\mathrm{P})^{\mathrm{N}-k}$

— *La loi de Pascal :* $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P} \in]0,1[$, $p(\{k\}) = \mathrm{P}(1-\mathrm{P})^{k-1}$

— *La loi de Poisson à paramètre λ :* $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $p(\{k\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Définition 2.65 (Loi continue) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que p est continue si sa fonction de répartition est continue.*

Exemple 2.66 (Exemple de loi continue) La plupart des exemples de probabilités continues provient de ce qu'on appelle les mesures de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, pour lesquelles on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qu'on n'a pas encore introduite. On peut toutefois déjà citer l'exemple de la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: Soient $-\infty < a < b < +\infty$; pour $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\lambda(\mathrm{A} \cap [a,b])}{b-a}.$$

On vérifie facilement que p est une probabilité appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

2.7 Exercices

2.7.1 Tribus

Exercice 2.1 (Caractérisation d'une tribu) Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et telle que $\emptyset \in \mathrm{T}$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.

   Corrigé – *On a bien* $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ *car* $\mathrm{E} = \emptyset^c$ *et* T *stable par passage au complémentaire. Il reste à montrer que* T *est stable par intersection dénombrable. Soit* $(\mathrm{A}_n) \subset \mathrm{T}$, *on a* $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n^c \in \mathrm{T}$ *(car* T *est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ *(car* T *est stable par passage au complémentaire).*

2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

   Corrigé – *Si* E *est fini, l'ensemble des parties finies de* E *est une tribu, c'est la tribu* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

   Si E *est infini, l'ensemble des parties finies de* E *n'est pas une tribu. Il suffit par exemple de remarquer que* E *n'est pas une partie finie (et une tribu sur* E *contient toujours* E *comme élément).*

Exercice 2.2 (Tribu engendrée) Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

   Corrigé – *Soit* $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de tribus sur* I *(*I *est un ensemble quelconque). On pose* $\mathrm{T} = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E}\,;\ \mathrm{A} \in \mathrm{T}_i \text{ pour tout } i \in \mathrm{I}\}$ *(*T *est bien l'intersection des tribus* T_i, $i \in \mathrm{I}$*). On montre que* T *est une tribu :*

   (a) On a $\emptyset \in \mathrm{T}$ *car* $\emptyset \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$.

   (b) On remarque que T *est stable par passage au complémentaire car, si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{T}$, *on a* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *et donc* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *(car* T_i *est stable par passage au complémentaire), donc* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}$.

   (c) On remarque enfin que T *est stable par union dénombrable car, si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$, *on a* $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *(car* T_i *est stable par union dénombrable), donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

   D'après l'exercice 2.1, on en déduit que T *est une tribu.*

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$. On note $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(\mathrm{E})$). Montrer que $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

   Corrigé – *D'après la question précédente,* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ *est bien une tribu. La définition de* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ *donne que toute tribu contenant* $\mathcal{A}$ *doit contenir* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$. $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$ *est donc la plus petite tribu contenant* $\mathcal{A}$.

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{T}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathrm{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{T}_{\mathcal{B}}$.

   Corrigé – $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{B}$*, donc contenant* $\mathcal{A}$*. Donc* $\mathrm{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{T}_{\mathcal{B}}$.

Exercice 2.3 (Exemples de tribus)

1. Tribu trace

   (a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Montrer que $\mathcal{T}_{\mathrm{F}} = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{F}, \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

   Corrigé –

   i. $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *car* $\emptyset = \emptyset \cap \mathrm{F}$ *et* $\emptyset \in \mathcal{T}$.

   ii. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$*. Il existe* $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$ *tel que* $\mathrm{A} = \mathrm{B} \cap \mathrm{F}$*. On a donc* $\mathrm{F} \setminus \mathrm{A} = (\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}) \cap \mathrm{F} \in \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *car* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *est donc stable par passage au complémentaire.*

   iii. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{F}$*. On a donc*
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) \cap \mathrm{F} \in \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$$
   car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *est donc stable par union dénombrable.*

   Ceci est suffisant pour dire que $\mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *est une tribu sur* F.

   (b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathrm{E})$ ($\mathcal{B}(\mathrm{E})$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée $\mathcal{T}_{\mathrm{F}}$, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(\mathrm{F})$). [Montrer que $\mathcal{B}(\mathrm{F}) \subset \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$. Pour montrer que $\mathcal{T}_{\mathrm{F}} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$, considérer $\mathcal{C} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}); \mathrm{A} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que $\mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

   Corrigé – *On note* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$ *l'ensemble des ouverts de* F*, et* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ *l'ensemble des ouverts de* E*. Par définition de la topologie trace,* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}} = \{\mathrm{O} \cap \mathrm{F}, \mathrm{O} \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}\}$.

   Comme $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subset \mathcal{B}(\mathrm{E})$*, on a* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{F}} = \{\mathrm{B} \cap \mathrm{F},\ \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})\}$ *(Noter que* $\mathcal{T}_{\mathrm{F}} = \mathcal{B}(\mathrm{E})_{\mathrm{F}}$*, avec les notations de la question précédente). On en déduit que* $\mathcal{B}(\mathrm{F}) \subset \mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *car* $\mathcal{T}_{\mathrm{F}}$ *est une tribu sur* F *contenant* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$ *qui engendre* $\mathcal{B}(\mathrm{F})$.

   On montre maintenant que $\mathcal{T}_{\mathrm{F}} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$*. On pose* $\mathcal{C} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}); \mathrm{A} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$. $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset \cap \mathrm{F} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$. $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car, si* $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$*, on a* $(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) \cap \mathrm{F} = \mathrm{F} \setminus \mathrm{A} = \mathrm{F} \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{F}) \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$*, donc* $(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) \in \mathcal{C}$*. Enfin, pour montrer que* $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable, soit* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$*, on a* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \cap \mathrm{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{F}) \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$*, ce qui donne* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{C}$ *et la stabilité de* $\mathcal{C}$ *par union dénombrable.* $\mathcal{C}$ *est donc une tribu. Il est clair que* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subset \mathcal{C}$ *car si* $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}$*, on a* $\mathrm{O} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$*. La tribu* $\mathcal{C}$ *contient* $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$*, ce qui prouve que* $\mathcal{C}$ *contient* $\mathcal{B}(\mathrm{E})$ *et donc que* $\mathrm{A} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$*. Ceci donne* *exactement $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{B}(F)$. On a bien montré finalement que $\mathcal{T}_F = \mathcal{B}(F)$ (on rappelle que $\mathcal{T}_F = \mathcal{B}(E)_F$, avec les notations de la question précédente).*

On suppose maintenant que F est un borélien de E, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{B}(E)$. On a alors $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{B}(E)$ (car $A \cap F \in \mathcal{B}(E)$ si $A \in \mathcal{B}(E)$). Puis, soit $A \subset F$ tel que $A \in \mathcal{B}(E)$, on peut écrire $A = A \cap F$, donc $A \in \mathcal{T}_F$. On a bien montré que $\mathcal{T}_F = \{A \subset F; A \in \mathcal{B}(E)\}$.

2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

Corrigé – *On note $T(S)$ la tribu engendrée par S.*

On suppose que E est au plus dénombrable (c'est-à-dire dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de E sont au plus dénombrables, on en déduit $T(S) = \mathcal{P}(E)$.

On suppose maintenant que E est infini non dénombrable. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E au plus dénombrables et $\mathcal{B} = \{A^c, A \in \mathcal{A}\}$. D'après la stabilité de $T(S)$ par union dénombrable, la tribu $T(S)$ doit contenir $\mathcal{A}$. Par stabilité de $T(S)$ par passage au complémentaire, $T(S)$ doit aussi contenir $\mathcal{B}$.

On va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une tribu (on en déduit que $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$). On a $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ et il est clair que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire (car $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{B}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$). Enfin, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, on distingue 2 cas :

1er cas. Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

2ème cas. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A_n \in \mathcal{B}$ on a alors $A_n^c \in \mathcal{A}$, donc A_n^c est au plus dénombrable et $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p^c \subset A_n^c$ est aussi au plus dénombrable,ce qui donne $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

On a bien montré que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Finalement, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est donc une tribu contenant S et contenu dans $T(S)$, ceci donne $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Exercice 2.4 (Tribus images) Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.

Soit f une application de E dans F.

On note f^{-1} l'application de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par, pour $B \in \mathcal{P}(F)$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ t.q. } f(x) \in B\}.$$

1. Soit S une tribu sur F. On pose $T_{f,S} = \{f^{-1}(B); B \in S\}$. Montrer que $T_{f,S}$ est une tribu sur E (c'est la tribu image réciproque de S par f).

Corrigé – *On démontre que* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ *est une tribu sur* E *en remarquant que* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A})$ *(pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$*) et que*

$$\forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathrm{F}),\ f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{A}_n).$$

2. Soit T une tribu sur E. On pose $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}} = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{F};\ f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$. Montrer que $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}}$ est une tribu sur F (c'est la tribu image directe de T par f).

Corrigé – *Ici aussi, on montre que* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}}$ *est une tribu sur* F *en remarquant que* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A}) = \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A})$ *(pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$*) et que,*

$$\forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathrm{F}),\ f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{A}_n).$$

Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, *on pose* $\mathrm{B}_f = \{f(x);\ x \in \mathrm{B}\}$. *Noter que, en général,* $\{\mathrm{B}_f,\ \mathrm{B} \in \mathrm{T}\}$ *n'est pas une tribu sur* F *(par exemple, si* f *est non surjective,* $\mathrm{F} \notin \{\mathrm{B}_f,\ \mathrm{B} \in \mathrm{T}\}$*).*

3. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de F. On pose $\mathcal{C}_f = \{f^{-1}(\mathrm{B});\ \mathrm{B} \in \mathcal{C}\}$ et $\mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Montrer que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ est la tribu image réciproque de S par f, c'est-à-dire que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f) = \mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ avec la notation de la première question.
[On pourra montrer d'abord que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)) \subset \mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$. Puis, pour montrer que $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$, montrer que la tribu image de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ par f contient $\mathcal{C}$.]

Corrigé – $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ *est une tribu sur* E *(d'après la première question) contenant* C_f *(car* $\mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$*), elle contient donc* $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$. *Ceci donne* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \supset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$. *Comme dans la deuxième question, on note* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)}$ *la tribu image de* $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *par* f.

On remarque que $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)} \supset \mathcal{C}$ *(car* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *pour tout* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$*). On en déduit que* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)}$ *contient* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$, *c'est-à-dire que* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *pour tout* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. *Comme* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathrm{S}$, *ceci signifie exactement que* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

Les deux inclusions nous donnent bien $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} = \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

Exercice 2.5 (π-système, λ-système) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F}$ est un π-système (c'est-à-dire stable par intersection finie) et un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ avec $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$).

Corrigé – *Si* $\mathcal{F}$ *est une tribu, il est immédiat que* $\mathcal{F}$ *est un* π*-système et un* λ*-système. La question consiste à démontrer la réciproque.*

On suppose donc $\mathcal{F}$ *est un* π*-système et un* λ*-système. Pour montrer que* $\mathcal{F}$ *est une tribu, il suffit de démontrer que* $\mathcal{F}$ *possède les trois propriétés suivantes :*

(p1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(p2) $\mathcal{F}$ *est stable par passage au complémentaire,*

(p3) $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.

La propriété (p1) est immédiate car elle est dans la définition de λ-système.

La propriété (p2) est aussi assez simple. En effet, soit $A \in \mathcal{F}$, Comme $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \subset \Omega$, la troisième propriété des λ-systèmes donne $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$. Ceci prouve bien (p2).

On prouve maintenant (p3). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on veut montrer que $A \in \mathcal{F}$. On commence par remarquer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, avec

$$B_n = \bigcup_{p=0}^{n} A_p.$$

Comme $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, il suffit de montrer que $B_n \in \mathcal{F}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) pour avoir $A \in \mathcal{F}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n^c = (\bigcup_{p=0}^{n} A_p)^c = \bigcap_{p=0}^{n} A_p^c$. Pour tout p, on a $A_p \in \mathcal{F}$, on a donc $A_p^c \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ vérifie (p2)) et donc $\bigcap_{p=0}^{n} A_p^c \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ est un π-système). On a ainsi montré que $B_n^c \in \mathcal{F}$. Enfin, comme $\mathcal{F}$ vérifie (p2), on a bien $B_n \in \mathcal{F}$. On en déduit que $A \in \mathcal{F}$ et donc que $\mathcal{F}$ vérifie (p3), ce qui termine cette question.

2. On suppose que $\mathcal{F}$ est un λ-système. Soit $C \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega$ tel que $C \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

Corrigé – *On va montrer que $\mathcal{G}$ vérifie les trois propriétés définissant un λ-système.*

(1) On montre la stabilité de $\mathcal{G}$ par union dénombrable croissante – *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω telle que $A_n \subset A_{n+1}$ et $A_n \in \mathcal{G}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$. Pour cela on remarque que*

$$C \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C \cap A_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \in \mathcal{G}$ et donc $C \cap A_n \in \mathcal{F}$. Comme $(C \cap A_n) \subset (C \cap A_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, on a donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(C \cap A_n) \in \mathcal{F}$, ce qui donne bien que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

(2) On montre que $\Omega \in \mathcal{G}$ – *Cette propriété de $\mathcal{G}$ est due au fait que $C \in \mathcal{F}$ (et donc $C \cap \Omega = C \in \mathcal{F}$).*

(3) On montre que $A \setminus B \in \mathcal{G}$ si $A, B \in \mathcal{G}$ avec $B \subset A$ – *Soit $A, B \in \mathcal{G}$ avec $B \subset A$. On remarque que $C\cap(A\setminus B) = (C\cap A)\setminus(C\cap B)$. Comme $B\cap C, A\cap C \in \mathcal{F}$ et $(B\cap C) \subset (A\cap C)$, on a $(C \cap A) \setminus (C \cap B) \in \mathcal{F}$. On a donc $C \cap (A \setminus B) \in \mathcal{F}$, ce qui donne bien $(A \setminus B) \in \mathcal{G}$.*

On a ainsi montré que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

Exercice 2.6 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$) On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

Corrigé – *On s'inspire ici de la démonstration du lemme 2.11 (une autre méthode est donnée à l'exercice 2.7).*

Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *Pour tout* $x = (x_1, x_2)^t \in \mathrm{O}$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset \mathrm{O}$. *Comme les rationnels sont denses dans* $\mathbb{R}$, *on peut trouver* $y_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q}\cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2 - r, x_2[$ *et* $z_2 \in \mathbb{Q}\cap]x_2, x_2 + r[$. *On a donc* $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset \mathrm{O}$.

On note alors $\mathrm{I} = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4\,;\ ]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[) \subset \mathrm{O}\}$. *Pour tout* $x \in \mathrm{O}$, *il existe donc* $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathrm{I}$ *tel que* $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. *On en déduit que*

$$\mathrm{O} = \bigcup_{(y_1,z_1,y_2,z_2)\in \mathrm{I}}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[.$$

Comme I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^4$ *est dénombrable), on en déduit que* $\mathrm{O} \in \mathrm{T}$. *On a ainsi montré que* T *est une tribu contenant tous les ouverts de* $\mathbb{R}^2$, *et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*). Donc,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{T}$.

2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{T}_1 = \{\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $\mathrm{T}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – — $\emptyset \in \mathrm{T}_1$ *car* $\mathrm{A} \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

— *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{T}_1$, *on a donc* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}^c = \mathrm{A} \times (\mathbb{R} \setminus \mathrm{B}) = (\mathrm{A} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathrm{A} \times \mathrm{B})$. *Or,* $(\mathrm{A} \times \mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *(car* A *et* $\mathbb{R}$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}$*), on a donc* $(\mathrm{A} \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *D'autre part,* $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}_1$*). Donc,* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}^c = (\mathrm{A} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Ce qui prouve que* $\mathrm{B}^c \in \mathrm{T}_1$ *et donc que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

— *Enfin,* T_1 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}_1$, *on a* $\mathrm{A} \times (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A} \times \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathrm{T}_1$.

On a donc montré que T_1 *est une tribu, il reste à montrer que* T_1 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$.

Soit B *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *On a donc* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et, comme* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, *on a* $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On a donc* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}_1$.

T_1 *est donc une tribu contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$, *donc contenant* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Donc,* $\mathrm{T}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de cette question est donc :

$$\mathrm{A} \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{2.17}$$

3. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{T}_2 = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathrm{T}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On commence par remarquer que la question précédente donne que* T_2 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$. *En effet, soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *la propriété (2.17) donne* $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, *et donc* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_2$.

On montre maintenant que T_2 *est une tribu (on en déduira que* $\mathrm{T}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

(a) $\emptyset \in \mathrm{T}_2$ *car* $\emptyset \times \mathrm{B} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

(b) On montre ici que T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_2$*, on a* $\mathrm{A}^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{A}^c \times \mathrm{B} = (\mathbb{R} \times \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A} \times \mathrm{B})$. *La propriété (2.17) donne* $(\mathbb{R} \times \mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *car* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *D'autre part,* $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_2$*). Donc,* $\mathrm{A}^c \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Ce qui prouve que* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}_2$ *et donc que* T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

(c) Enfin, T_2 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}_2$*, on a* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \times \mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A}_n \times \mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $\mathrm{A}_n \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_2$.

T_2 *est donc une tribu (sur* $\mathbb{R}$*) contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, ce qui prouve que* $\mathrm{T}_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc, finalement,* $\mathrm{T}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $\mathrm{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Corrigé – *La question précédente donne :*

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On a donc $\{\mathrm{A} \times \mathrm{B};\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On en déduit* $\mathrm{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Avec la question 1, on a finalement* $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.7 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) 1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.]

Corrigé – *Soit* T *la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *Comme les boules ouvertes sont des ouverts, on a* $\mathrm{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \subset \mathrm{T}$. *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *Pour tout* $x \in \mathrm{O}$*, il existe* $r > 0$ *tel que* $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{O}$ *(où* $\mathrm{B}(x,r)$ *désigne la boule ouverte de centre* x *et rayon* r*). Comme* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*, on peut donc trouver* $y \in \mathbb{Q}^{\mathrm{N}}$ *et* $s \in \mathbb{Q}_+^* = \{t \in \mathbb{Q};\ t > 0\}$*, tel que* $x \in \mathrm{B}(y,s) \subset \mathrm{O}$. *On note alors* $\mathrm{I} = \{(y,s) \in \mathbb{Q}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{Q}_+^*;\ \mathrm{B}(y,s) \subset \mathrm{O}\}$. *On a alors* $\mathrm{O} = \bigcup_{(y,s)\in\mathrm{I}} \mathrm{B}(y,s)$. *Comme* I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^{\mathrm{N}+1}$ *est dénombrable), on en déduit que* $\mathrm{O} \in \mathrm{T}$ *et donc que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \subset \mathrm{T}$ *(car* T *est une tribu contenant tous les ouverts).*

Le raisonnement précédent montre même que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des boules ouvertes dont le rayon est rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles.*

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

Corrigé – *On reprend le même raisonnement que dans la question précédente en remplaçant* $\mathrm{B}(x,r)$ *par* $\mathrm{P}(x,r) = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}}]x_i - r, x_i + r[$*, avec* $x = (x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}})^t$.

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

Corrigé – *Soit $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$ et $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $]a,b] = \bigcap_{n>0}]a,b+\frac{1}{n}[$, on voit que $]a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Donc, on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Soit $\mathrm{I} =]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. On peut écrire $\mathrm{I} = \bigcup_{n \geq n_0}]a,b-\frac{1}{n}]$, avec n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < b-a$. On en déduit que $\mathrm{I} \in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert non vide peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités finies (voir le lemme 2.11 page 44), on obtient que tout ouvert appartient à $\mathrm{T}(\mathcal{C})$. Ceci permet de conclure que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C})$ et finalement que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{T}(\mathcal{C})$.

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à S. (Un résultat analogue, non demandé ici, est vrai en remplaçant "boules ouvertes" par "boules fermées".)

Corrigé – *Si S est dénombrable, il suffit de reprendre le même raisonnement que dans la première question en remplaçant $\mathbb{Q}^N$ par S^N (qui est dense dans $\mathbb{R}^N$) et $\mathbb{Q}_+^*$ par $\mathrm{S}_+^* = \{s \in \mathrm{S};\ s>0\}$ (qui est dense dans $\mathbb{R}_+^*$). On ne détaille pas cette démonstration.*

Si S est non dénombrable, on se ramène au cas S dénombrable de la manière suivante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on choisit $x_i \in \mathrm{S}$ t.q. $|x_i - (i/n)| \leq (1/n)$ (l'existence de x_i vient de la densité de S dans $\mathbb{R}$) et on pose $\mathrm{S}_n = \{x_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$. Puis, on pose $\widehat{\mathrm{S}} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{S}_n$. L'ensemble $\widehat{\mathrm{S}}$ est un sous ensemble de S, il est dense dans $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) et il est dénombrable (car c'est une union dénombrable d'ensembles dénombrables). La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est donc engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à $\widehat{\mathrm{S}}$. Elle est donc, a fortiori, engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à S.

Exercice 2.8 (Une tribu infinie est non dénombrable) Montrer que toute tribu infinie T sur un ensemble (infini) E est non dénombrable. [Si T est dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble $\mathrm{A}(x)$ intersection de tous les éléments de T contenant x. Puis, montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans T.]

Exercice 2.9 (Algèbre) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.5) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$,

(b) $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

Corrigé – *On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Il est clair que (a) est vérifiée. Pour montrer (b) il suffit d'utiliser la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire, cela donne bien que* $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ *si* $A, B \in \mathcal{A}$.

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ vérifie (a) et (b).

On a alors $\emptyset = E \setminus E \in \mathcal{A}$, *et donc* $\emptyset, E \in \mathcal{A}$.

On remarque ensuite que, grâce à (b), $A^c = E \setminus A \in E$ *si* $A \in \mathcal{A}$. *On a donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.*

Soit maintenant $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. *On a* $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus A_2^c$, *on en déduit que* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ *par (b) et la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire. Une récurrence sur n donne alors que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.*

Enfin, la stabilité de $\mathcal{A}$ par union finie découle de la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie et par passage au complémentaire car $(\bigcup_{p=0}^n A_p)^c = \bigcap_{p=0}^n A_p^c$.

On a bien montré que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(E) ; A \in \mathcal{A}_i \text{ pour tout } i \in I\}$ est encore une algèbre.

   Corrigé – *On peut montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre en utilisant directement la définition d'une algèbre. On peut aussi le montrer en utilisant la première question, ce que nous faisons ici. On montre donc que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ vérifie (a) et (b) :*

   $E \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ *car* $E \in \mathcal{A}_i$ *pour tout* $i \in I$.

   Soit $A, B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. *Pour tout* $i \in I$, *on a* $A, B \in \mathcal{A}_i$. *On en déduit* $A \setminus B \in \mathcal{A}_i$ *(car $\mathcal{A}_i$ est une algèbre) et donc* $A \setminus B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

   On a bien montré que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 2.10 (Suite croissante de tribus) Soit E un ensemble. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre (cf. définition 2.5), mais n'est pas, en général, une tribu. Donner une suite d'algèbres finies de parties de $[0, 1]$ dont la réunion engendre $\mathcal{B}([0, 1])$.

Exercice 2.11 (Tribu engendrée par une partition)

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E, c'est-à-dire que $\cup_{i \in I} A_i = E$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On suppose aussi que $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de E s'écrivant comme réunion au plus dénombrable d'éléments de cette partition, c'est-à-dire que

$$\mathcal{C} = \{\cup_{j \in J} A_j, \text{ avec } J \subset I, \text{ J au plus dénombrable}\}.$$

On note aussi $\mathcal{D} = \{B^c, B \in \mathcal{C}\}$ et $T = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$.

1. On suppose, dans cette question, que $\mathrm{I} = \{1, 2, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{T} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$. Combien la tribu T a-t-elle d'éléments ?

   Corrigé – *Soit* $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$. *On a* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C}$ *et il existe donc* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ *tel que* $\mathrm{B}^c = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$, *ce qui donne* $\mathrm{B} = \cup_{i \in \mathrm{J}^c} \mathrm{A}_i$. *Comme* J^c *est fini, on a donc* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. *On a ainsi montré que* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. *Un raisonnement analogue donne* $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ *et donc* $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. *Finalement, on obtient bien* $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathrm{T}$.

   On note $\bar{\mathrm{T}}$ *la tribu engendrée par* $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$. *Comme* $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ *et que* $\bar{\mathrm{T}}$ *est stable par union finie, on a* $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$. *Pour montrer que* $\bar{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$, *il suffit donc de montrer que* $\mathcal{C}$ *est une tribu (car* $\bar{\mathrm{T}}$ *est la plus petite tribu contenant* $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$*).*

   Pour montrer que $\mathcal{C}$ *est une tribu, on remarque que*

   - $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$ *avec* $\mathrm{J} = \emptyset$,
   - $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable car toute réunion de parties de* I *est finie,*
   - $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} = \mathcal{C}$ *si* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$.

   Ceci donne bien que $\mathcal{C}$ *est une tribu et donc que* $\mathcal{C} = \bar{\mathrm{T}}$.

   Pour trouver le nombre déléments de $\mathcal{C}$, *on considère l'application* f *de l'ensemble des parties de* $\{1, \ldots, n\}$ *dans* $\mathcal{C}$ *définie par* $f(\mathrm{J}) = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$. *La définition de* $\mathcal{C}$ *donne que* f *est surjective et, comme les* A_i *sont tous non vides et que les* A_i *sont disjoints deux à deux, on remarque que* f *est injective. Ceci montre que* f *est bijective et donc que le cardinal de* $\mathcal{C}$ *est le même que le cardinal de l'ensemble des parties de* $\{1, \ldots, n\}$, *c'est-à-dire* 2^n. *La tribu* $\mathcal{C}$ *a donc* 2^n *éléments.*

2. On suppose, dans cette question, que I est dénombrable (on peut donc supposer que $\mathrm{I} = \mathbb{N}$). Montrer que $\mathrm{T} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_i, i \in \mathrm{I}\}$.

   Corrigé – *On reprend le même raisonnement que pour la question précédente. Soit* $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$. *On a* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C}$ *et il existe donc* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ *tel que* $\mathrm{B}^c = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$, *ce qui donne* $\mathrm{B} = \cup_{i \in \mathrm{J}^c} \mathrm{A}_i$. *Comme* $\mathrm{J}^c \subset \mathrm{I}$, J^c *est au plus dénombrable, on a donc* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. *On a ainsi montré que* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. *Un raisonnement analogue donne* $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ *et donc* $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. *Finalement, on obtient bien* $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathrm{T}$.

   On note $\bar{\mathrm{T}}$ *la tribu engendrée par* $\{\mathrm{A}_i, i \in \mathrm{I}\}$. *Comme* $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_i, i \in \mathrm{I}\}$ *et que* $\bar{\mathrm{T}}$ *est stable par union dénombrable (et donc aussi par union finie), on a* $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$. *Pour montrer que* $\bar{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$, *il suffit donc de montrer que* $\mathcal{C}$ *est une tribu (car* $\bar{\mathrm{T}}$ *est la plus petite tribu contenant* $\{\mathrm{A}_i, i \in \mathrm{I}\}$*).*

   Pour montrer que $\mathcal{C}$ *est une tribu, on remarque que*

   - $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$ *avec* $\mathrm{J} = \emptyset$,
   - $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable car toute réunion de parties de* I *est au plus dénombrable,*
   - $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} = \mathcal{C}$ *si* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$.

   Ceci donne bien que $\mathcal{C}$ *est une tribu et donc que* $\mathcal{C} = \bar{\mathrm{T}}$.

3. On suppose maintenant que I est un ensemble infini non dénombrable. Montrer que $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{A_i, i \in I\}$.

Corrigé – *Pour montrer que $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$, il suffit de remarquer que $\emptyset \in \mathcal{C}$ (car $\emptyset = \cup_{i \in J} A_j$ avec $J = \emptyset$) et que $\emptyset \notin \mathcal{D}$. En effet, $\emptyset^c = E = \cup_{i \in I} A_i$ et donc $\emptyset^c \neq \cup_{i \in J} A_i$ pour tout $J \subset I$, J au plus dénombrable (et donc $J \neq I$) car les A_i sont disjoints deux à deux et non vides. Ce qui montre que $\emptyset^c \notin \mathcal{C}$ et donc $\emptyset \notin \mathcal{D}$.*

En fait, on peut même montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

On note $\bar{T}$ la tribu engendrée par $\{A_i, i \in I\}$. Comme $\bar{T} \supset \{A_i, i \in I\}$ et que $\bar{T}$ est stable par union dénombrable (et donc aussi par union finie), on a $\mathcal{C} \subset \bar{T}$. Puis comme $\bar{T}$ est stable par passage au complémentaire, on a aussi $\mathcal{D} \subset \bar{T}$. On a donc $T \subset \bar{T}$. Pour montrer que $\bar{T} = T$, il suffit donc de montrer que T est une tribu (car $\bar{T}$ est la plus petite tribu contenant $\{A_i, i \in I\}$).

On montre maintenant que T est une tribu.

- *$\emptyset \in T$ car $\emptyset = \cup_{i \in J} A_j \in \mathcal{C} \subset T$, avec $J = \emptyset$.*
- *T est stable par passage au complémentaire car $B^c \in \mathcal{D} \subset T$ si $B \in \mathcal{C}$ et $B^c \in \mathcal{C} \subset T$ si $B \in \mathcal{D}$.*
- *Il reste à montrer la stabilité de T par union dénombrable. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de T. Pour montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in T$, on distingue deux cas :*
  Cas 1. *$B_n \in \mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a alors $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{C} \subset T$, car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est encore au plus dénombrable.*
  Cas 2. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $B_m \notin \mathcal{C}$ (et donc $B_m \in \mathcal{D}$). On a alors $B_m^c \in \mathcal{C}$ et il existe donc $J \subset I$, J au plus dénombrable, tel que $B_m^c = \cup_{i \in J} A_i$. On a alors*
  $$(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n)^c = \cap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c \subset B_m^c,$$
  ce qui prouve qu'il existe $\bar{J} \subset J$ tel que $(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n)^c = \cup_{i \in \bar{J}} A_i$. Comme $\bar{J}$ est au plus dénombrable, on a donc $(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n)^c \in \mathcal{C}$ et donc $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D} \subset T$. Ceci prouve la stabilité de de T par union dénombrable.

On a ainsi montré que T est une tribu et donc que $T = \bar{T}$.

Exercice 2.12 Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ tels que } C^c = \bigcup_{p=1}^{n} C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ tel que $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

Corrigé – *On montre tout d'abord la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie. Soit* $A, B \in \mathcal{B}$. *Il existe* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ *et* $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ *tels que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ *et* $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$. *On a alors* $A \cap B = (\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^m B_j) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$. *Comme* $A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ *(car* $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie) pour tout* i, j *et que* $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$ *si* $(i, j) \neq (k, l)$, *on en déduit que* $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Une récurrence sur n donne alors la stabilité de $\mathcal{B}$ *par intersection finie.*

On montre maintenant la stabilité de $\mathcal{B}$ *par passage au complémentaire. Soit* $A \in \mathcal{B}$. *Il existe* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ *tels que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *et* $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. *On a alors* $A^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$. *Comme* A_i^c *est une réunion finie disjointe d'éléments de* $\mathcal{C}$, *on a bien* $A_i^c \in \mathcal{B}$. *La stabilité de* $\mathcal{B}$ *par intersection finie donne alors que* $A^c \in \mathcal{B}$. *On a donc bien montré la stabilité de* $\mathcal{B}$ *par passage au complémentaire.*

2. Montrer que l'algèbre engendrée (voir remarque 2.6 pour la définition) par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{A}$ *l'algèbre engendrée par* $\mathcal{C}$. *Comme* $\mathcal{A}$ *est stable par union finie et contient* $\mathcal{C}$, *il est clair que* $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. *Comme* $\mathcal{B}$ *contient* $\mathcal{C}$, *pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que* $\mathcal{B}$ *est une algèbre (car* $\mathcal{A}$ *est l'intersection de toutes les algèbres contenant* $\mathcal{C}$*). On montre donc maintenant que* $\mathcal{B}$ *est une algèbre.*

Pour montrer que $\mathcal{B}$ *est une algèbre, on montre que* $\mathcal{B}$ *vérifie les quatre propriétés d'une algèbre.*

(a) $E, \emptyset \in \mathcal{B}$ *car* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ *et* $E, \emptyset \in \mathcal{C}$.

(b) La question précédente montre que $\mathcal{B}$ *est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.*

(c) La stabilité de $\mathcal{B}$ *par union finie découle facilement de la stabilité de* $\mathcal{B}$ *par intersection finie et par passage au complémentaire, car* $\bigcup_{i=1}^n A_i = (\bigcap_{i=1}^n A_i^c)^c$.

On a bien montré que $\mathcal{B}$ *est une algèbre. Comme* $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, *on a donc* $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ *et finalement* $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Exercice 2.13 (Classes monotones) Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :

(p1) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,

(p2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.9).

Corrigé – *Si* Σ *est une tribu,* Σ *est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. On en déduit immédiatement que* Σ *est une algèbre et une classe monotone.*

On suppose maintenant que Σ *est une algèbre et une classe monotone. Comme* Σ *est une algèbre, pour montrer que* Σ *est une tribu, il suffit de montrer que* Σ *est stable par union dénombrable.*

Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. On veut montrer que* $A \in \Sigma$*. On remarque que*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ avec } B_n = \bigcup_{p=0}^{n} A_n.$$

Comme Σ *est une algèbre, on a* $B_n \in \Sigma$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Puis, comme* Σ *est stable par union croissante (noter que* $B_n \subset B_{n+1}$*) dénombrable, on en déduit que* $A \in \Sigma$*. On a bien montré que* Σ *est stable par union dénombrable et donc que* Σ *est une tribu.*

Noter que l'hypothèse de stabilité de Σ *par intersection décroissante dénombrable n'a pas été utilisé. Elle sera utile à la question 4.*

2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

Corrigé – *Il y a beaucoup d'exemples de classes monotones qui ne sont pas des tribus. En voici un :* $\Sigma = \{\mathbb{R}\}$.

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que

$$\bigcap_{i\in I} \Sigma_i = \{A \in \mathcal{P}(E); A \in \Sigma_i \text{ pour tout } i \in I\}$$

est encore une classe monotone.

Corrigé – *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ *telle que* $A_n \subset A_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On a donc, pour tout* $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ *et donc, puisque* Σ_i *est une classe monotone,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_i$*. On en déduit que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ *telle que* $A_n \supset A_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On a donc, pour tout* $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ *et donc, puisque* Σ_i *est une classe monotone,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_i$*. On en déduit que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$.

Ceci montre bien que $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ *est une classe monotone.*

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

(a) Montrer que $\Sigma \subset T$.

Corrigé – Σ *est l'intersection de toutes les classes monotones sur* $\mathcal{A}$*. Une tribu étant aussi une classe monotone, la tribu* T *(engendrée par* $\mathcal{A}$*) est donc une classe monotone contenant* $\mathcal{A}$*. On en déduit que* $\Sigma \subset T$.

(b) Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. On pose $\Sigma_{\mathrm{A}} = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{E}\,;\, \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \Sigma \text{ et } \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_{A} est une classe monotone.

Corrigé – *Soit* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
On pose $\mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$. *On va montrer que* $\mathrm{B} \in \Sigma_{\mathrm{A}}$.

On a $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n)$. *La suite* $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de* Σ. *Comme* Σ *est une classe monotone, on en déduit* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n) \in \Sigma$.

On montre aussi que $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \in \Sigma$. *En effet,* $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \setminus \mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_n \setminus \mathrm{A}) \in \Sigma$ *par la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

On a donc bien montré que $\mathrm{B} \in \Sigma_{\mathrm{A}}$, *ce qui donne la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

De manière analogue, on va montrer la stabilité de Σ *par intersection décroissante dénombrable. Soit* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{B}_n \supset \mathrm{B}_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On pose* $\mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$.

Comme $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}_n)$, *on obtient* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \Sigma$ *en utilisant la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

Comme $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_n \setminus \mathrm{A})$, *on obtient* $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \in \Sigma$ *en utilisant la stabilité de* Σ *par intersection décroissante dénombrable.*

On a donc $\mathrm{B} \in \Sigma_{\mathrm{A}}$, *ce qui donne la stabilité de* Σ *par intersection décroissante dénombrable.*

On a bien montré que Σ_{A} *est une classe monotone.*

(c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.9.] En déduire que $\mathrm{T} = \Sigma$.

Corrigé – *Pour montrer que* Σ *est une algèbre, il suffit de montrer que* Σ *vérifie les propriétés* (a) *et* (b) *de la première question de l'exercice 2.9. Il est immédiat que la propriété* (a) *est vérifiée car* $\mathrm{E} \in \mathcal{A} \in \Sigma$. *Pour montrer* (b), *on utilise la classe monotone* Σ_{A} *définie à la question 4 pour* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. *Comme* $\mathcal{A}$ *est une algèbre, on a donc* $\mathcal{A} \subset \Sigma_{\mathrm{A}}$. *La classe monotone* Σ_{A} *contient* $\mathcal{A}$, *elle contient donc* Σ *qui est l'intersection de toutes les classes monotones contenant* $\mathcal{A}$. *On a donc :*

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A},\, \mathrm{B} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{B} \in \Sigma_{\mathrm{A}}. \tag{2.18}$$

On remarque maintenant que, pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, *on a :*

$$\mathrm{A} \in \Sigma_{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \mathrm{B} \in \Sigma_{\mathrm{A}}.$$

On déduit donc de (2.18) :

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A},\, \mathrm{B} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{A} \in \Sigma_{\mathrm{B}}.$$

Si $\mathrm{B} \in \Sigma$, *la classe monotone* Σ_{B} *contient donc* $\mathcal{A}$. *Elle contient alors aussi* Σ *(qui est l'intersection de toutes les classes monotones sur* E *contenant* $\mathcal{A}$*). On a donc montré :*

$$\mathrm{B} \in \Sigma,\, \mathrm{A} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{A} \in \Sigma_{\mathrm{B}}.$$

On en déduit que $A \setminus B \in \Sigma$ *si* $A, B \in \Sigma$.

On a bien montré que Σ *vérifie la propriété* (b) *de la première question de l'exercice 2.9 et donc que* Σ *est une algèbre.*

Pour conclure, on remarque Σ *est une classe monotone et une algèbre. C'est donc une tribu (par la question 1) contenant* $\mathcal{A}$. *Elle contient donc* T *(qui est l'intersection de toutes les tribus contenant* $\mathcal{A}$*) et on a bien, finalement,* $\Sigma = T$.

Exercice 2.14 (Caractérisation de la tribu engendrée) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Enfin, on appelle système de Dynkin un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E tel que
- $E \in \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ stable par différence,
- $\mathcal{D}$ stable par union dénombrable disjointe.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$ et contenu dans tous les systèmes de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. c'est-à-dire qu'il existe un système de Dynkin, noté $\mathcal{D}$, tel que $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ et

$$\mathcal{A} \text{ système de Dynkin } \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

Corrigé – *On note* $\mathcal{Z}$ *l'ensemble des systèmes de Dynkin contenant* $\mathcal{C}$. *On remarque tout d'abord que* $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ *car* $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{Z}$. *Puis, on note* $\mathcal{D}$ *l'ensemble des parties de* E *appartenant à tous les éléments de* $\mathcal{Z}$ *(c'est-à-dire que, pour* $A \in \mathcal{P}(E)$*, on a* $A \in \mathcal{D}$ *si, pour tout* $\mathcal{B} \in \mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{B}$*).*

Il est facile de voir que $\mathcal{D}$ *contient* E, $\mathcal{D}$ *est stable par différence,* $\mathcal{D}$ *est stable par union dénombrable disjointe et que* $\mathcal{D}$ *contient* $\mathcal{C}$ *(car tous les éléments de* $\mathcal{Z}$ *vérifient ces quatres propriétés). Enfin,* $\mathcal{A} \in \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, *ce qui est bien la propriété demandée.*

Le système de Dynkin $\mathcal{D}$ s'appelle le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$. Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$.

On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et on va montrer que $\mathcal{D}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ Ceci démontre le théorème π-λ de Dynkin.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D}$ tel que $A \cap D \in \mathcal{D}\}$.

(a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.

Corrigé – *Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_A$ avec $D_n \cap D_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On va montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. On remarque tout d'abord que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$ car $D_n \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Puis, $A \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(D_n \cap A) \in \mathcal{D}$ car $D_n \cap A \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(D_n \cap A) \cap (D_m \cap A) = \emptyset$, si $n \neq m$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. On a donc montré que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}_A$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe.*

Soit maintenant $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_A$, avec $D_1 \subset D_2$. On va montrer que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$. Pour cela, on remarque que $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$ car $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par différence. Puis, $A \cap (D_2 \setminus D_1) = (A \cap D_2) \setminus (A \cap D_1) \in \mathcal{D}$ car $A \cap D_1$, $A \cap D_2 \in D$, $(A \cap D_1) \subset (A \cap D_2)$ et $\mathcal{D}$ est stable par différence. On a donc montré que $D_2 \setminus D_1 \in D_{\mathcal{A}}$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_A$ est stable par différence.

(b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

Corrigé – *Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$) et $A \cap B \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie), donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.*

On remarque aussi que $E \in \mathcal{D}_A$ car $A \cap E = A \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}_A$ est stable par différence et stable par union dénombrable disjointe, D_A est donc un système de Dynkin. Comme $\mathcal{D}_A$ contient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_A$ contient le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{D}$. On a donc $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{D}$ et, finalement, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

Corrigé – *Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$). Comme $B \in \mathcal{C}$, la question précédente donne $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ et donc $A \in \mathcal{D}_B$. On a donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.*

On en déduit, comme à la question précédente, que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

On montre maintenant que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie. Soit $B, C \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_C$, on a $B \in \mathcal{D}_C$ et donc $C \cap B \in \mathcal{D}$. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est donc aussi dans $\mathcal{D}$. Ceci prouve bien la stabilité de $\mathcal{D}$ par intersection finie (une récurrence facile donne que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ est aussi dans $\mathcal{D}$).

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Corrigé – *On remarque que $E \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire car, si $A \in \mathcal{D}$, on a $E \setminus A \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par différence (et $E, A \in \mathcal{D}$ avec $A \subset E$). Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable (non nécessairement disjointe).*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$*. Comme* $\mathcal{D}$ *est stable par complémentaire, on aussi* $A_n^c \in \mathcal{D}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose :*

$$B_n = A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i^c).$$

On a $B_n \in \mathcal{D}$ *car* $\mathcal{D}$ *est stable par intersection finie et* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *(en notant que* $B_n \subset A_n$ *et* $B_m \subset A_n^c$ *si* $m > n$*). Comme* $\mathcal{D}$ *est stable par union dénombrable disjointe, on en déduit* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ *et donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ *(car* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$*). Ceci prouve que* $\mathcal{D}$ *est stable par union dénombrable et donc que* $\mathcal{D}$ *est une tribu.*

On a ainsi montré que $\mathcal{D}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$ *et donc contenant la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$*, notée* $\tau(\mathcal{C})$*. D'autre part, il est facile de voir que toute tribu contenant* $\mathcal{C}$ *est un système de Dynkin contenant* $\mathcal{C}$ *et donc que* $\tau(\mathcal{C})$ *contient* $\mathcal{D}$*. On a bien montré finalement que* $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C})$*.*

2.7.2 Mesures et probabilités

Exercice 2.15 (Exemple de mesures) Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Corrigé – *Oui, l'application* m *est une mesure sur* $\mathcal{P}(E)$*. En effet, on a bien* $m(\emptyset) = 0$ *et si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ *on a* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = 0$ *si* A_n *est au plus dénombrable pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(car une réunion d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable) et* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = +\infty$ *s'ill existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* A_n *est infini non dénombrable. On a donc toujours* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ *(noter d'ailleurs qu'il est inutile de supposer les* A_n *disjoints deux à deux).*

Exercice 2.16 (Exemple de probabilité) Soit $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $p_k \geq 0\, \forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k;x_k\in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie en 1. est une probabilité

Exercice 2.17 (Mesure trace et restriction d'une mesure) Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < +\infty$, cette mesure est finie.

   Corrigé – *Soit* $B \in T_F$*, il existe donc* $A \in T$ *tel que* $B = A \cap F$*. Comme* $F \in T$*, on a donc aussi* $B \in T$*.*

On note m_F la restriction de m à T_F, on a donc $m_F(B) = m(B)$ pour tout $B \in T_F$. Il est alors immédiat de voir que $m_F(\emptyset) = 0$ et que m_F est σ-additive sur T_F, m_F est donc une mesure sur T_F. Si $m(F) < +\infty$, on a $m_F(F) = m(F) < +\infty$, la mesure m_F est donc finie (mais la mesure m peut ne pas être finie, c'est-à-dire que l'on peut avoir $m(E) = +\infty$).

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

   Corrigé – *On note m_a la restriction de m à $\mathcal{A}$, on a donc $m_a(B) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Il est clair que m_a est une mesure sur $\mathcal{A}$.*

   Si m est finie, on a $m_a(E) = m(E) < +\infty$, m_a est donc aussi une mesure finie.

   Si m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ et $m(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais, comme les A_n ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{A}$, la mesure m_a peut ne pas être σ-finie. On peut construire un exemple facilement de la manière suivante :
   On suppose que m est σ-finie mais n'est pas finie (on peut prendre, par exemple $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) et on prend $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. La mesure m_a n'est pas σ-finie...

Exercice 2.18 (Différence de deux unions) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < +\infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$.

   Corrigé – *Soit $x \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on a donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_p$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$. On a donc $x \in A_p \setminus B_p$, ce qui prouve que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$ et donc que*

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n).$$

2. Montrer que $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n) - m(B_n))$.

   Corrigé – *Puisque $m(E) < +\infty$, on a, pour tout $A, B \in T$ tels que $B \subset A$, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$. La monotonie de m, la σ-sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :*

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) &= m((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)) \\ &\le m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(m(A_n) - m(B_n)). \end{aligned}$$

Exercice 2.19 (Intersection d'ensembles pleins) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E)$.

Corrigé – *Comme $m(E) < +\infty$, on a $m(A^c) = m(E) - m(A)$ pour tout $A \in T$. De $m(A_n) = m(E)$, on déduit alors $m(A_n^c) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par σ-sous additivité de m, on a alors $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c) = 0$. Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$, on a donc*

$$m((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c) = 0 \text{ et donc } m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E).$$

Exercice 2.20 (Sur la mesure d'une union) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$. On suppose que $m(A_p) < +\infty$ pour tout p. Montrer que

$$m(\bigcup_{p=1}^{n}(B \cap A_p)) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} m(B \cap (\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}))\right). \tag{2.19}$$

Corrigé – *On va montrer que pour toute mesure finie, notée μ, sur $\mathcal{A}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$,*

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mu(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})\right). \tag{2.20}$$

Ceci est suffisant pour montrer (2.19). En effet, on pose $C = B \cup (\bigcup_{i=p}^{n} A_p)$ et on définit μ en posant, pour $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = m(A \cap C)$ (on a bien ainsi une mesure finie sur $\mathcal{A}$). L'égalité (2.19) est alors identique à (2.20).

Pour montrer (2.20), on raisonne par récurrence sur n. L'égalité (2.20) est clairement vraie pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que (2.20) est vraie pour cette valeur de n et pour toute mesure finie sur $\mathcal{A}$ et il s'agit donc de montrer (2.20) pour $n+1$ au lieu de n.

Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{A}$ et $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$, on a (comme $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C)$ pour tout $B, C \in \mathcal{A}$)

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n+1} A_p) = \mu((\bigcup_{p=1}^{n} A_p) \cup A_{n+1}) = \mu(A_{n+1}) + \mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) - \mu(A_{p+1} \cap (\bigcup_{p=1}^{n} A_p)). \tag{2.21}$$

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour la famille $A_1, \ldots, A_n$ et la mesure μ. On obtient

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mu(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})\right). \tag{2.22}$$

Mais, on peut aussi utiilser l'hypothèse de récurrence pour la famille $A_1, \ldots, A_n$ et la mesure μ_1 définie par $\mu_1(C) = \mu(C \cap A_{n+1})$ pour $C \in \mathcal{A}$ (ce qui revient a écrire (2.19) avec μ au lieu de m et A_{n+1} au lieu de B). On obtient

$$\mu(A_{p+1} \cap (\bigcup_{p=1}^{n} A_p)) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mu(A_{n+1} \cap (\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}))\right). \tag{2.23}$$

En utilisant (2.22) et (2.23) dans (2.21), on obtient bien (2.20), ce qui termine cette démonstration.

Exercice 2.21 (Contre-exemples) 1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?

Corrigé – *Non,* A *n'est pas nécessairement fermé. On peut prendre, par exemple* $A = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$. *On a* $\lambda(A) = 0$ *et* A *n'est pas fermé (car* 0 *appartient à l'adhérence de* A *sans être dans* A*).*

2. Soit (E,T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [On pourra trouver un exemple (facile) avec $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 non finies. Un exemple avec $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 finies est aussi possible mais plus difficile à trouver. . .]

Corrigé – *On prend* $(E,T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exemple facile (avec m_1, m_2 non finies).
On prend

$$\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}.$$

On a bien $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire que* $\mathcal{C}_1$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(voir la proposition 2.10). On prend alors* $m_1 = \lambda$ *et* $m_2 = 2\lambda$ *(c'est-à-dire* $m_2(B) = 2\lambda(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*). On a bien* $m_1(B) = m_2(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}_1$ *(car on a alors* $m_1(B) = m_2(B) = +\infty$*). Mais* $m_1 \neq m_2$ *puisque, par exemple,* $m_1(]0,1[) = 1$ *et* $m_2(]0,1[) = 2$.

Exemple difficile (avec m_1, m_2 finies).
On prend maintenant $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) ; \{-1,0,1\} \cap B = \emptyset\} \cup \{\{-1,0\}\} \cup \{\{0,1\}\}$ *(un élément de* $\mathcal{C}_2$ *est donc un borélien ne contenant ni* -1 *ni* 0 *ni* 1, *ou bien la partie* $\{-1,0\}$, *ou bien la partie* $\{0,1\}$*). On montre d'abord que* $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Il est clair que* $T(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *car* $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$, *on remarque que* $\{0\} = \{-1,0\} \cap \{0,1\} \in T(\mathcal{C}_2)$ *et donc que* $\{-1\} = \{-1,0\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$, $\{1\} = \{0,1\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$. *Finalement on voit alors que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$ *car tout borélien s'écrit comme un borélien ne contenant ni* -1 *ni* 0 *ni* 1 *(qui appartient donc à* $T(\mathcal{C}_2)$*), auquel on ajoute éventuellement 1, 2 ou 3 autre(s) élément(s) de* $T(\mathcal{C}_2)$ *(qui sont les parties* $\{0\}$, $\{-1\}$ *et* $\{1\}$, *on conclut alors avec la stabilité par union finie de la tribu* $T(\mathcal{C}_2)$*).*

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, *on note* δ_a *la mesure de Dirac sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a donc, pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ *si* $a \in B$ *et* $\delta_a(B) = 0$ *si* $a \notin B$. *On prend alors* $m_1 = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ *et* $m_2 = 2\delta_{-1} + 2\delta_1$. *On a clairement* $m_1 = m_2$ *sur* $\mathcal{C}_2$ *car* $m_1(B) = m_2(B) = 0$ *si* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est tel que* $\{-1,0,1\} \cap B = \emptyset$ *et* $m_1(\{-1,0\}) = m_2(\{-1,0\}) = m_1(\{0,1\}) = m_2(\{0,1\}) = 2$. *Enfin, on a* $m_1 \neq m_2$ *puisque, par exemple,* $m_1(\{0\}) = 1$ *et* $m_2(\{0\}) = 0$.

Exercice 2.22 (Résultat d'unicité) Soit (E,T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $\mathrm{E} \in \mathcal{C}$ et que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})\}$ et utiliser l'exercice 2.14.]

   Corrigé – *On pose $\mathcal{D} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})\}$. La $\sigma-$additivité de m et μ montre que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Comme $m(\mathrm{E}) < +\infty$, on peut aussi montrer que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). En effet, si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{D}$, avec $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, on a (par additivité de m et μ) $m(\mathrm{B}) + m(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = m(\mathrm{A})$ et $\mu(\mathrm{B}) + \mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A})$. Comme $m(\mathrm{A}) < +\infty$ et $\mu(\mathrm{A}) < +\infty$, on a donc $m(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = m(\mathrm{A}) - m(\mathrm{B})$ et $\mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{B})$, ce qui prouve que $m(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})$ et donc que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{D}$. Enfin, $\mathrm{E} \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{E} \in \mathcal{C}$.*

   On utilise maintenant l'exercice 2.14. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un système de Dynkin (voir l'exercice 2.14) contenant $\mathcal{C}$. Il contient donc le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, l'exercice 2.14 donne que le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (qui est T). On a donc $\mathcal{D} \supset \mathrm{T}$ et donc finalement $\mathcal{D} = \mathrm{T}$ (car, par définition, $\mathcal{D} \subset \mathrm{T}$).

   On a donc bien montré que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

2. (Généralisation de la question précédente).

   On suppose qu'il existe une suite $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ telle que $\mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(\mathrm{E}_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n$. Montrer que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose $m_n(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n)$ et $\mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n)$ (noter que $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n \in \mathrm{T}$, car $\mathrm{A}, \mathrm{E}_n \in \mathrm{T}$). On obtient ainsi deux mesures sur T, m_n et μ_n. Ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$ (car $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie).*

   On raisonne alors comme à la question précédente. On pose $\mathcal{D} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m_n(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{A})\}$ et le raisonnement de la question précédente donne que $\mathrm{E} \in \mathcal{D}$ (car $\mathrm{E}_n \in \mathcal{C}$), que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et (grâce à $m_n(\mathrm{E}) < +\infty$) que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). L'ensemble $\mathcal{D}$ est donc un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. Il contient donc le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$), Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, l'exercice 2.14 donne que le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (qui est T). On a donc $\mathcal{D} \supset \mathrm{T}$ et donc finalement $\mathcal{D} = \mathrm{T}$ (car, par définition, $\mathcal{D} \subset \mathrm{T}$).

   On a donc, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$m(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n) = m_n(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n).$$

   On en déduit que $m(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, car, par $\sigma-$additivité de m et μ, $m(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}_n) = \mu(\mathrm{A})$.

3. Avec $(\mathrm{E}, \mathrm{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple pour lequel $\mathrm{E} \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

   Corrigé – *Un exemple simple est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mu = 2m$ et m définie sur T par $m(\mathrm{A}) =$card(A) si A a un nombre fini d'éléments et $m(\mathrm{A}) = +\infty$ sinon.*

Exercice 2.23 (Existence d'une mesure, de l'algèbre à la σ-algèbre) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}_0$ une algèbre sur Ω et m une mesure sur $\mathcal{F}_0$ (c'est-à-dire que m est une application de $\mathcal{F}_0$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $m(\emptyset) = 0$ et $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n)$ pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}_0$ disjoints deux à deux et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{F}_0$). On note $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Cette exercice montre qu'il est possible de prolonger m en une mesure sur $\mathcal{F}$.

Pour $\mathrm{A} \subset \Omega$ on pose

$$m^*(\mathrm{A}) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n), (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0, \mathrm{A} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\}.$$

1. Montrer que m^* vérifie les 3 propriétés suivantes :
   — $m^*(\emptyset) = 0$,
   — (monotonie de m^*) pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow m^*(\mathrm{A}) \le m^*(\mathrm{B})$,
   — (σ-sous-additivité de m^*) pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(\mathrm{A}_n)$.

   N.B. : On dit que m^* est une mesure extérieure.

   Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

   On dit que A est m^*-mesurable si on a, pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\Omega)$, $m^*(\mathrm{E}) = m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c)$.

   On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties de E m^*-mesurables.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que A est m^*-mesurable si et seulement si on a, pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $m^*(\mathrm{E}) < +\infty$, $m^*(\mathrm{E}) \ge m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + m^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c)$.
3. Montrer que $\mathcal{M}$ est une algèbre. [On montrera que $\Omega \in \mathcal{M}$, puis que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c \in \mathcal{M}$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}$.]
4. Montrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre. [On pourra montrer, par exemple, que $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable.]
5. Montrer que la restriction de m^* à $\mathcal{M}$ est une mesure.
6. Montrer que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ et que $m^* = m$ sur $\mathcal{F}_0$. En déduire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ et que la restriction de m^* à $\mathcal{F}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ prolongeant m.

Exercice 2.24 (Un pas vers l'unicité d'une mesure) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathcal{F}$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(\mathrm{A}) = \mu_2(\mathrm{A}) < +\infty$. On pose $\mathcal{L} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mu_2(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{L}$ et $\mathrm{B} \setminus \mathrm{C} \in \mathcal{L}$ si $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{L}$ avec $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$).

Corrigé – *Soit* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{L}$. *On pose* $\mathrm{B} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{B}_n$. *On veut montrer que* $\mathrm{B} \in \mathcal{L}$. *On remarque d'abord que* $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ *(par stabilité de* $\mathcal{F}$ *par* *union dénombrable). Puis, comme* $A \cap B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A\cap B_n)$ *et que* $\mu_1(A\cap B_n) = \mu_2(A\cap B_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la continuité croissante de* μ_1 *et* μ_2 *donne que* $\mu_1(A\cap B) = \mu_2(A\cap B)$*. On a donc* $B \in \mathcal{L}$ *et ceci montre la stabilité de* $\mathcal{L}$ *par union dénombrable croissante.*

On a bien $\Omega \in \mathcal{L}$ *car* $\mu_1(A\cap\Omega) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \mu_2(A\cap\Omega)$.

On montre maintenant la troisième propriété. Soit $B, C \in \mathcal{L}$ *avec* $C \subset B$*. On veut montrer que* $B \setminus C \in \mathcal{L}$*. On remarque d'abord que* $B\setminus C = B\cap C^c \in \mathcal{F}$ *par stabilité de* $\mathcal{F}$ *par passage au complémentaire et par intersection.*

Puis, on a $A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C)$*. Comme* $\mu_1(A) < +\infty$ *et* $\mu_2(A) < +\infty$ *on a aussi* $\mu_1(A\cap C) < +\infty$ *et* $\mu_2(A\cap C) < +\infty$ *et donc*

$$\mu_1((A\cap B)\setminus(A\cap C)) = \mu_1(A\cap B) - \mu_1(A\cap C),$$
$$\mu_2((A\cap B)\setminus(A\cap C)) = \mu_2(A\cap B) - \mu_2(A\cap C).$$

Comme $B, C \in \mathcal{L}$*, on en déduit que* $\mu_1((A\cap B)\setminus(A\cap C)) = \mu_2((A\cap B)\setminus(A\cap C))$ *et donc*

$$\mu_1(A\cap(B\setminus C)) = \mu_2(A\cap(B\setminus C)).$$

Ceci montre que $B\setminus C \in \mathcal{L}$ *et termine la démonstration du fait que* $\mathcal{L}$ *est un* λ*-système.*

Exercice 2.25 (Mesure atomique, mesure diffuse) Soit (E, T) un espace mesurable tel que $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique s'il existe $S \in T$ tel que $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]

   Corrigé – *Soit m une mesure purement atomique et soit* $S \in T$ *tel que* $m(S^c) = 0$ *et* $m(\{x\}) > 0$ *si* $x \in S$*. Si m est diffuse, on a* $m(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in E$*, donc* $S = \emptyset$ *et* $m = 0$.

   On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$*, on note* δ_a *la mesure de Dirac sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On a donc, pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* $\delta_a(B) = 1$ *si* $a \in B$ *et* $\delta_a(B) = 0$ *si* $a \notin B$*. La mesure* δ_a *est (pour tout* $a \in \mathbb{R}$*) purement atomique, il suffit de prendre* $S = \{a\}$*, on a bien* $\delta_a(S^c) = 0$ *et* $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.

   Un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est donné par la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

   Corrigé – *Soit* A *une partie dénombrable de* E*. Il existe donc une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ *telle que* $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$*. On a donc* $A \in T$ *(car* $\{x_n\} \in T$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que* T *est stable par union dénombrable) et* $m(A) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = 0$ *car m est diffuse.*

3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_n$ et $m(\mathrm{E}_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés "atomes" de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $\mathrm{A}_{n,k} = \{x \in \mathrm{E}_n;\ m(x) \geq \frac{1}{k}\}$.]

Corrigé – *On pose* $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E};\ m(\{x\}) > 0\}$. *Si* $x \in \mathrm{A}$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in \mathrm{E}_n$ *et il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m(\{x\}) \geq \frac{1}{k}$. *On a donc* $x \in \mathrm{A}_{n,k}$. *Ceci montre que* $\mathrm{A} = \bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_{n,k}$. *Pour montrer que* A *est au plus dénombrable, il suffit de montrer que* $\mathrm{A}_{n,k}$ *est au plus dénombrable (car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Soit donc* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $x_1, \ldots, x_p$ *p éléments distincts de* $\mathrm{A}_{n,k}$. *Par monotonie et additivité de m, on a* $\frac{p}{k} \leq \sum_{n=1}^{p} m(\{x_n\}) = m(\{x_1, \ldots, x_p\}) \leq m(\mathrm{E}_n) < +\infty$. *On en déduit que* $p \leq km(\mathrm{E}_n) < +\infty$ *et donc que* $\mathrm{A}_{n,k}$ *a un nombre fini d'éléments (ce nombre est inférieur ou égal à* $km(\mathrm{E}_n)$*). On en déduit donc que* A *est au plus dénombrable.*

(b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m_d(\mathrm{A}) = 0$ et $m_a(\mathrm{A}^c) = 0$.

Corrigé – *On considère toujours* $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E};\ m(\{x\}) > 0\}$. *On remarque tout d'abord que* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *(car* A *est au plus dénombrable, d'après la question précédente, et que les singletons, c'est-à-dire les parties réduites à un seul élément, sont dans* T*). On pose alors, pour tout* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *:*

$$m_a(\mathrm{B}) = m(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}), \ \ m_d(\mathrm{B}) = m(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^c).$$

Il est facile de voir que m_d *et* m_a *sont des mesures sur* T *et que, par additivité de m, on a bien* $m = m_a + m_d$.

La mesure m_d *est diffuse car, si* $x \in \mathrm{E}$, *on a* $m_d(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$ *(car* A *contient tous les points tels que* $m(\{x\}) > 0$*) et* $m_d(\{x\}) = m(\emptyset) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *(car* $\{x\} \cap \mathrm{A}^c = \emptyset$*).*

La mesure m_a *est purement atomique. Il suffit de prendre* $\mathrm{S} = \mathrm{A}$, *on a bien* $m_a(\mathrm{S}^c) = m(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{A}) = 0$ *et* $m_a(\{x\}) = m(\{x\}) > 0$ *si* $x \in \mathrm{S} = \mathrm{A}$.

Enfin, m_a *et* m_d *sont étrangères car* $m_d(\mathrm{A}) = 0$ *et* $m_a(\mathrm{A}^c) = 0$.

(c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

Corrigé – *On suppose que m est finie. Soit* $\mathrm{M} = \sup\{m(\{x\}),\ x \in \mathrm{E}\}$. *On veut montrer qu'il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{M} = m(\{x\})$. *On suppose* $\mathrm{M} > 0$ *(sinon, il suffit de prendre n'importe quel* $x \in \mathrm{E}$ *pour avoir* $m(\{x\}) = \mathrm{M}$*). On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que* $m(\{x\}) < \mathrm{M}$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Par définition de* M, *Il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ *tel que* $m(\{x_n\}) \to \mathrm{M}$ *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $m(\{x_n\}) < \mathrm{M}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on peut même supposer (quitte à extraire* *une sous-suite) que* $m(\{x_n\}) < m(\{x_{n+1}\}) < \mathrm{M}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut aussi supposer que* $m(\{x_0\}) > \frac{\mathrm{M}}{2}$*. Les points* x_n *sont alors tous distincts, ce qui donne* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = m(\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}) \leq m(\mathrm{E})$*. Ceci est impossible car* $m(\mathrm{E}) < +\infty$ *et* $m(\{x_n\}) > \frac{\mathrm{M}}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = +\infty$*).*

Exemple de mesure σ*-finie pour laquelle* M *n'est pas atteint.*

Sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on définit* m *par* $m(\mathrm{B}) = \sum_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{n})\delta_n(\mathrm{B})$ *(où* δ_n *est la mesure de Dirac au point* $n \in \mathbb{N}$*, définie en* (2.2)*).*

Pour montrer que m *est une mesure, on peut remarquer, en posant* $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}\,;\ n \geq 2\}$*, que* $m(\mathrm{B}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2;n\in\mathrm{B}}(1-\frac{1}{n})$*. Si* $\mathrm{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$ *avec* $\mathrm{B}_p \cap \mathrm{B}_q = \emptyset$ *si* $p \neq q$*, on a*

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} m(\mathrm{B}_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_2;n\in\mathrm{B}_p} (1-\frac{1}{n}) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N};n\in\mathrm{B}_p} (1-\frac{1}{n})$$

(on utilise ici le lemme 2.38 page 58). Comme les B_p *sont disjoints deux à deux,* n *appartient à* B_p *pour au plus 1* p*, et comme* $\mathrm{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$*, on obtient*

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N};n\in\mathrm{B}_p} (1-\frac{1}{n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N};n\in\mathrm{B}} (1-\frac{1}{n}) = m(\mathrm{B}).$$

Ceci prouve la σ*-additivité de* m*. Le fait que* $m(\emptyset) = 0$ *est immédiat. On a donc bien montré que* m *est une mesure.*

La mesure m *est bien* σ*-finie, il suffit de remarquer que* $m([-n,n]) < +\infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que* $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$*. enfin, pour cette mesure* m*, on a* $\mathrm{M} = \sup\{m(\{x\}),\ x \in \mathrm{E}\} = 1$ *et il n'existe pas de* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $m(\{x\}) = 1$*. En fait,* m *est purement atomique car* $m((\mathbb{N}_2)^c) = 0$ *et on a* $0 < m(\{x\})$*, pour tout* $x \in \mathbb{N}_2$*.*

4. Pour $(\mathrm{E},\mathrm{T}) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

   Corrigé – *Un tel exemple est obtenu en modifiant légèrement la mesure construite à la question précédente. Sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *on définit* m *par* $m(\mathrm{B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\delta_n(\mathrm{B})$*. Une démonstration analogue à celle faite à la question précédente montre que* m *est bien une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* m *est finie (on a* $m(\mathbb{R}) = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$*), et* m *est atomique car* $m((\mathbb{N}^*)^c) = 0$ *et* $0 < m(\{x\}) < 1$*, pour tout* $x \in \mathbb{N}^*$*. L'ensemble des atomes de* m *est infini, c'est* $\mathbb{N}^*$*.*

Exercice 2.26 (Limites sup et inf d'ensembles) *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$*. On rappelle que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p \ \textit{et}\ \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p.$$

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $m(\bigcup_{p\geq n_0} \mathrm{A}_p) < +\infty$*. Montrer que*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) \leq m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n).$$

Corrigé – • *La propriété de continuité croissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne :*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} A_p).$$

La monotonie de m donne $m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq m(A_q)$ *pour tout* $q \geq n$. *On a donc* $m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq \inf_{p\geq n} m(A_p)$ *et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} m(A_p)),$$

soit encore

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(A_n).$$

- *De* $\inf_{p\geq n} m(A_p) \leq \sup_{p\geq n} m(A_p)$, *on déduit*

$$\liminf_{n\to+\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n).$$

- *Comme il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $m(\bigcup_{p\geq n_0} A_p) < +\infty$, *la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne*

$$m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} A_p).$$

La monotonie de m donne $m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq m(A_q)$ *pour tout* $q \geq n$. *On a donc*

$$m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq \sup_{p\geq n} m(A_p)$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq \lim_{n\to+\infty} (\sup_{p\geq n} m(A_p))$, *c'est-à-dire*

$$m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n).$$

2. *Donner un exemple (c'est-à-dire choisir* (E, T, m) *et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$*) pour lequel :*

$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé – *On prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $A_n = [n, n+1[$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On obtient alors :*

$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) = 1 > 0 = m(\emptyset) = m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

3. *Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire* $m(E) < +\infty$*) pour lequel*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) < \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé – *On prend* $(E, T, m) = ([0, 4], \mathcal{B}([0, 4]), \lambda)$ *(plus précisément,* λ *est ici la restriction à* $\mathcal{B}([0, 4])$ *de* λ *qui est une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $A_{2n} = [0, 2]$, $A_{2n+1} =$

$[1,4]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On obtient* $\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = [0,4]$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = [1,2]$. *On a ainsi :*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) = 1, \qquad \liminf_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) = 2,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_n) = 3, \qquad m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) = 4.$$

4. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$. *Montrer que* $m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) = 0$.

Corrigé – *De* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$ *on déduit* $\sum_{p=n}^{+\infty} m(\mathrm{A}_p) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc* $m(\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *(car, par σ-sous additivité de m, on a* $m(\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} m(\mathrm{A}_p)$*).*
Par continuité décroissante de m, on en déduit alors $m(\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n) = 0$.

Exercice 2.27 (Petit ouvert dense…) On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{\mathrm{A}} = \mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $|x - a| < \varepsilon$.]

Corrigé – *La réponse est oui…. Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable, il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, *bijective. On considère alors* $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$. O *est bien un ouvert (comme réunion d'ouverts), dense dans* $\mathbb{R}$ *(car* $\mathrm{O} \supset \mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*) et, par σ-sous additivité d'une mesure, on a* $\lambda(\mathrm{O}) \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$.

Exercice 2.28 (Non existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$)

On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: $x\mathrm{R}y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $\mathrm{A} \subset [0,1[$ tel que A contienne un élément et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $\mathrm{A}_q = \{y \in [0,1[; y = x + q \text{ ou } y = x + q - 1, x \in \mathrm{A}\}$, c'est-à-dire $\mathrm{A}_q = \{y \in [0,1[\,;\, y - q \in \mathrm{A} \text{ ou } y - q + 1 \in \mathrm{A}\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \mathrm{A}_q = [0,1[$.

Corrigé – *Soit* $y \in [0,1[$, *il existe* $x \in \mathrm{A}$ *tel que* $y\mathrm{R}x$ *(car* A *contient un élément dans chaque classe d'équivalence), c'est-à-dire* $y - x \in \mathbb{Q}$. *Comme* $y - x \in]-1,1[$ *(car* $x, y \in [0,1[$*), on a donc* $y - x = q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ *ou* $y - x + 1 = q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. *Ceci donne* $y \in \mathrm{A}_q$. *On a donc* $[0,1[\subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \mathrm{A}_q$. *Comme* $\mathrm{A}_q \subset [0,1[$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, *on a finalement* $[0,1[= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \mathrm{A}_q$.

Il est important aussi de remarquer que les A_q *sont disjoints deux à deux. En effet, si* $y \in \mathrm{A}_q \cap \mathrm{A}_{q'}$, *il existe* $x, x' \in \mathrm{A}$ *tels que* $y - x = q$ *ou* $(q - 1)$ *et* $y - x' = q'$ *ou* $(q' - 1)$. *On en déduit* $x - x' \in \mathbb{Q}$ *et donc* $x = x'$ *(car* A *contient un seul élément de chaque classe d'équivalence). Ceci donne* $q = q' = y - x$ *(si* $y - x \in [0,1[$*) ou* $q = q' = y - x + 1$ *(si* $y - x \in]-1,0[$*).*

2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En particulier, montrer que l'application λ^*, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On suppose que m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant $m([0,1[) = 1$. La σ- additivité de m donne alors, avec la première question,*

$$1 = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q). \tag{2.24}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $B + x = \{y + x,\ y \in B\}$. On suppose que m est invariante par translation, on a donc $m(B + x) = m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $A_q = ((A + q) \cap [0,1[) \cup ((A + q - 1) \cap [0,1[)$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. De plus, si $y \in ((A+q) \cap [0,1[) \cap ((A+q-1) \cap [0,1[)$, il existe $x, x' \in A$ tels que $y = x + q = x' + q - 1$, donc $x' - x = 1$, ce qui est impossible. Ceci montre que $((A + q) \cap [0,1[) \cap ((A + q - 1) \cap [0,1[) = \emptyset$. On a donc, en utilisant l'additivité de m, l'invariance par translation de m et le fait que $A + q \subset [0,2[$, $m(A_q) = m((A+q) \cap [0,1[) + m((A+q-1) \cap [0,1[) = m((A+q) \cap [0,1[) + m((A+q) \cap [1,2[) = m(A + q) = m(A)$, pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. On en déduit $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) = 0$ si $m(A) = 0$ et $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) = +\infty$ si $m(A) > 0$, et donc $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m(A_q) \neq 1$, en contradiction avec (2.24). Il n'existe donc pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([0,1[) = 1$.

Si m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On montre que $m[0,1[= 1$ en utilisant la continuité croissante de m et le fait que $[0,1[= \bigcup_{n \geq 1} [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Il est donc impossible de trouver une telle mesure.

L'application λ^* définie en cours sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est invariante par translation et vérifie $\lambda^*([a,b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Elle n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.32 (Ensemble de Cantor)

On considère l'espace mesuré $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. On pose $C_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \geq 0$, on construit $C_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $C_n = \bigcup_{p=1}^{2^n}[a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $C_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}}[a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1,\ldots,2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n\alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$ (C s'appelle ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $C_{n+1} \subset C_n$.

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, la longueur de l'intervalle $[a_p^n, b_p^n]$ est α_n. Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$ et que $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, on a $[a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}] \subset [a_p^n, b_p^n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n\}$. En prenant l'union sur $p \in \{1,\ldots,2^n\}$, on en déduit $C_{n+1} \subset C_n$.*

2. Montrer que C est compact et $\mathring{C} = \emptyset$.

Corrigé – *L'ensemble C est fermé (dans $\mathbb{R}$) car c'est une intersection de fermés (chaque C_n est fermé). D'autre part $C \subset [0,1]$, C est donc compact (car fermé et borné dans $\mathbb{R}$).*

Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$, on a toujours $b_p^n < a_{p+1}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,\ldots,2^n - 1\}$). Les intervalles composant C_n sont donc disjoints deux à deux et de longueur α_n. Ceci montre que $x,y \in [0,1]$, $(y-x) > \alpha_n$ implique $]x,y[\not\subset C_n$. Comme $\alpha_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ (noter que $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$), on en déduit que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ ne contient aucun intervalle ouvert (non vide) et donc que $\mathring{C} = \emptyset$.

3. Montrer que C est non dénombrable.

Corrigé – *On commence par définir, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, des points x_c pour $c \in \{1,2\}^n$.*

Pour $n = 1$, $x_{(1)} = a_1^0$ et $x_{(2)} = b_1^0$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que x_c est construit pour tout $c \in \{1,2\}^n$ et que pour chaque $c \in \{1,2\}^n$, $x_c \in \{b_p^{n-1}, p = 1,\ldots,2^{n-1}\} \cup \{a_p^{n-1}, p = 1,\ldots,2^{n-1}\}$. On construit maintenant x_c pour $c \in \{1,2\}^{n+1}$. Soit donc $c \in \{1,2\}^{n+1}$, on pose $c = \{\overline{c}, b\}$ avec $\overline{c} \in \{1,2\}^n$ et $d \in \{1,2\}$ et on distingue 4 cas :

(a) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p}^n$,

(b) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p}^n$,

(c) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p-1}^n$,

(d) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1,\ldots,2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p-1}^n$.

Il est intéressant de noter, avec ces formules, que $|x_c - x_{\bar{c}}| \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que $x_c \in \mathrm{C}$.

On note S *l'ensemble des suites indexées par* $\mathbb{N}^*$*, prenant leurs valeurs dans* $\{1,2\}$*. Si* $c \in \mathrm{S}$*, on note* c_n *l'élément de* $\{1,2\}^n$ *formé par les* n *premiers termes de la suite et on note* $x_n = x_{c_n}$*. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy (car* $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$*) et incluse dans* C*, elle converge donc vers un point* $x_c \in \mathrm{C}$*. On remarque que si* c *et* c' *sont deux suites différentes, alors* $x_c \neq x_{c'}$*. En effet soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $c_n = c'_n$ *et* $c_{n+1} \neq c'_{n+1}$*, on alors* $|x_{c_m} - x_{c'_m}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$ *pour tout* $m > n$ *et donc, en passant à la limite quand* $m \to +\infty$*,* $|x_c - x_{c'}| \geq (1-\rho_n)\alpha_n$*, ce qui donne* $x_c \neq x_{c'}$*. L'application* $c \mapsto x_c$ *est donc une injection de* S *dans* C*. Ceci montre que* C *est infini non dénombrable (car* S *est infini non dénombrable).*

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(\mathrm{C}) = 0$. En déduire que si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

Corrigé – *La construction des points* a_p^n *et* b_p^n *donne*

$$\lambda([a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}]) = 2\alpha_{n+1} = \rho_n\alpha_n = \rho_n\lambda([a_p^n, b_p^n]).$$

En prenant l'union sur $p \in \{1,\ldots,2^n\}$*, on en déduit* $\lambda(\mathrm{C}_{n+1}) = \rho_n\lambda(\mathrm{C}_n)$*.*

Si ρ_n *ne dépend pas de* n*, c'est-à-dire* $\rho_n = \rho$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 < \rho < 1$*, on a donc* $\lambda(\mathrm{C}_{n+1}) = \rho\lambda(\mathrm{C}_n)$*. Ceci donne, comme* $\lambda(\mathrm{C}_0) = 1$*,* $\lambda(\mathrm{C}_n) = \rho^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Par continuité décroissante de* λ*, on en déduit* $\lambda(\mathrm{C}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(\mathrm{C}_n) = 0$*.*

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0} \subset]0,1[$ telle que $\lambda(\mathrm{C}) = \epsilon$.

Corrigé – *Soit* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]\varepsilon, 1]$ *telle que* $\varepsilon_0 = 1$*,* $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon_n \to \varepsilon$ *quand* $n \to +\infty$ *(on peut prendre, par exemple,* $\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{1-\varepsilon}{n+1}$*).*

On prend $\rho_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On a bien* $0 < \rho_n < 1$ *et, comme* $\lambda(\mathrm{C}_{n+1}) = \rho_n\lambda(\mathrm{C}_n)$ *(ceci a été démontré à la question précédente), on a donc* $\lambda(\mathrm{C}_n) = \varepsilon_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Par continuité décroissante de* λ*, on en déduit* $\lambda(\mathrm{C}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(\mathrm{C}_n) = \varepsilon$*.*

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ tel que $\lambda(\mathrm{A}) = 0$, alors $f(\mathrm{A})$ est un compact de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(f(\mathrm{A})) = 0$.

Corrigé – *Comme* f *est continue,* f *transforme les compacts en compacts. Donc,* $f(\mathrm{A})$ *est bien un compact de* $\mathbb{R}$ *(et donc appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

On montre maintenant que $\lambda(f(\mathrm{A})) = 0$*.*

Soit $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$ *tel que* $|f(y) - f(x)| \leq \mathrm{L}|y-x|$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$*. On commence par montrer un petit résultat préliminaire. Soit* $\mathrm{I} = [a,b]$ *un intervalle fermé de* $[0,1]$ *(*I *est donc compact). Comme* f *est continue sur* $[a,b]$*, il existe* $x, y \in [a,b]$ *tels que* $f(x) = m = \min\{f(z),\ z \in [a,b]\}$ *et* $f(y) = \mathrm{M} = \max\{f(z),\ z \in [a,b]\}$*. On a donc* $f(\mathrm{I}) \subset [m, \mathrm{M}]$ *(en fait,* $f(\mathrm{I}) = [m,\mathrm{M}]$*), d'où :*

$$\lambda(f(\mathrm{I})) \leq \mathrm{M} - m = f(y) - f(x) \leq \mathrm{L}|y-x| = \mathrm{L}\lambda(\mathrm{I}). \qquad (2.27)$$

Soit $\eta > 0$. *Comme* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *d'après la régularité de* λ *(voir le théorème 2.43), il existe* O, *ouvert de* $\mathbb{R}$, *tel que* $A \subset O$ *et* $\lambda(0) \le \eta$. *D'après le lemme 2.44 page 65,* O *est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux. En prenant éventuellement la restriction à* $[0,1]$ *de ces intervalles, on obtient donc une famille dénombrable, notée* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *d'intervalles inclus dans* $[0,1]$, *disjoints deux à deux tels que* $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset O$. *On en déduit*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \le \eta \text{ et } f(A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(I_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(\bar{I}_n).$$

On a donc $\lambda(f(A)) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(\bar{I}_n))$. *En utilisant (2.27), on a donc*

$$\lambda(f(A)) \le L \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\bar{I}_n) = L \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \le L\eta.$$

Comme η *est arbitrairement petit, on a donc* $\lambda(f(A)) = 0$.

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que si A est un compact de $[0,1]$ tel que $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5).]

Corrigé – *On note* C *l'ensemble obtenu dans la question 4, c'est-à-dire avec* $\rho_n = \rho$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 < \rho < 1$ *(par exemple,* $\rho = \frac{2}{3}$*). On note* a_n^p, b_n^p, C_n *les points et ensembles utilisés pour construire* C *et on note aussi* $D = \{a_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{b_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$. *(Noter que* $D \subset C$.*)*

Soit $\varepsilon > 0$. *On note* $\tilde{C}$ *l'ensemble* C *obtenu à la question 5. On a donc* $\lambda(C) = \varepsilon$. *On note* $\tilde{a}_n^p$, $\tilde{b}_n^p$, $\tilde{C}_n$ *les points et ensembles utilisés pour construire* $\tilde{C}$ *et on note aussi*

$$\tilde{D} = \{\tilde{a}_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{\tilde{b}_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\}.$$

(Noter que $\tilde{D} \subset \tilde{C}$.*)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \{1,\ldots,2^n\}$. *On construit une fonction* f *sur l'intervalle* $[b_{2p-1}^{n+1}, a_{2p}^{n+1}]$ *en prenant* f *affine et telle que* $f(b_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{b}_{2p-1}^{n+1}$ *et* $f(a_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{a}_{2p-1}^{n+1}$. *On remarque que*

$$f : (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D \to (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$$

est strictement croissante. Comme $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)^c = C$ *et que* C *est d'intérieur vide,* f *est définie sur une partie dense de* $[0,1]$ *et, comme* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c)^c = \tilde{C}$ *et que* $\tilde{C}$ *est d'intérieur vide, l'image de* f *est dense dans* $[0,1]$.

Il est maintenant facile de définir f *par densité sur tout* $[0,1]$. *En effet, soit* $x \in [0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, *il existe une suite de points de* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, *notée* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *convergeant en croissant vers* x *et une suite de points de* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, *notée* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *convergeant en décroissant vers* x *(en fait, ces points peuvent même être pris dans* D*). Comme* f *et croissante, la suite* $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc en croissant vers un certain* $\gamma \in [0,1]$ *et la suite* $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers un certain* $\delta \in [0,1]$ *(la croissance de* f *donne aussi que ces limites ne dépendent que du choix* *de x et non du choix des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Comme f est croissante, on a $\gamma \leq \delta$ et comme l'image de f (définie pour l'instant seulement sur $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$) est dense dans $[0,1]$, on a nécessairement $\gamma = \delta$ (l'intervalle $[\gamma, \delta]$ ne rencontre pas l'image de f). On peut donc poser $f(x) = \gamma = \delta$.*

La fonction f est donc maintenant définie sur tout $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Elle est strictement croissante et son image est dense dans $[0,1]$, elle est donc continue (par le même raisonnement que celui fait pour définir $f(x)$ en tout point $x \in [0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$). Comme une application continue transforme un compact en compact, on a donc $f([0,1]) = [0,1]$ et ceci prouve en particulier que

$$f([0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D) = [0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$$

Comme $f(D) = \tilde{D}$, on a aussi $f(C) = \tilde{C}$. Pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$ et continue, on ajoute $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = 1$ pour $x > 1$. On a toujours $f(C) = \tilde{C}$. Ceci donne bien le résultat désiré car $\lambda(C) = 0$ et $\lambda(\tilde{C}) = \varepsilon > 0$.

Exercice 2.35 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T.

On pose

$$B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

(on rappelle que $A = \limsup_{n\to+\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.

   Corrigé – *Cette question a été traitée dans l'exercice 2.26, question 4.*

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $A_0, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

   Corrigé – *Comme cela a été vu à l'exercice 2.26, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne $p(A) = \lim_{n\to+\infty} p(B_n)$. Il suffit donc de montrer que $p(B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons d'abord qu'iil existe $k \geq n$ tel que $p(A_k) = 1$. On a alors, par monotonie de p, que $p(B_n) \geq p(A_k) = 1$ et donc $p(B_n) = 1$. On suppose maintenant que $p(A_k) < 1$ pour tout $k \geq n$. Comme $B_n^c = \bigcap_{k\geq n} A_k^c$, la continuité décroissante de p et l'indépendance des A_k donne :

   $$p(B_n^c) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m} p(A_k^c) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k)).$$

   Comme $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (ou, de manière équivalente, $\ln(u) \leq u - 1$ pour tout $u > 0$, ceci est une conséquence, par exemple, de la concavité de la fonction $\ln$), on a, pour $m > n$:

   $$\ln\Big(\prod_{k=n}^{m}(1 - p(A_k))\Big) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - p(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{m} p(A_k).$$

   De l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$, on déduit

   $$\lim_{m\to+\infty} \ln\Big(\prod_{k=n}^{m}(1 - p(A_k))\Big) = -\infty,$$

   et donc $p(B_n^c) = 0$. Ceci donne bien $p(B_n) = 1$ et termine la démonstration.

Chapitre 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale des fonctions réglées, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E, T). Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de suite de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités : c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa loi de probabilité) que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé (E, T, p) restant souvent mal connu.

Remarque 3.1

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (et à la notion de convergence croissante) et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir la définition 3.2).
2. On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble F muni d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant $\emptyset$ et F, stable par union

(quelconque) et stable par intersection finie. On rappelle aussi que, dans un espace topologique, $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$, signifie que, pour tout O ouvert contenant x, il existe n_0 tel que $x_n \in$ O pour tout $n \geq n_0$.

3. Soit F un espace topologique et G ⊂ F. On appelle topologie trace sur G la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si O ⊂ G, O est un ouvert de G si et seulement s'il existe U ouvert de F tel que O = U ∩ G. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire G ∈ $\mathcal{B}$(F), $\mathcal{B}$(F) étant la tribu engendrée par les ouverts de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathrm{G}) = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{G};\ \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$, ceci est démontré dans l'exercice 2.3 page 75.
4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de F = $\mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a,b) = |b-a|$.

Définition 3.2 (Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

1. *Soit* $\mathrm{O} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. O *est un ouvert si pour tout* $a \in$ O *on a :*
   (a) *Si* $0 < a < +\infty$, *alors il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset \mathrm{O}$,
   (b) *si* $a = 0$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $[0,\alpha[\subset \mathrm{O}$,
   (c) *si* $a = +\infty$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $]\alpha, +\infty] \subset \mathrm{O}$.
2. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *est la tribu (sur* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) engendrée par les ouverts de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Soit* $\mathrm{B} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, *on peut montrer (voir la remarque 3.3 ci après) que* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *si et seulement si* $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(*$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est la tribu de Borel sur* $\mathbb{R}$*).*

Remarque 3.3 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$)

1. La topologie sur $\mathbb{R}_+$ est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ (la démonstration de ce résultat est un exercice de topologie, exercice 3.4). L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est donc égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et c'est aussi l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir la remarque 3.1). On remarque aussi que $\{+\infty\} \in \mathrm{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (car $\{+\infty\}$ est, par exemple, une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$). On en déduit que, si $\mathrm{B} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} = \mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+$).
2. Soit $\mathrm{A} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, A est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou A = B ∪ $\{+\infty\}$, avec $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to +\infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to +\infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe n_0 tel que $x_n \in]\alpha, +\infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers $+\infty$).

4. On peut aussi montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty]; a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a, +\infty[\cap\mathbb{R}_+; a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $\mathrm{T}(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$). Voir à ce propos les exercices 3.13 et 3.14.

3.2 Fonctions étagées

Définition 3.4 (Fonction caractéristique d'un ensemble) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. *On appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble* A, *et on note* 1_A *(ou* χ_A*) la fonction définie par :* $1_\mathrm{A}(x) = 1$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $1_\mathrm{A}(x) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$.

Définition 3.5 (Fonction étagée) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f *est étagée (ou* T*-étagée) si* f *est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie* $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ *et* n *réels* $a_1, \ldots, a_n$ *tels que* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

2. On dit que f *est étagée positive si* f *est étagée et prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}_+$.

On note $\mathcal{E}$ *l'ensemble des fonctions étagées et* $\mathcal{E}_+$ *l'ensemble des fonctions étagées positives.*

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.6 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{T}$ *telle que* $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$, *pour tout* i, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, *et* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

DÉMONSTRATION – Soient $(\mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathrm{T}$, $(b_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{\mathrm{B}_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble $\mathrm{Im} f$ des valeurs prises par f est donc fini. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{Im} f \setminus \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ avec $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ et $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in \mathrm{E}; f(x) = 0\} = (\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i)^c$.) Il reste à montrer que $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\mathrm{I}_i = \{\mathrm{K} \subset \{1, \ldots, p\}\ ;\ a_i = \sum_{k \in \mathrm{K}} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{A}_i = \bigcup_{\mathrm{K} \in \mathrm{I}_i} \mathrm{C}_\mathrm{K}$, avec $\mathrm{C}_\mathrm{K} = \bigcap_{j=1}^{p} \mathrm{D}_j$, $\mathrm{D}_j = \mathrm{B}_j$ si $j \in \mathrm{K}$ et $\mathrm{D}_j = \mathrm{B}_j^c$ si $j \notin \mathrm{K}$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc trouvé la décomposition voulue de f. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$ et $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de f comme $\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i)$. En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction étagée avec une décomposition plus générale (non unique) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.7 *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive non nulle, telle que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } f = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{\mathrm{B}_i}$$

où $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$ *sont des réels strictement positifs,* $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ *et* $(\mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathrm{T}$ *sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ *et* $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(\mathrm{B}_j). \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION – On pose, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$, $\mathrm{C}_{ij} = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^{p} \mathrm{B}_j$, on écrit $\mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^{p} \mathrm{C}_{ij}$ et $\mathrm{B}_j = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{ij}$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i m(\mathrm{C}_{ij})$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} b_j m(\mathrm{B}_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_j m(\mathrm{C}_{ij})$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $\mathrm{C}_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

Lemme 3.8 (Décomposition d'une fonction étagée avec une partition) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}$ *une fonction étagée. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R} \times \mathrm{T}$ *telle que* $a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$, *pour tout* i, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, $\mathrm{E} = \bigcup_{i=0}^n \mathrm{A}_i$ *et* $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est très voisine de celle donnée pour la décomposition d'une fonction étagée positive (lemme 3.6). L'ensemble $\{a_i, i \in \{0, \ldots, n\}\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (et pas seulement les valeurs non nulles) et $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}\,; f(x) = a_i\}$. ∎

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.9 (Structure vectorielle de $\mathcal{E}$) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des fonctions étagées est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *De plus, si* $f, g \in \mathcal{E}$, *on a aussi* $fg \in \mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION – Soiet $f, g \in \mathcal{E}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition de f et g donnée dans le lemme 3.8. Elle donne $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ et $g = \sum_{j=0}^m b_j 1_{\mathrm{B}_i}$. Comme les familles $(\mathrm{A}_i)_{\{i \in \{0,\ldots,n\}\}}$ et $(\mathrm{B}_j)_{\{j \in \{0,\ldots,m\}\}}$ forment des partitions de E, on a

$$f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_j 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j},$$

de sorte que $\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha a_i + \beta b_i) 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j}$, ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

D'autre part, on remarque aussi que $fg = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$. ∎

On montrera aussi les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.3).

3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de passage à la limite pour définir l'intégrale de telles fonctions.

On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction f de E dans F. L'espace de départ, E, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, F, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont

$F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$). On peut aussi considérer le cas où F est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur F).

Définition 3.10 (Fonction mesurable) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* F *un ensemble muni d'une topologie (par exemple :* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). Une fonction* f*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* T*-mesurable si* $f^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{B}(F)$ *(ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(F)\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F); f^{-1}(B) \in T\}$ *contient* $\mathcal{B}(F)$*, voir l'exercice 2.4 sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*T*-mesurable".*

Plus généralement, si F *n'est pas muni d'une topologie (et donc de la tribu* $\mathcal{B}(F)$*) mais est muni directement d'une tribu* $\mathcal{T}$ *(on a alors deux espaces mesurables :* (E, T) *et* $(F, \mathcal{T})$*), une fonction* f*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* $(T, \mathcal{T})$*-mesurable si* $f^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{T}$*. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{T}\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F); f^{-1}(B) \in T\}$ *contient* $\mathcal{T}$*.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*$(T, \mathcal{T})$*-mesurable".*

Enfin, si E *et* F *sont deux espaces munis d'une topologie, on dit que* f *est borélienne si* f *est mesurable pour les tribus boréliennes sur* E *et* F *(c'est-à-dire les tribus engendrées par les ouverts) .*

Remarque 3.11 Une fonction étagée est toujours mesurable. En effet, soit (E, T) un espace mesurable et soit $f \in \mathcal{E}$ (donc f est une application de E dans $\mathbb{R}$). D'après le lemme 3.8, il existe une partition $(A_0, \dots, A_n)$ de E, et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$ et $A_i \in T$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(B) = \bigcup_{\{i; a_i \in B\}} A_i \in T$, ce qui prouve que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Noter que si $f \in \mathcal{E}_+$, on a donc aussi f mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir l'exercice 3.5).

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou "vecteur aléatoire" (selon l'espace d'arrivée) au lieu de "fonction mesurable" (ou "application mesurable").

Définition 3.12 (Variable aléatoire, vecteur aléatoire)

1. *Soit* (E, T) *un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) une fonction* X *définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et* T*-mesurable,i.e. telle que* $X^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. *Plus généralement, soient* (E, T) *et* $(F, \mathcal{T})$ *deux espaces probabilisables. Une fonction* X*, définie de* E *dans* F*, est une variable aléatoire si c'est une fonction* $(T, \mathcal{T})$-

mesurable (c'est-à-dire si $X^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{T}$*). Lorsque* F *est un espace vectoriel, on dit que* X *est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

Remarque 3.13 Comme cela a été dit dans la proposition 3.10, on dit, en l'absence d'ambiguïté, "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire" ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.12, on a noté X la variable aléatoire plutôt que f car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

Définition 3.14 (Tribu engendrée par une fonction mesurable) *Soient* (E, T) *un espace mesurable (resp. probabilisable) et* f *(resp.* X*) une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble* $\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *(resp.* $\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*) est une tribu sur* E *qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable* f *(resp. la variable aléatoire* X*). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par* f *(resp.* X*).*

Définition 3.15 (Espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, on note :*

— $\mathcal{M}(E, T) = \{f : E \to \mathbb{R}$*, mesurable*$\}$,

— $\mathcal{M}_+(E, T) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, mesurable*$\}$.

En l'absence d'ambiguïté, on notera $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E, T)$ *et* $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E, T)$.

Proposition 3.16 (Première caractérisation de la mesurabilité)

Soient (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \to F$*, avec* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. Soit* $\mathcal{C}$ *une partie de* $\mathcal{P}(F)$ *engendrant la tribu borélienne de* F*. On a alors :* f *est mesurable si et seulement* $f^{-1}(C) \in T$ *pour tout* $C \in \mathcal{C}$*. En particulier,* f *est mesurable si et seulement si* f *vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

1. $f^{-1}(]\alpha, \beta[) \in T$*, pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha < \beta$*,*
2. $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in T$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Dans cette caractérisation, l'ensemble $]\alpha, \beta[$ *(ou* $]\alpha, +\infty[$*) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de* F *appartenant à* $]\alpha, \beta[$ *(ou* $]\alpha, +\infty[$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus. Par exemple, soit f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la fonction f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in T$ pour tout $\alpha > 0$ (par contre, $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in T$ pour tout $\alpha \geq 0$ n'implique pas que f est mesurable).

La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir le chapitre suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.17 (Mesurabilité positive) *Soient* (E,T) *un espace mesurable et* $f : \mathrm{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$*, telle que :*

1. pour tout $x \in \mathrm{E}$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$,

2. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

Les deux conditions précédentes seront notées dans la suite sous la forme $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[).$$

Comme f_n est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la remarque 3.11), on a $f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in \mathrm{T}$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha,+\infty],\ \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{M}_+$. On va construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, \text{ avec } p \in \{0,\ldots,n2^n-1\} \\ n \text{ si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = n1_{\{x\in\mathrm{E};\, f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in\mathrm{E};\, f(x)\in[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\}}.$$

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, on a $\{x \in \mathrm{E};\ f(x) \geq n\} \in \mathrm{T}$ et $\{x \in \mathrm{E};\ f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\} \in \mathrm{T}$ pour tout n et tout p, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$. Soit $x \in \mathrm{E}$. On distingue deux cas :

Premier cas. On suppose $f(x) < +\infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

Deuxième cas. On suppose $f(x) = +\infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in \mathrm{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue trois cas :

Premier cas. On suppose $f(x) \geq n+1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$.

Deuxième cas. On suppose $n \le f(x) < n+1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1},\ldots,(n+1)2^{n+1}-1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}},\frac{i+1}{2^{n+1}}]$. On a alors $f_n(x) = n \le \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.
Troisième cas. On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0,\ldots,n2^n-1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[= [\frac{2p}{2^{n+1}},\frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}},\frac{2p+1}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}},\frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. ■

Proposition 3.18 (Mesurabilité sans signe) *Soient* (E,T) *un espace mesurable, et* $f : E \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f *est mesurable. Il existe alors une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *telle que, pour tout* $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – On définit la fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}_+$ par $f^+(x) = \max(f(x),0)$ pour tout $x \in E$. On remarque que $f^+ \in \mathcal{M}_+$ (et $f^+ \in \mathcal{M}$, voir l'exercice 3.5). En effet, f^+ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(f^+)^{-1}(]\alpha,+\infty]) = f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha,+\infty],\ \alpha > 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathcal{M}_+$. La proposition 3.17 donne l'existence de suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telles que $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to +\infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (voir la proposition 3.9 page 121), on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. ■

La proposition précédente nous donnera, avec les propriétés de stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ (voir la proposition 3.19) une deuxième caractérisation de la mesurabilité, voir la proposition 3.20.

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très stable, c'est-à-dire que des opérations usuelles (comme addition, multiplication, limite...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de $(E,T) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il est difficile de trouver des fonctions non mesurables (comme il est difficile de trouver des parties non boréliennes, bien que le cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit égal au cardinal de $\mathbb{R}$ et donc strictement inférieur au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). En pratique, on peut en gros supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables (bien qu'il y ait "beaucoup" de fonctions non mesurables).

Proposition 3.19 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit* (E,T) *un espace mesurable.*

1. Soit $I \subset \mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{I}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}$. *De même, si* $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}$.

2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\limsup_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.

   De même, si $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.

3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Alors* $f \in \mathcal{M}$.

4. $\mathcal{M}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et si* $f, g \in \mathcal{M}$, *alors* $fg \in \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Il est clair que $f = \sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Puis, Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$f^{-1}(]\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in \mathrm{T}.$$
   Comme $\{]\alpha, +\infty] \cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   De même la fonction $f = \inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est aussi bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (elle prend même ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ceci n'est pas vrai avec la fonction $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$). On remarque ensuite que
$$f^{-1}([-\infty, \alpha[) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}([-\infty, \alpha[) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   Comme $\{[-\infty, \alpha[\cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. La fonction $f = \sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ et que $\{]\alpha, +\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même, la fonction $f = \inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et que $\{]-\infty, \alpha[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose $f = \limsup_{n\to+\infty} f_n$, la fonction f est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a
$$f(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\sup_{p\geq n} f_p(x)) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{p\geq n} f_p(x)),$$

c'est-à-dire $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$. En utilisant les résultats précédents (avec sup puis inf), on a donc $f \in \mathcal{M}_+$. Un raisonnement similaire donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}_+$.

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. On suppose que

$$f = \limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$$

(qui est bien définie dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors remarquer que la fonction $\sup_{p\geq n} f_p$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, avec la propriété démontrée en 1, $\sup_{p\geq n} f_p \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, utilisant encore la propriété démontrée en 1, $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$. Un raisonnement analogue donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$ dès que l'on suppose que $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Cette question est immédiate grâce à la précédente. Il suffit de remarquer que dès que la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement égale à la limite supérieure (ou la limite inférieure) de cette même suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in \mathrm{E}$). Ici on remarque donc simplement que $f = \limsup_{n\to+\infty} f_n$ et on applique la propriété 2.
4. Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ On pose $h = \alpha f + \beta g$. D'après la proposition 3.18, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{E}$. La proposition 3.9 donne que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ (voir la remarque 3.11), la propriété 3 ci-dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

   Soit $f, g \in \mathcal{M}$. On pose $h = fg$. On raisonne comme ci-dessus, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $h_n = f_n g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{E}$. La proposition 3.9 donne aussi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$. La propriété 3 ci-dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. ■

Proposition 3.20 (Deuxième caractérisation de la mesurabilité) *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. *Alors,* f *est mesurable si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *telle que pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Cette caractérisation est donnée par la proposition 3.18 pour le sens "seulement si" et par la propriété 3 de la proposition 3.19 pour le sens "si". ■

On rappelle aussi qu'une fonction f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_+$) si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ (voir la proposition 3.17).

Remarque 3.21 Il est intéressant de remarquer que la proposition 3.20 peut être fausse si on prend pour F un espace topologique quelconque (elle reste vraie, par exemple, si F est un espace vectoriel normé de dimension finie) avec une définition immédiate de $\mathcal{E}$ généralisant celle donnée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 3.22 *Soient* E *un ensemble et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on pose :*

— $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,
— $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$,
— $|f|(x) = |f(x)|$.

Proposition 3.23 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}$. *On a alors* $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ *et* f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ est immédiat. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 3.18, que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ et donc que $f^+, f^- \in \mathcal{M}$ (voir l'exercice 3.5). La proposition 3.19 donne que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a donc $|f| \in \mathcal{M}$ et donc aussi $|f| \in \mathcal{M}_+$ car $|f| \geq 0$. ∎

3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes

Soit (E, T) et $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est $(\mathrm{F}, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) et f une fonction mesurable de E vers F. Si m est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de f et m, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

Proposition 3.24 (Mesure image) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* f *une fonction mesurable de* E *vers* F *(c'est-à-dire* $(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable). Alors, l'application* m_f *définie de* $\mathcal{T}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *par :* $m_f(\mathrm{A}) = m(f^{-1}(\mathrm{A}))$, *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$, *est une mesure sur* $\mathcal{T}$, *appelée mesure image par* f.

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que m_f est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que m_f est σ−additive, ce qui découle naturellement des propriétés de m. ∎

Définition 3.25 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.)

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de* E, *muni de la tribu* T, *dans* $\mathbb{R}$, *muni de la tribu borélienne). On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire* X *la probabilité* p_{X} *image de* p

par X *(cette probabilité est donc définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*). On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire* X *la fonction de répartition de la probabilité* p_X.

Un exemple simple de loi de probabilité est la loi uniforme sur $[0,1]$. Elle est définie par $p(A) = \lambda(A \cap [0,1])$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit X une v.a.r. (sur l'espace probabilisé (E, T, p)). On dit que $X \sim \mathcal{U}([0,1))]$ si $p_X = p$.

Si X et Y sont deux v.a.r. (sur des espaces probabilisés éventuellement différents), on dit que $X \sim Y$ si $p_X = p_Y$. Le sigle "$\sim$" signifie donc "a pour loi" ou "a même loi que".

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire. Une conséquence immédiate du théorème 2.61 est que la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par sa fonction de répartition. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 3.26 (Égalité de deux lois) *Soient* (E, T, p) *et* (F, S, q) *des espaces probabilisés,* X *une variable aléatoire réelle sur* E *(c'est-à-dire une fonction mesurable de* E*, muni de* T*, dans* $\mathbb{R}$ *muni de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* Y *une variable aléatoire réelle sur* F*. On note* p_X *et* p_Y *les lois de* X *et* Y*. On a alors* $p_X = p_Y$ *si et seulement si* $p(\{X \leq t\}) = q(\{Y \leq t\})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. On a aussi* $p_X = p_Y$ *si et seulement si* $p(\{s \leq X \leq t\}) = q(\{s \leq Y \leq t\})$ *pour tout* $s, t \in \mathbb{R}$*,* $s < t$*. (Les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges.)*

DÉMONSTRATION – Cette proposition est une conséquence des théorèmes 2.61 et 2.62. Il suffit de remarquer que $p(\{X \leq t\}) = p_X(]-\infty, t])$ et $p(\{s \leq X \leq t\}) = p_X([s,t])$ (et que l'on a des égalités analogues avec Y au lieu de X). ∎

On rappelle que la notation $p(\{X \leq t\})$ (si X est une v. a. réelle sur l'espace probabilisé (E, T, p)) signifie $p(\{\omega \in E\,;\, X(\omega) \leq t\})$. Cette notation sera parfois abrégée sous la forme $p(X \leq t)$.

Définition 3.27 (Variables aléatoires équidistribuées)

Soient (E, T, p) *et* (E', T', p') *des espaces probabilisés,* X *(resp.* X'*) une variable aléatoire de* (E, T, p) *(resp.* (E', T', p')*) dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, on dit que les variables aléatoires* X *et* X' *sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.*

Définition 3.28 (Variable aléatoire discrète, entière, continue) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* (E, T, p)*,* p_X *la loi de la variable aléatoire* X *et* F_X *sa fonction de répartition ;*

1. *Si* $X(E)$ *est dénombrable, on dit que la variable aléatoire* X *est discrète.*
2. *Si* $X(E) \subset \mathbb{N}$*, on dit que la variable aléatoire* X *est entière.*
3. *Si la fonction de répartition* F_X *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$ *est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

Définition 3.29 (Variables aléatoires indépendantes) *Soit* (E,T,p) *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $X_1,\ldots,X_N$ *une famille de variables aléatoires réelles. On dit que* $X_1,\ldots,X_N$ *sont indépendantes (ou que la famille (* $X_1,\ldots,X_N$*) est indépendante) si les tribus engendrées par* $X_1,\ldots,X_N$ *(on notera souvent* $\tau(X)$ *ou* $\sigma(X)$ *la tribu engendrée par la variable aléatoire* X*) sont indépendantes.*
2. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles. On dit cette suite est indépendante (ou que les v.a.* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *sont indépendantes) si, pour tout* $N > 1$*, les v.a.* $X_1, \ldots, X_N$ *sont indépendantes.*

On appellera “suite de v.a.r.i.i.d. ” une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (ce dernier point signifiant que toutes les v.a. de la suite ont même loi).

Soit (E,T,p) un espace probabilisé et X_1,X_2,X_3 trois v.a.r. (c'est-à-dire variables aléatoires réelles). Le fait que X_1 soit indépendante de X_2 et X_3 n'implique pas que X_1 soit indépendante de (par exemple) X_2+X_3, même si X_2 et X_3 sont indépendantes. Mais, on a bien X_1 indépendante de X_2+X_3 si la famille (X_1,X_2,X_3) est indépendante. Ceci est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3.30 (Indépendance et composition) *Soit* (E,T,p) *un espace probabilisé,* $n \geq 1$*,* $m \geq 1$ *et* $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ *des v.a.r. indépendantes. Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* ψ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors, les v.a.r.* $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ *et* $\psi(Y_1,\ldots,Y_m)$ *sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale de v.a.r. indépendantes en 2 groupes. la proposition peut se généraliser à une décomposition en un nombre quelconque de groupes.*

DÉMONSTRATION – La notation $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est un peu incorrecte (mais est toujours utilisée). Elle désigne (comme on le devine facilement) la composition de φ (qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) avec l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ donnée par les X_i, $i = 1,\ldots,n$.

La démonstration de cette proposition (et de sa généralisation à un nombre quelconque de groupes) est une conséquence simple de la proposition 2.59 dés que l'on remarque que la tribu engendrée par $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par les tribus $\sigma(X_1),\ldots,\sigma(X_n)$), ce que nous démontrons maintenant.

On note τ la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ et X l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\omega \in E$ associe $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))^t$. Il est facile de voir que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\}$ est une tribu (sur $\mathbb{R}^n$). Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i) \in \tau$$

(car $X_i^{-1}(A_i)$ appartient à $\tau(X_i)$ et donc à τ). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par l'ensemble des produits de boréliens de $\mathbb{R}$ (et même par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.7), on en déduit que

$$\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X^{-1}(A) \in \tau\} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \tau$ car $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (puisque φ est borélienne), ce qui prouve bien que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$. ■

Nous verrons au chapitre 7 la conséquence principale de l'indépendance. Cette conséquence est que, si X, Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple (X, Y) est le produit des lois P_X et P_Y (c'est-à-dire , avec les notations du Chapitre 7, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$). Une propriété analogue est vraie pour une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a.r. indépendantes.

Nous terminons ce paragraphe par un théorème très utile en probabilités sur la représentation d'une v.a. mesurable par rapport à une autre v.a..

Théorème 3.31 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)

Soient X *et* Y *deux v.a. réelles définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Alors, la v.a.* Y *est mesurable par rapport à la tribu engendrée par* X *(notée* $\tau(X)$*) si et seulement si il existe une fonction borélienne* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $Y = f(X)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 3.17. Il est intéressant de remarquer que la démonstration de ce théorème effectuée dans l'exercice 3.17 donne les informations complémentaires suivantes :

- Y est $\tau(X)$-mesurable bornée si et seulement s'il existe f borélienne bornée t.q. $Y = f(X)$,
- Y est $\tau(X)$-mesurable positive si et seulement s'il existe f borélienne positive t.q. $Y = f(X)$.

La partie "si" de ces deux résultats est immédiate. Pour la partie "seulement si", il suffit de remarquer que la démonstration faite dans l'exercice 3.17 donne f t.q.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(t),\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(Y) \cup \{0\}, \text{ avec } \mathrm{Im}(Y) = \{Y(\omega),\, \omega \in \Omega\}.$$

■

3.6 Exercices

Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables) Soient (E,T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\, f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ est une tribu.

   Corrigé – *Cette question est un cas particulier (avec* $\mathrm{F} = \mathbb{R}$*) de la question 2 de l'exercice 2.4.*

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est mesurable,

   (ii) $f^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathrm{T}$, pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$.

   Corrigé – *On remarque que f mesurable signifie simplement que* T_f *(définie à la question précédente) contient* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

   Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

   Pour le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque que T_f *est une tribu. Donc, si* T_f *contient* $\mathcal{C}$*, on a aussi* T_f *contient* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Ceci donne f mesurable. Donc, on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i)*

Exercice 3.2 (Mesurabilité pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur Ω. Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

1. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *On pose* $\mathcal{C} = \{]-\infty, x[,\, x \in \mathbb{R}\}$*. Compte tenu de la proposition 3.16 (voir aussi l'exercice 3.1), il suffit de montrer que* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

   Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont des ouverts, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

   Pour montrer l'inclusion inverse, on commence par remarquer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a (grâce aux propriétés de stabilité d'une tribu) $[a,b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a[\in \mathrm{T}(\mathcal{C})$*, puis* $]a,b[= \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}[a+(1/n), b[\in \mathrm{T}(\mathcal{C})$*. Puis, comme tout ouvert est une union au plus dénombrable d'intrevalles ouverts bornés (voir le lemme 2.11), on en déduit que* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ *contient tous les ouverts et donc* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Finalement, on a bien* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

2. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *On pose ici* $\mathcal{D} = \{]-\infty, x],\, x \in \mathbb{R}\}$*. Compte tenu de proposition 3.16, il suffit de montrer que* $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

   Comme les éléments de $\mathcal{D}$ sont des fermés, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Pour montrer l'inclusion inverse, on remarque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $]-\infty, x[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty, x-(1/n)]$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$ (où $\mathcal{C}$ est l'ensemble défini à la question précédente). On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$. Finalement, on a donc bien $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.3 (Composition de fonctions mesurables) Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\varphi : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Corrigé – *Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathrm{B}))$. Comme $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{S}$ car φ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathrm{B})) \in \mathrm{T}$ car f est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).*

Exercice 3.4 (Topologie de $\mathbb{R}_+$) On définit la topologie de $\mathbb{R}_+$ comme étant la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}_+$, l'ensemble O est donc un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{O} = \mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+$.

1. Soit $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\mathrm{O} = \mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+$. (Ceci montre que la topologie de $\mathbb{R}_+$ est aussi la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.)
2. Montrer que L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et est aussi égal à l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que, si $\mathrm{B} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} = \mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+$).

Exercice 3.5 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \ldots$) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

Corrigé – *On suppose φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a donc $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la définition 3.2 page 118). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) = \varphi^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne donc que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*

Réciproquement, on suppose maintenant φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (mais φ ne prend jamais la valeur $+\infty$, on peut donc la considérer comme étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a aussi $\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Comme φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on en déduit que $\varphi^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\varphi \geq 0$, on a $\varphi^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+) = \varphi^{-1}(\mathrm{B})$ et donc $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci prouve que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.6 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E, T), $(\mathrm{E}', \mathrm{T}')$, $(\mathrm{E}'', \mathrm{T}'')$ des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E′ (resp. de E′ dans E″). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E″.

   Corrigé – *Cette question est identique à celle de l'exercice 3.3 avec* E″ *au lieu de* $\mathbb{R}$. *La démonstration est semblable :*

   Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{T}''$, *on remarque que* $(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$. *Comme* $g^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}'$ *car* g *est mesurable (de* E′ *dans* E″*), on a donc* $f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B})) \in \mathrm{T}$ *car* f *est mesurable (de* E *dans* E′*). Ceci montre bien que* $g \circ f$ *est mesurable (de* E *dans* E″*).*

2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   (a) Pour $x \in \mathrm{E}$ on pose $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Montrer que f^+ et f^- sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *Cette question est démontrée dans la proposition 3.23 page 128.*

   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *Le fait que* $f + g$, $fg \in \mathcal{M}$ *est démontré dans la proposition 3.19 et le fait que* $|f| \in \mathcal{M}$ *est démontré dans la proposition 3.23 (car* $|f|$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $|f| \in \mathcal{M}_+$, *on conclut avec l'exercice 3.5.*

3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in \mathrm{E}$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *La démonstration de cette question est donnée dans la proposition 3.19 page 125 (propriété 3).*

4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{B} \notin \mathrm{T}$. Montrer que $h = 1_{\mathrm{B}} - 1_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

   Corrigé – $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors que* $h^{-1}(\{1\}) = \mathrm{B} \notin \mathrm{T}$, *donc* h *n'est pas mesurable. Par contre* $|h| = 1_{\mathrm{A}}$ *est mesurable car* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

Exercice 3.7 (Mesurabilité des fonctions continues) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).

Corrigé – *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}$*. Comme* f *est continue,* $f^{-1}(\mathrm{O})$ *est aussi un ouvert de* $\mathbb{R}$*, donc* $f^{-1}(\mathrm{O}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Comme l'ensemble des ouverts engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on en déduit que* f *est mesurable (on utilise ici la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.16 page 123).*

2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.

Corrigé – *On suppose* f *continue à droite. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit* f_n *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -n, \\ f(\frac{p}{n}) \text{ si } -n < x \leq n \text{ et } p \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{p-1}{n} < x \leq \frac{p}{n}, \\ 0 \text{ si } x > n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) 1_{]\frac{p-1}{n},\frac{p}{n}]}.$$

On a $f_n \in \mathcal{E}$ *car* $]\frac{p-1}{n},\frac{p}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour tout* n *et* p*. Soit* $x \in \mathbb{R}$*. Pour* $n > |x|$*, on a* $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ *avec* $\frac{p}{n} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{p}{n}$ *(p dépend de n, x est fixé). Comme* f *est continue à droite en x, on a* $f_n(x) \to f(x)$ *quand* $n \to +\infty$ *(car* $\frac{p}{n} \to x$*, avec* $\frac{p}{n} \geq x$*). La deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.20 page 127) donne alors* $f \in \mathcal{M}$*.*

3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

Corrigé – *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. On pose* $\mathrm{A} = f^{-1}([\alpha,\infty[)$*. On suppose* $\mathrm{A} \neq \emptyset$ *(si* $\mathrm{A} = \emptyset$*, on a bien* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*). Si* $x \in \mathrm{A}$*, on a* $f(x) \geq \alpha$ *et, comme* f *est croissante, on a aussi* $f(y) \geq \alpha$ *pour tout* $y \geq x$*. Donc,* $[x,\infty[\subset \mathrm{A}$*. En posant* $a = \inf \mathrm{A} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, on en déduit que* $]a,\infty[\subset \mathrm{A} \subset [a,\infty[$*.* A *est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est* ∞*), ce qui prouve que* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Comme* $\{[\alpha,\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on en déduit que* f *est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.16 page 123).*

Exercice 3.8 (Mesurabilité de $1_{\mathbb{Q}}$) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est-elle mesurable ?

Corrigé – *Oui, la fonction* $1_{\mathbb{Q}}$ *est mesurable. En effet, si* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(et même si* $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$*), on a* $1_{\mathbb{Q}}^{-1}(\mathrm{A}) = \emptyset$ *ou* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *(selon que* 1 *et* 0 *appartiennent ou non à* A*). Comme ces* 4 *ensembles sont des boréliens, on en déduit que* $1_{\mathbb{Q}}$ *est borélienne (c'est-à-dire mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *quand* $\mathbb{R}$ *est muni de sa tribu borélienne).*

Exercice 3.9 (Loi de probabilité de la v.a.r. nulle) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et X une v.a.r.. On suppose que $\mathrm{X} = 0$ p.s.. Donner la loi de probabilité p_{X} de X.

Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Si* $0 \in A$ *on a* $p(X^{-1}(A)) = 1$ *et si* $0 \notin A$ *on a* $p(X^{-1}(A)) = 0$*. Ceci montre que* P_X *est la mesure de Dirac en* 0 *(notée* δ_0*).*

Exercice 3.10 Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A.

   Corrigé – *Soit* f *une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$*. (L'ensemble* E *est muni de la tribu* $\mathcal{A}$ *et, comme d'habitude,* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu borélienne.)*

   On peut supposer $A \neq \emptyset$ *(et même* A *non réduit à un seul élément, sinon il n'y a rien à démontrer !).*

   Soit $x \in A$*, on pose* $\alpha = f(x)$ *et* $B = A \cap f^{-1}(\{\alpha\})$*. Comme* f *est mesurable et que* $\{\alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $B \in \mathcal{A}$*. Comme* $B \subset A$ *et que* $B \neq \emptyset$ *(car* $x \in B$*) on a nécessairement* $B = A$*, ce qui prouve que* f *est constante sur* A *(et* $f(y) = \alpha$ *pour tout* $y \in A$*).*

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, montrer qu'une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition.

   Corrigé – *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une partition de* E*. On a donc* $\cup_{i\in I} A_i = E$ *et* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$*. On peut aussi supposer aussi que* $A_i \neq \emptyset$ *pour tout* $i \in I$*.*
   Selon l'exercice 2.11, on a alors
   $$\mathcal{A} = \{\cup_{i\in J} A_i, \text{ avec } J \subset I \text{ et } J \text{ ou } J^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$
   Soit f *une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$*.*

   Soit $i \in I$*. Comme les* A_j *sont disjoints deux à deux et non vides et que tout élément de* $\mathcal{A}$ *est une réunion de* A_j*, on a*
   $$B \in \mathcal{A},\ B \subset A_i \Rightarrow B = \emptyset \text{ ou } B = A_i.$$
   On peut donc appliquer la première question, elle donne que f *est constante sur* A_i*.*

3. Donner un exemple de fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable pour la tribu engendrée par cette partition. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons]

   Corrigé – *Comme cela est suggéré, on prend* $E = \mathbb{R}$ *et comme partition l'ensemble des singletons, c'est-à-dire* $\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\}$*. La tribu engendrée par cette partition, notée* $\mathcal{A}$*, est donc l'ensemble des parties de* $\mathbb{R}$ *au plus dénombrable ou dont le complémentaire est au plus dénombrable. La tribu* $\mathcal{A}$ *est incluse dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(car les singletons appartiennent à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) mais est différente de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(par exemple, l'intervalle* $]0,1[$ *appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais n'appartient pas à* $\mathcal{A}$*). La fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *n'est donc par mesurable (par exemple,* $f^{-1}(]0,1[) =]0,1[\notin \mathcal{A}$*) mais est bien constante sur chaque élément de la partition.*

Exercice 3.11 (Égalité presque partout) 1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

Corrigé – *Si $f = g$ (c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a bien $f = g$ λ p.p. car $f = g$ sur $\emptyset^c$ et $\lambda(\emptyset) = 0$.*

Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si O est un ouvert non vide, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset \mathrm{O}$, on a donc $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha, \beta[) \leq \lambda(\mathrm{O})$.

On suppose maintenant que $f = g$ λ p.p., il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ et $f = g$ sur A^c. On a alors $\{f(x) \neq g(x)\} \subset \mathrm{A}$. Or, $\{f(x) \neq g(x)\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert car $(f-g)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\{f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la monotonie de λ donne $\lambda(\{f(x) \neq g(x)\}) \leq \lambda(\mathrm{A}) = 0$. On en déduit que $\{f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$ (car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 (définie en (2.2)) ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Corrigé – *Si $f(0) = g(0)$, on prend $\mathrm{A} = \{0\}^c$. On a bien $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0(\mathrm{A}) = 0$ et $f = g$ sur A^c car $\mathrm{A}^c = \{0\}$. Donc, $f = g$ δ_0 p.p..*

Réciproquement, on suppose maintenant que $f = g$ δ_0 p.p., il existe donc $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $f = g$ sur A^c et $\delta_0(\mathrm{A}) = 0$. Comme $\delta_0(\mathrm{A}) = 0$, on a donc $0 \notin \mathrm{A}$, c'est-à-dire $0 \in \mathrm{A}^c$ et donc $f(0) = g(0)$.

Exercice 3.12 (Mesurabilité) Soit $f : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^*$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x, y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[.$$

On se limite à $\mathrm{N} = 1$.

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $f_n(x, y) = f(x, \frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} \leq y < \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$. Noter que x et y sont fixés et que p dépend de n. Quand $n \to +\infty$, on a donc $\frac{p}{n} \to y$ avec $\frac{p}{n} \leq y$. Comme $f(x, \cdot)$ est continue à gauche en y, on a donc $f(x, \frac{p}{n}) \to f(x, y)$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $f_n(x, y) \to f(x, y)$ quand $n \to +\infty$.*

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 78.]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $g_p = f(\cdot, \frac{p}{n})$. On a donc, par hypothèse, g_p mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Soit $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Soit* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. *Il existe donc* $p \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$. *On a alors* $f_n(x,y) = g_p(x)$ *et donc* $f_n(x,y) \in C$ *si et seulement* $g_p(x) \in C$. *On en déduit que :*

$$f_n^{-1}(C) = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} (g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[).$$

Comme g_p *est mesurable, on a* $g_p^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a aussi* $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $g_p^{-1}(C) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 78). Comme* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *est stable par union dénombrable, on en déduit* $f_n^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et donc* f_n *mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est mesurable.

Corrigé – *Comme* f_n *mesurable pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que* $f_n(x,y) \to f(x,y)$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$, *la propriété 3 de la proposition 3.19 donne que* f *est mesurable (de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$*).*

Exercice 3.13 (Sur la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+$)

On note T l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ contenant les deux points 0 et $+\infty$ ou ne contenant aucun de ces deux points, c'est-à-dire $T = T_1 \cup T_2$ avec

$$T_1 = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0,\infty\} \subset A\} \text{ et } T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0,\infty\} \subset A^c\}$$

1. Montrer que T est une tribu et que T est strictement incluse dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. On pose $\mathcal{C} = \{]\alpha,\beta[,\ 0 \le \alpha < \beta \le +\infty[\}$. Déduire de la première question que $\mathcal{C}$ n'engendre pas la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.14 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$)

1. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{C}_1 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$.

— *Comme* $[0,\beta[$ *est un ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *et donc* $T(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

— *Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on a* $\{[\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+^*\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
Comme $[0,\infty] = [0,1[\cup [1,\infty] \in T(\mathcal{C}_1)$, *on a aussi* $\{[\alpha,\infty], \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
Par stabilité d'une tribu par intersection, on a alors $\{[\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.
Par stabilité d'une tribu par union dénombrable, on montre alors que $\{]\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset T(\mathcal{C}_1)$ *et* $\{]\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+\} \subset T(\mathcal{C}_1)$.

Comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ *est une réunion au plus dénombrable d'intervalles du type* $]\alpha,\beta[$ *(avec* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$*),* $[0,\beta[$ *(avec* $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$*) et* $]\beta,\infty]$ *(avec* $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$*), on en déduit que tout ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *est dans* $T(\mathcal{C}_1)$ *et donc* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset T(\mathcal{C}_1)$.

On a bien montré que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

2. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{C}_2 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$. *Si* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on remarque que* $[0,\beta[= \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^*,\alpha<\beta}[0,\alpha[$. *On en déduit que* $[0,\beta[\in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. *On a donc* $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ *et* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$.

Comme $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, *on a aussi* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3. Montrer que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé – *Cette question peut se faire comme dans l'exercice 3.13. On donne ici une autre méthode. On prend un ensemble* E *(ayant au moins 2 éléments) et une tribu* T *sur* E *différente de* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *(par exemple,* $\mathrm{T} = \{\emptyset, \mathrm{E}\}$*). Soit alors* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{A} \notin \mathrm{T}$. *On définit* f *de* E *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *par* $f(x) = \infty$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \notin \mathrm{A}$. *Comme* $\mathrm{A} \notin \mathrm{T}$, *la fonction* f *est non mesurable. On a pourtant* $f^{-1}(]0,\beta[) = \emptyset \in \mathrm{T}$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. *Ceci montre que* $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ *n'engendre pas* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.15 (Graphe d'une fonction borélienne) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant que l'on verra au chapitre 7 :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(x,y) = f(x)$ et $\mathrm{H}(x,y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a* $\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \times \mathbb{R}$. *Comme* f *est mesurable,* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *(3.2) donne* $f^{-1}(\mathrm{A}) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et donc* $\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On a donc* F *mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

Le fait que H *est mesurable se démontre de manière semblable en remarquant que* $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{A}) = \mathbb{R} \times \mathrm{A}$ *(ou en utilisant la continuité de* H*).*

2. On pose $\mathrm{G}(f) = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = f(x)\}$ ($\mathrm{G}(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $\mathrm{G}(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *L'ensemble de fonctions mesurables est un espace vectoriel, on a donc* $\mathrm{F} - \mathrm{H}$ *mesurable. On en déduit que* $\mathrm{G}(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *en remarquant que* $\mathrm{G}(f) = (\mathrm{F} - \mathrm{H})^{-1}(\{0\})$ *et* $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.16 (Mesurabilité au sens de Lusin) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert tel que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est mesurable au sens de Lusin si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, tel que $m(K \setminus K_1) \leq \varepsilon$ et $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]

   Corrigé – *Soit* K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la régularité de m, il existe* F *fermé et* O *ouvert t.q.* $F \subset A \subset O$ *et* $m(O \setminus F) < \varepsilon$. *On prend* $K_1 = (K \cap F) \cup (K \cap O^c)$.

   Les ensembles $K \cap F$ *et* $K \cap O^c$ *sont fermés (car l'intersection d'un compact et d'un fermé est un compact). L'ensemble* K_1 *est donc compact car il est l'union de deux compacts. Comme* $K_1 = K \setminus (O \setminus F)$, *on a bien* $K_1 \subset K$ *et* $(K \setminus K_1) \subset (O \setminus F)$. *On en déduit* $m(K \setminus K_1) \leq m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

   On montre maintenant que $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$. *Soit* $x \in K_1$. *On distingue deux cas :*

   Premier cas. *Si* $x \in K \cap F$, *on a alors* $x \in O$. *Comme* O *est ouvert il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B(x, \delta) \subset O$ *(où* $B(x, \delta)$ *est la boule ouverte de centre x et de rayon* δ*). On a donc* $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap F \subset A$, *ce qui prouve que* $f_{|K_1}$ *est constante et égale à* 1 *sur* $K_1 \cap B(x, \delta)$ *et donc* $f_{|K_1}$ *est continue en x (car constante dans un voisinage de x).*

   Deuxième cas. *Si* $x \in K \cap O^c$, *on raisonne de manière similaire. On a* $x \in F^c$. *Comme* F^c *est ouvert il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B(x, \delta) \subset F^c$. *On a donc* $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap O^c \subset A^c$, *ce qui prouve que* $f_{|K_1}$ *est constante et égale à* 0 *sur* $K_1 \cap B(x, \delta)$ *et donc* $f_{|K_1}$ *est continue en x.*

2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.

   Corrigé –
   Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. *On pose* $f_i = 1_{A_i}$, *de sorte que* $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$.

   Soit K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la question 1, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *il existe* $K_1^{(i)}$ *compact,* $K_1^{(i)} \subset K$, *tel que* $m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon/n$ *et* $(f_i)_{|K_1^{(i)}} \in C(K_1^{(i)}, \mathbb{R})$. *On prend alors :*

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^n K_1^{(i)}.$$

   On a bien K_1 *compact (car intersection de compacts),* $K_1 \subset K$. *On a aussi* $(K \setminus K_1) = \bigcup_{i=1}^n (K \setminus K_1^{(i)})$ *et donc :*

$$m(K \setminus K_1) \leq \sum_{i=1}^n m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon.$$

Enfin, $f_{|K_1}$ *est continue car* $f_{|K_1} = \sum_{i=1}^{n} a_i (f_i)_{|K_1}$ *et* $(f_i)_{|K_1}$ *est continue (puisque* $(f_i)_{K_1^{(i)}}$ *est continue et* $K_1 \subset K_1^{(i)}$*).*

3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.39, et la question précédente.]

   Corrigé – *Comme* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*, il existe* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p..*

   Soit K *compact et* $\varepsilon > 0$*. Par la question 2, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $K_1^{(n)}$ *compact,* $K_1^{(n)} \subset K$*, tel que* $m(K \setminus K_1^{(n)}) \le \varepsilon 2^{-n}$ *et* $(f_n)_{|_{K_1^{(n)}}} \in C(K_1^{(n)}, \mathbb{R})$*. On prend tout d'abord :*

$$K_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_1^{(n)}.$$

   On a bien K_2 *compact (car intersection de compacts),* $K_2 \subset K$*. On a aussi* $(K \setminus K_2) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (K \setminus K_1^{(n)})$ *et donc* $m(K\setminus K_2) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(K\setminus K_1^{(n)}) \le 2\varepsilon$*. Enfin,* $(f_n)_{|K_2}$ *est continue pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

   Pour trouver K_1*, on utilise maintenant le théorème d'Egorov. Comme* $f_n \to f$ *p.p. sur* K_2 *et que* $m(K_2) < \infty$*, il existe* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $A \subset K_2$*,* $m(K_2 \setminus A) \le \varepsilon$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A*. En utilisant la régularité de m, on trouve aussi* $F \subset A$*,* F *fermé et* $m(A \setminus F) \le \varepsilon$*. On prend alors* $K_1 = F$*.*

   On a bien K_1 *compact (car* K_1 *est fermé dans le compact* K_2*),* $K_1 \subset K$*. On a* $(K \setminus K_1) = (K \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus A) \cup (A \setminus F)$ *et donc* $m(K \setminus K_1) \le 4\varepsilon$*. Enfin* $f_{|K_1}$ *est continue car* $f_{|K_1}$ *est limite uniforme de la suite de fonctions continues* $((f_n)_{|K_1})_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Exercice 3.17 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.31. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(X)$) si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire, plus précisément, que $Y = f \circ X$).

1. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(X)$-mesurable.

   Corrigé – *On rappelle que la tribu engendrée par* X *est* $\tau(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*.*

   Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$*. Comme* f *est borélienne (c'est-à-dire mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, où* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu borélienne), on a* $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \tau(X)$*. Ce qui prouve que* T *est* $\tau(X)$*-mesurable.*

On suppose maintenant que Y est $\tau(X)$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$\mathrm{Y} = \sum_j a_j 1_{\mathrm{A}_j}.$$

   On suppose aussi que $\bigcup_j \mathrm{A}_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $\mathrm{A}_j \in \tau(\mathrm{X})$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$.

   Corrigé – *Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme les A_i sont disjoints deux à deux, $a_i \neq a_k$ si $i \neq k$ et $\bigcup_i \mathrm{A}_i = \Omega$, on a $\mathrm{A}_j = \mathrm{Y}^{-1}(\{a_j\})$. Comme $\{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et Y est τ-mesurable, on en déduit que $\mathrm{A}_j \in \tau(\mathrm{X})$. (On rappelle aussi que $\tau(\mathrm{X}) \subset \mathcal{A}$ car X est une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.)*

   Pour tout i, il existe $\mathrm{B}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_i = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{B}_i)$ (car $\mathrm{A}_i \in \tau(\mathrm{X})$). Comme les A_i sont disjoints deux à deux, on a, si $i \neq j$, $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j \cap Im(\mathrm{X}) = \emptyset$ (avec $Im(\mathrm{X}) = \{\mathrm{X}(\omega), \omega \in \Omega\}$). On peut donc supposer les B_i disjoints deux à deux en remplaçant chaque B_i ($i > 0$) par $\mathrm{B}_i \setminus \bigcup_{j<i} \mathrm{B}_j$.

   On pose $f = \sum_i a_i 1_{\mathrm{B}_i}$. La fonction f est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\omega \in \Omega$, il existe i tel que $\omega \in \mathrm{A}_i$ (car $\Omega = \bigcup_i \mathrm{A}_i$), on a donc $\mathrm{X}(w) \in \mathrm{B}_i$ et donc $f(\mathrm{X}(\omega)) = a_i = \mathrm{Y}(\omega)$, ce qui donne bien $f(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$.

3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq nx - [nx] < 1$ et donc $0 \leq x - \phi_n(x) < \frac{1}{n}$, ce qui prouve que $\phi_n(x) \to x$ quand $n \to \infty$.*

   (b) On pose $\mathrm{Y}_n = \phi_n(\mathrm{Y})$. Montrer que Y_n est $\tau(\mathrm{X})$ mesurable.

   Corrigé – *On remarque tout d'abord que ϕ_1 est borélienne. En effet, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\phi_1^{-1}(\{p\}) = [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, pour $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a*

$$\phi_1^{-1}(\mathrm{B}) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z} \cap \mathrm{B}} [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $x \mapsto nx$ est continue, c'est une application borélienne. Par composition (et produit par $(1/n)$), on en déduit que la fonction ϕ_n est borélienne. On montre alors que Y_n est $\tau(\mathrm{X})$-mesurable, comme dans la première question car, pour $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Y}_n^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{Y}^{-1}(\phi_n^{-1}(\mathrm{B})) \in \tau(\mathrm{X})$.

4. Terminer la preuve du théorème.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme l'ensemble des valeurs prises par Y_n (définie dans la troisième question) est au plus dénombrable, on peut appliquer la deuxième question. On obtient l'existence de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, t.q. $\mathrm{Y}_n = f_n(\mathrm{X})$.*

On note A *l'ensemble des réels x pour lesquels la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente.* A *est donc aussi l'ensemble des réels x pour lesquels la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est de Cauchy. On en déduit que* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *car* A *peut s'écrire :*

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{p,q\geq N} (f_p - f_q)^{-1}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]).$$

On pose maintenant $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *si* $x \in A$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \in A^c$*. La fonction* f *est borélienne car* f *est limite simple des fonction boréliennes* $f_n 1_{A^c}$ *quand* $n \to \infty$.

Enfin, si $\omega \in \Omega$*, on a* $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$*. La troisième question donne que* $Y_n(\omega) = \phi_n(Y(\omega)) \to Y(\omega)$*. On a donc* $X(\omega) \in A$ *et donc* $f_n(X(\omega)) \to f(X(\omega))$*. Ceci donne* $Y(\omega) = f(X(\omega))$*. On a bien montré que* $Y = f(X)$ *avec* f *borélienne.*

Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que

$$P_X(f = g) = 1.$$

Corrigé – *Soit* $B = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)\}$*. On a* $B = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Si* $\omega \in \Omega$*, on a* $f(X(\omega)) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ *et donc* $X(\omega) \in B$*. Ceci prouve que* $X^{-1}(B) = \Omega$ *et donc que* $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = 1$*, c'est-à-dire* $P_X(f = g) = 1$.

Exercice 3.18 (Composition de v.a.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens.) On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega, \;\; Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

Corrigé – *Soit* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose :*

$A_n = \{N = n\} = \{\omega \in \Omega, N(\omega) = n\}$ *et* $B_n = Y_n^{-1}(B) = \{Y_n \in B\} = \{\omega \in \Omega, Y_n(\omega) \in B\}$.

(Noter que l'ensemble des A_n*,* $n \in \mathbb{N}^*$*, forme une partition de* Ω*.) On va montrer que* $Z^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$.

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$*, on a* $\omega \in A_{N(\omega)}$ *et, si* $\omega \in Z^{-1}(B)$*, on a* $Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega) \in B$*. On a donc* $\omega \in A_{N(\omega)} \cap B_{N(\omega)}$*, ce qui donne bien* $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$.

Réciproquement, si $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$*, il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\omega \in A_n \cap B_n$*. On a donc* $Z(\omega) = Y_n(\omega) \in B$*. On a bien montré que* $Z^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$.

Comme N *et* Y_n *sont des v.a.r., on a* $A_n, B_n \in \mathcal{A}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. On en déduit que* $Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*. Ceci donne bien que* Z *est mesurable.*

N.B. : Une autre démonstration possible est de remarquer que $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1_{A_n} Y_n$.

Exercice 3.19 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 événements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).

   Corrigé – *On a* $\tau(\{A_1\}) = \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\}$ *et* $\tau(\{A_2\}) = \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}$.

   Comme les tribus $\tau(\{A_1\})$ *et* $\tau(\{A_2\})$ *sont indépendantes on a donc :*

   $$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) \text{ pour tout } B_1 \in \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\} \text{ et tout } \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}. \quad (3.3)$$

   En prenant, dans (3.3), $B_1 = A_1$ *et* $B_2 = A_2$*, on en déduit que* A_1 *et* A_2 *sont indépendants.*

   Réciproquement, on suppose que A_1 *et* A_2 *sont indépendants. Pour montrer que* $\tau(\{A_1\})$ *et* $\tau(\{A_2\})$ *sont indépendantes, il suffit de montrer (3.3). On remarque tout d'abord que (3.3) est vraie si* $B_1 = \emptyset$ *ou* E *et si* $B_2 = \emptyset$ *ou* E *(l'hypothèse d'indépendance de* A_1 *et* A_2 *est même inutile). Puis, on remarque que l'hypothèse d'indépendance de* A_1 *et* A_2 *donne que (3.3) est vraie si* $B_1 = A_1$ *et* $B_2 = A_2$*. Enfin, on remarque que* C_1 *et* C_2 *indépendants implique que* C_1 *et* C_2^c *sont indépendants. En effet, on a :*

   $$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)) = P(C_1) - P(C_1 \cap C_2).$$

   Comme C_1 *et* C_2 *sont indépendants, on en déduit :*

   $$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1) - P(C_1)P(C_2) = P(C_1)(1 - P(C_2)) = P(C_1)P(C_2^c).$$

   En appliquant cette propriété avec $C_1 = A_1$ *et* $C_2 = A_2$*, on montre donc que* A_1 *et* A_2^c *sont indépendants. En prenant maintenant* $C_1 = A_2^c$ *et* $C_2 = A_1$*, on montre alors que* A_1^c *et* A_2^c *sont indépendants. Enfin, En prenant* $C_1 = A_2$ *et* $C_2 = A_1$*, on montre que* A_1^c *et* A_2 *sont indépendants. On a ainsi montré que (3.3) est vraie, c'est-à-dire que les tribus* $\tau(\{A_1\})$ *et* $\tau(\{A_2\})$ *sont indépendantes.*

2. (Indépendance de n événements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient la propriété

   $$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1, \ldots, n\}$$

   si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

   Corrigé – *Pour* $p \in \{0, \ldots, n\}$*, on introduit la propriété* $\mathcal{P}_p$ *suivante :*

   $$P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i) \text{ si } B_i \in \tau(\{A_i\}) \text{ pour } i \leq p \text{ et}$$
   $$B_i \in \{\emptyset, A_i, E\} \text{ pour } i > p.$$

Il est facile de voir que la propriété $\mathcal{P}_0$ *est équivalente à*

$$\mathrm{P}(\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i) = \prod_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) \text{ pour tout } \mathrm{I} \subset \{1,\ldots,n\}.$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ *signifie que les tribus* $\tau(\{\mathrm{A}_1\}),\ldots,\tau(\{\mathrm{A}_n\})$ *sont indépendantes.*

Le fait que $\mathcal{P}_n$ *implique* $\mathcal{P}_0$ *est immédiat. On suppose maintenant que* $\mathcal{P}_0$ *est vérifiée et on va montrer que* $\mathcal{P}_n$ *est vérifiée. Pour cela, on raisonne par récurrence sur p. On suppose donc que* $\mathcal{P}_{p-1}$ *est vérifiée pour un* $p \in \{1,\ldots,n\}$ *et on doit montrer que* $\mathcal{P}_p$ *est vérifiée. Pour montrer que* $\mathcal{P}_p$ *est vérifiée, il suffit de prendre les* B_i *tels que* $\mathrm{B}_i \in \tau(\{\mathrm{A}_i\})$ *pour* $i \le p-1$, $\mathrm{B}_p = \mathrm{A}_p^c$ *et* $\mathrm{B}_i \in \{\emptyset, \mathrm{A}_i, \mathrm{E}\}$ *pour* $i < p$ *et de montrer que* $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{B}_i) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{B}_i)$ *(car les autres choix de* B_p *sont directement donnés par* $\mathcal{P}_{p-1}$*). Or, on a, pour ce choix des* B_i *:*

$$\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{B}_i) = \mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{C}_i) - \mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{D}_i),$$

avec $\mathrm{C}_i = \mathrm{D}_i = \mathrm{B}_i$ *si* $i \ne p$, $\mathrm{C}_p = \mathrm{E}$ *et* $\mathrm{D}_p = \mathrm{A}_p$*. En utilisant* $\mathcal{P}_{p-1}$ *on a* $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{C}_i) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{C}_i)$ *et* $\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{D}_i) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{D}_i)$ *et donc :*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{B}_i) &= (\prod_{i\ne p} \mathrm{P}(\mathrm{B}_i))(\mathrm{P}(\mathrm{E}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_p)) \\ &= (\prod_{i\ne p} \mathrm{P}(\mathrm{B}_i))\mathrm{P}(\mathrm{A}_p^c) = \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{B}_i).\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_p$ *est vérifiée. Par récurrence (finie) sur p, on montre donc que* $\mathcal{P}_n$ *est vérifiée, ce qui prouve que les tribus* $\tau(\{\mathrm{A}_1\}),\ldots,\tau(\{\mathrm{A}_n\})$ *sont indépendantes.*

3. En donnant un exemple (avec $n \ge 3$), montrer que l'on peut avoir n événements, notés $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n$ soient indépendants.

   Corrigé – *On prend, par exemple,* $\mathrm{E} = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathrm{E})$ *et* P *donnée par* $\mathrm{P}(\{i\}) = \frac{1}{4}$, *pour* $i \in \{1,2,3,4\}$. *Puis, on choisit* $\mathrm{A}_1 = \{1,2\}$, $\mathrm{A}_2 = \{1,3\}$ *et* $\mathrm{A}_3 = \{2,3\}$. *Les trois événements* $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3$ *sont bien indépendants deux à deux (car* $\mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}(\mathrm{A}_j) = \frac{1}{4}$ *si* $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \ne j$*) mais ne sont pas indépendants car* $0 = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3) \ne \frac{1}{8} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)$.

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$.

   (a) On suppose que $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_1$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \{0,1\}$.

   Corrigé – *Comme* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_1$, $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_2$ *et que* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont deux tribus indépendantes, on doit avoir* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{A})$, *c'est-à-dire* $\mathrm{P}(\mathrm{A})(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})) = 0$ *et donc* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \{0,1\}$.

   (b) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \in \{0,1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Corrigé – *Si* A *est indépendant de tous les éléments de* $\mathcal{A}$*,* A *est indépendant avec lui même. On en déduit, comme à la question précédente que* $P(A) \in \{0,1\}$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P(A) \in \{0,1\}$ *et on distingue deux cas.*
Premier cas. *On suppose que* $P(A) = 0$*. On a alors pour tout* $B \in \mathcal{A}$*,* $A \cap B \subset A$ *et donc (par monotonie de* P*)* $0 \le P(A \cap B) \le P(A) = 0$*. On en déduit* $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$*, ce qui prouve que* A *est indépendant de tous les éléments de* $\mathcal{A}$*.*
Deuxième cas. *On suppose que* $P(A) = 1$*. On a alors* $P(A^c) = 0$ *et, pour tout* $B \in \mathcal{A}$*,* $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$*. Or (par monotonie et σ–sous additivité de* P*)* $P(B^c) \le P(A^c \cup B^c) \le P(A^c) + P(B^c) = P(B^c)$*. Donc,* $P(A^c \cup B^c) = P(B^c)$ *et donc* $P(A \cap B) = 1 - P(B^c) = P(B) = P(A)P(B)$*, ce qui prouve que* A *est indépendant de tous les éléments de* $\mathcal{A}$*.*

5. Soit $n \ge 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Corrigé – *Si* X *est une v.a.r., la tribu engendrée par* X *est* $\tau(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*. Pour* $A \in \mathcal{A}$*, on a donc* $\tau(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$*, c'est-à-dire* $\tau(1_A) = \tau(\{A\})$*. L'indépendance des événements* $A_1, \ldots, A_n$ *correspond (par la définition 2.58) à l'indépendance des tribus* $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_1\})$*. L'indépendance des v.a.r.* $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ *correspond (par la définition 3.29)) à l'indépendance des tribus* $\tau(1_{A_1}), \ldots, \tau(1_{A_n})$*. Comme* $\tau(\{A_i\}) = \tau(1_{A_i})$*, pour tout* i*, on en déduit que les événements* $A_1, \ldots, A_n$ *sont indépendants si et seulement si les v.a.* $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ *sont indépendantes.*

Exercice 3.20 (Indépendance deux par deux et dépendance globale)

Trouver un espace probabilisé et 3 v.a.r. indépendantes deux à deux mais globalement dépendantes.

Corrigé – *Un solution simple consiste à reprendre l'exemple donné à la question* 3 *de l'exercice 3.19. On prend* $E = \{1,2,3,4\}$*,* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ *et* P *donnée par* $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$*, pour* $i \in \{1,2,3,4\}$*. Puis on choisit* $A_1 = \{1,2\}$*,* $A_2 = \{1,3\}$ *et* $A_3 = \{2,3\}$ *et* $X_i = 1_{A_i}$ *pour* $i = 1,2,3$*. Les trois v.a.r.* X_1*,* X_2 *et* X_3 *sont bien indépendantes deux à deux (car les événements* A_1*,* A_2*,* A_3 *sont indépendants deux à deux) mais ne sont pas indépendantes (car les événements* A_1*,* A_2*,* A_3 *ne sont pas indépendants).*

Exercice 3.21 (Indépendance et indépendance 2 à 2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X_1, X_2, X_3 trois v.a.r. indépendantes. On suppose que chaque X_i a pour loi la loi discrète uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. Pour $i \ne j$, on pose $A_{i,j} = \{X_i = X_j\}$.

1. Pour $i \ne j$, calculer $P(A_{i,j})$.

Corrigé – *Soit* $i \ne j$*. On a, en utilisant l'indépendance de* X_i *avec* X_j*, puis le fait que* X_i *et* X_j *ont pour loi la loi discrète uniforme sur* $\{1,2,3,4,5,6\}$*,*

$$P(A_{i,j}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_i = k\} \cap \{X_j = k\}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_i = k\}P(\{X_j = k\} = 6\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

2. Montrer que $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ et $A_{2,3}$ sont indépendants 2 à 2 mais ne sont pas indépendants.

Corrigé – *Pour montrer l'indépendance* 2 *à* 2 *des trois événements* $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ *et* $A_{2,3}$, *on utilise l'indépendance des trois v.a.r.* X_1, X_2, X_3 *(et pour ce calcul l'indépendance* 2 *à* 2 *des trois v.a.r. suffit) :*

$$\begin{aligned} P(A_{1,2} \cap A_{1,3}) = P(A_{1,2} \cap A_{2,3}) = P(A_{2,3} \cap A_{1,3}) &= P(\{X_1 = X_2 = X_3\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\} \cap \{X_3 = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{X_1 = k\})P(\{X_2 = k\})P(\{X_3 = k\}) = \frac{1}{6^2}. \end{aligned}$$

Avec la première question, on en déduit bien l'indépendance 2 *à* 2 *de* $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ *et* $A_{2,3}$.
(On a, par exemple, $P(A_{1,2} \cap A_{1,3}) = P(A_{1,2})P(A_{1,3})$.*)*
Enfin, pour montrer que $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ *et* $A_{2,3}$ *ne sont pas indépendants, on remarque que*

$$P(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) = P(\{X_1 = X_2 = X_3\}) = \frac{1}{6^2} \neq P(A_{1,2})P(A_{1,3})P(A_{2,3}) = \frac{1}{6^3}.$$